Sistemas Lineales 1

Primer parcial

1^{er} semestre 2009

Recomendaciones generales:

- **Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.**
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.**
- **SEA PROLIJO Y EXPLIQUE Y DETALLE BIEN TODOS SUS PASOS. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.**
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- **Se recuerda que la prueba es individual.**
- **Al finalizar, colocar las hojas dentro del sobre amarillo y entregarlo al docente del salón.**

Problema 1 (7 puntos)

1. i) Defina la noción de convergencia de distribuciones.

   ii) Sea x_n una sucesión de puntos de $\mathbb{R}$ tal que $x_n \to a \in \mathbb{R}$. Pruebe que entonces la sucesión de distribuciones $T_n = \delta(t - x_n)$ converge a $\delta(t - a)$.

2. i) Pruebe que si $T_n \to T$ entonces $T'_n \to T'$.

   ii) Sea ahora $S_n = n\delta(t + 1/n) - n\delta(t - 1/n)$. Calcule $\lim_n S_n$ (Sugerencia: no se apresure; observe que puede interpretar S_n como la derivada de una distribución de límite conocido).

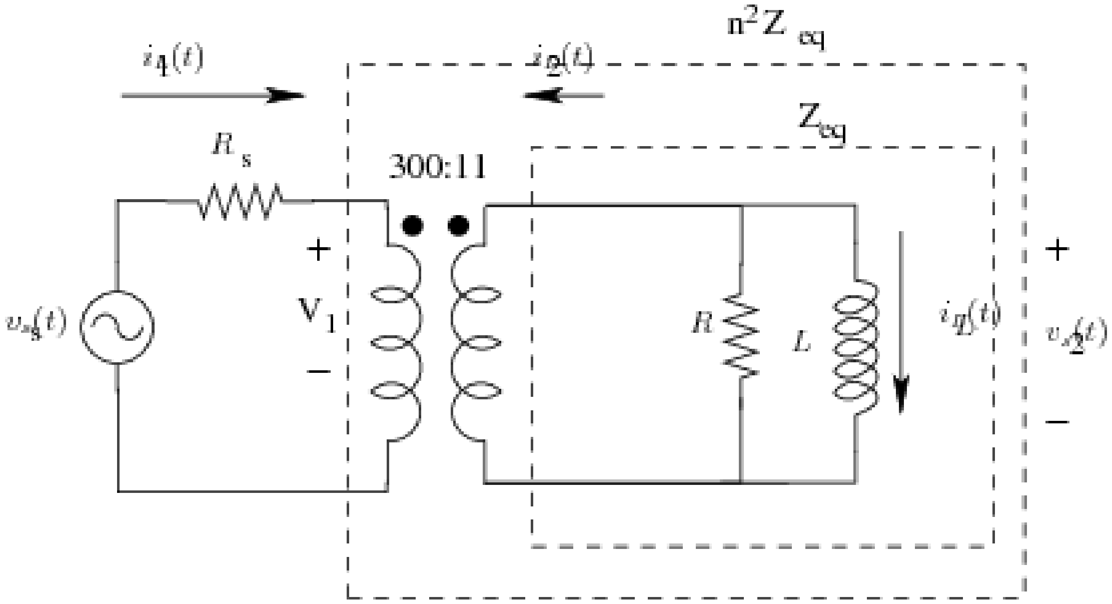

Figura 1: Circuito del Problema 2

Problema 2 (12 puntos)

Sea el circuito de la figura 1, donde tomaremos como entrada la tensión $v_s(t)$ y como salida la corriente $i_L(t)$.

1. Recordando que en un transformador ideal la relación entre las tensiones y número de vueltas del primario y del secundario verifican

$$\frac{v_1}{n_1} = \frac{v_2}{n_2}$$

deducir la siguiente ecuación diferencial que vincula la salida $i_L(t)$ con la entrada $v_s(t)$:

$$v_s(t) = \frac{R_s}{n} i_L(t) + \left[\frac{1}{n}\frac{R_s}{R} + n\right] L \frac{di_L(t)}{dt}$$

Los siguientes valores se aplicarán al resto del Problema:

$$n_1 = 300 \quad , \quad n_2 = 11 \quad , \quad n = \frac{n_1}{n_2} \quad , \quad R = R_s = 234\Omega \quad , \quad L = 1mHy$$

   a) Hallar la respuesta al impulso del sistema.

   b) Calcular la salida $i_L(t)$ cuando la entrada es $v_s(t) = 8.5kV\,cos\left(314\frac{rad}{s} \times t\right)\text{Y}(t)$, donde $\text{Y}(t)$ es el escalón de Heavyside.

2. Aplicando el Método de los fasores, calcular la corriente $i_{LR}(t)$, **corriente por la bobina en régimen sinusoidal**. ¿Qué relación existe entre i_L e i_{LR}? **Justifique!!!**

Problema 3 (13 puntos)

Sea dado $T_0 > 0$. Sean también dadas las funciones $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\tilde{x} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ seccionalmente continuas tales que $\mathrm{Sop}\{h\} \subset [0, T_0]$ y $\tilde{x}$ es periódica con periodo T_0. La función h es la respuesta al impulso de un sistema lineal e invariante en el tiempo (objeto de nuestro análisis en este problema), y la función $\tilde{x}$ es la entrada (o excitación) de dicho sistema.

a) Demuestre que la salida (o respuesta), $\tilde{y}$, de dicho sistema, es una función periódica con periodo T_0.

b) Definamos la función $\tilde{h} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ via

$$\tilde{h}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(t + kT_0) \ .$$

Demuestre que los coeficientes de Fourier $\{c_k(\tilde{y})\}$ están relacionados con $\{c_k(\tilde{x})\}$, $\{c_k(\tilde{h})\}$, y T_0 a través de la expresión $c_k(\tilde{y}) = T_0.c_k(\tilde{x}).c_k(\tilde{h})$.

c) **Una Version Simplificada de un Problema de Identificación de Sistemas.-** Con la finalidad de identificar un sistema objeto de estudio es posible excitar dicho sistema con una función de entrada rica en armónicos y usar un instrumento conocido con el nombre de *Analizador Espectral* a efectos de medir el espectro de la respuesta del sistema y así poder identificar el sistema en consideración (o equivalentemente, determinar la respuesta al impulso de dicho sistema). En este caso se excita nuestro sistema con la función de entrada

$$\tilde{x}(t) = -\frac{1}{T_0} t + 1 \ , \ t \in [0, T_0) \ .$$

De las medidas realizadas con el *Analizador Espectral* se obtiene que

$$c_k(\tilde{y}) = \begin{cases} T_0 \frac{1}{4} & , \ k = 0 \\ -T_0 \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2} & , \ k \neq 0 \end{cases} \ .$$

Halle $\{c_k(\tilde{h})\}$, y también la función h respuesta al impulso del sistema objeto de estudio.

d) Halle explícitamente la función $\tilde{y}$ dentro del intervalo $[0, T_0)$. En función de lo anterior, explique claramente cómo calcularía

$$\lim_{k \to +\infty} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^4} \ .$$

(no se pide calcularla).

Problema 4 (8 puntos)

Se considera un circuito lineal que trabaja a 50Hz y que es muy complicado, por lo que se decide tra-

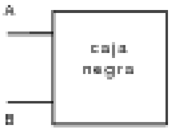

Figura 2: Caja negra

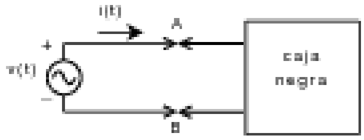

Figura 3: Ensayo de la caja negra

tarlo como una caja negra con dos bornes accesibles, como se muestra en la figura 2. Se realiza el ensayo mostrado en la figura 3, conectando una fuente de tensión ideal sinusoidal y midiendo el valor eficaz de la corriente consumida, la potencias activa consumida y el factor de potencia, relacionado al tipo de carga. Los resultados obtenidos son:

$$V_{ef} = 220\,V \quad , \quad I_{ef} = 2.53\,A \quad , \quad P = 484\,W$$

con **factor de potencia inductivo**.

a) Se desea representar la impedancia de la caja negra (Z_{CN}) como el paralelo de una resistencia R_P y una reactancia X_P. Hallar R_P y X_P a partir de los datos del ensayo.

b) Se desea representar la impedancia de la caja negra (Z_{CN}) como la serie de una resistencia R_S y una reactancia X_S. Hallar R_S y X_S.

c) Se desea compensar la potencia reactiva consumida por la caja negra. Se pide diseñar la compensación, indicando qué tipo de elemento colocaría, su valor y su esquema de conexión.

Solución del Problema 1:

Parte Ia):

Decimos que $T_n \to T$ cuando $n \to \infty$ si y solo si para toda función $\phi \in \mathcal{D}$ se verifica la siguiente convergencia en el plano complejo:

$$< T_n, \phi > \to_n < T, \phi >$$

Parte Ib):

Sea $T_n(t) = \delta(t - x_n)$. Dada $\phi \in \mathcal{D}$ arbitraria se verifica que:

$$< T_n(t), \phi(t) > = < \delta(t - x_n), \phi(t) > = \phi(x_n)$$

como ϕ es C^∞ en particular, si $x_n \to a$ se tiene que:

$$< T_n(t), \phi(t) > = \phi(x_n) \to \phi(a) = < \delta(t - a), \phi(t) >$$

por lo que $T_n(t) \to \delta(t - a)$.

Parte IIa):

Ver teórico

Parte IIb):

La distribución propuesta es la derivada de un pulso de ancho $2/n$ y altura n. Este pulso tiende cuando $n \to \infty$ a la distribución 2δ (puede verificarse usando un desarrollo de Taylor, pero podía usarse directamente en esta parte).

Por la parte anterior, la distribución propuesta converge, cuando $n \to \infty$ a $T = 2\delta'$.

Solución del Problema 4:

Parte a):

Para un modelado en paralelo, $Z_{CN} = R_P || jX_P$. La tensión en bornes de la resistencia R_P coincide con la de la reactancia X_P. La activa se disipa en R_P, en tanto que la reactiva lo hace en X_P. Entonces $P = \frac{V_{ef}^2}{R_P}$, de donde $R_P = 100\Omega$. Para calcular X_P, necesitamos la reactiva consumida. Por ser la carga inductiva, sabemos que $X_P > 0$. Además, considerando la potencia aparente, tenemos que

$$|S| = V_{ef}.I_{ef} = \sqrt{P^2 + Q^2} \approx 557A$$

Así, $Q = \sqrt{S^2 - P^2} \approx 275\, VAR$ (positiva, pues la caja negra tiene un factor de potencia inductivo) y $X_P = \frac{V_{ef}^2}{Q} \approx 176\Omega$.

Parte b):

Para el modelado en serie, $Z_{CN} = R_S + jX_S$. De la parte anterior sabemos que

$$Z_{CN} = \frac{R_P \times jX_P}{R_P + jX_P} = \left(\frac{100 \times j176}{100 + j176}\right)\Omega = R_S + jX_S$$

Otra forma de obtener las componentes en serie, es a partir de la corriente que entrega la fuente:

$$I_{ef} = \frac{|S|}{V_{ef}} \approx 2.53A$$

$$\Rightarrow R_S = \frac{P}{I_{ef}^2} \approx 75.0\Omega \quad , \quad X_S = \frac{Q}{I_{ef}^2} \approx 42.6\Omega$$

Parte c):
Al ser la impedancia de la caja negra de tipo inductivo, para compensar la potencia reactiva colocaremos un condensador entre los bornes A y B, en paralelo con la caja negra. De esa forma, no alteraremos la potencia activa que ésta consume. El valor absoluto de la potencia reactiva que entrega el condensador debe ser exactamente el consumido por la caja negra:

$$Q_C = V_{ef}^2 \times C \times \omega = 275VAR$$

Como $\omega = 100 \times \pi\, rad/s$, resulta

$$C = \frac{275}{100 \times \pi \times V_{ef}^2} F \approx 4.93 \times 10^{-5} F \approx 18\mu F$$

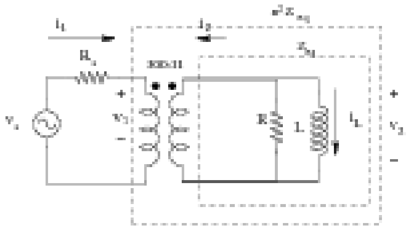

Figura 1: Circuito del Problema 2

Problema 2 (12 puntos)

Sea el circuito de la figura 1, donde tomaremos como entrada la tensión $v_s(t)$ y como salida la corriente $i_L(t)$.

1. Recordando que en un transformador ideal la relación entre las tensiones y número de vueltas del primario y del secundario verifican
$$\frac{v_1}{n_1} = \frac{v_2}{n_2}$$
deducir la siguiente ecuación diferencial que vincula la salida $i_L(t)$ con la entrada $v_s(t)$:
$$v_s(t) = \frac{R_s}{n} i_L(t) + \left[\frac{1}{n}\frac{R_s}{R} + n\right] L \frac{di_L(t)}{dt}$$
Por las ecuaciones del transformador ideal:
$$-i_2 = n.i_1 \tag{1}$$
$$v_1 = n.v_2 \tag{2}$$
Por la malla del primario del transformador:
$$v_s = R_s.i_1 + v_1 \tag{3}$$
Por nudos en el secundario y ya usando las ecuaciones de los componentes:
$$n.i_1 = i_L + \frac{v_2}{R} \tag{4}$$
Donde también se usó la ecuación 1 la corriente del secundario en función de la del primario. De la relación entre voltaje y corriente de la bobina L:
$$v_2 = L\frac{d\,i_L}{d\,t},\ v_1 = n.L\frac{d\,i_L}{d\,t} \tag{5}$$
Sustituyendo 5 en 4 y despejando i_1
$$i_1 = \frac{i_L}{n} + \frac{L}{n.R}\frac{d\,i_L}{dt} \tag{6}$$
sustituyendo 6 y 5 en 3:
$$v_s = R_s.\left(\frac{i_L}{n} + \frac{L}{n.R}\frac{d\,i_L}{dt}\right) + n.L\frac{d\,i_L}{d\,t} = \frac{R_s}{n} i_L + L\left(\frac{R_s}{n.R} + n\right)\frac{d\,i_L}{dt} \tag{7}$$

Los siguientes valores se aplicarán al resto del Problema:

$$n_1 = 300 \ \ , \ \ n_2 = 11 \ \ , \ \ n = \frac{n_1}{n_2} \ \ , \ \ R = R_s = 234\Omega \ \ , \ \ L = 1mHy$$

a) Hallar la respuesta al impulso del sistema.

Utilizando los valores de la letra $n = 300/11 = 27{,}3$:

$$\boxed{v_s = 8{,}58\Omega.i_L + 27{,}3 \times 10^{-3} s.\Omega \frac{d\,i_L}{dt}}^{1} \tag{8}$$

Cuando la entrada es el impulso tenemos que obtener la solución a la siguiente ecuación para obtener la respuesta.

$$\delta = 8{,}58\Omega.i_L + 27{,}3 \times 10^{-3} s.\Omega \frac{d\,i_L}{dt} A = DA = D\delta * A \tag{9}$$

De álgebra de convolución sabemos que la solución será la inversa de $D\delta$ en D'_+ que será una distribución de la forma $h(t) = \mathrm{Y}(t).f(t)$ donde f cumple lo siguiente:

$$Df = 0,\ f(0) = \frac{1}{27{,}3 \times 10^{-3} s.\Omega} = 36{,}6\mho s^{-1} \tag{10}$$

Para hallar la solución general de la ecuación diferencial $Df = 0$ hallamos las raíces del polinomio característico $8{,}58\Omega + 27{,}3 \times 10^{-3} s\Omega x$

La raíz es $x_0 = -314 s^{-1}$.

La solución por lo tanto, ya imponiendo la condición inicial es:

$$f(t) = 36{,}6\mho s^{-1} e^{-314 s^{-1} t} \tag{11}$$

por lo que:

$$\boxed{h(t) = 36{,}6\mho s^{-1} e^{-314 s^{-1} t}\mathrm{Y}(t)} \tag{12}$$

b) Calcular la salida $i_L(t)$ cuando la entrada es $v_s(t) = 8{,}5\mathrm{kV} \cos\left(314 \frac{\mathrm{rad}}{s} \times t\right) \mathrm{Y}(t)$, donde $\mathrm{Y}(t)$ es el escalón de Heavyside.

La salida será la convolución de la entrada con la respuesta al impulso:

$$\begin{aligned}
i_L(t) &= h(t) * v_s(t) = 36{,}6\mho s^{-1} e^{-\omega t}\mathrm{Y}(t) * 8{,}5\mathrm{kV}\cos(\omega_0 t)\,\mathrm{Y}(t) = 311\mathrm{kA\ s}^{-1}\mathrm{Y}(t)\int_0^t e^{-\omega(t-u)}\cos(\omega u)du \\
&= 311\mathrm{kA\ s}^{-1}\mathrm{Y}(t)e^{-\omega t}\int_0^t e^{\omega u}\cos(\omega u)du = 311\mathrm{kA\ s}^{-1}\mathrm{Y}(t)e^{-\omega.t}\int_0^t e^{\omega u}\frac{e^{j\omega u} + e^{-j\omega u}}{2}du \\
&= 311\mathrm{kA\ s}^{-1}\mathrm{Y}(t)\frac{e^{-\omega.t}}{2}\left(\int_0^t e^{(\omega+j\omega)u} + e^{(\omega-j\omega)u}du\right) = 311\mathrm{kA\ Y}(t)\frac{e^{-\omega.t}}{2\omega}\left(\frac{e^{(1+j)\omega u}}{1+j} + \frac{e^{(1-j)\omega u}}{1-j}\Bigg|_{u=0}^{u=t}\right) \\
&= 311\mathrm{kA\ Y}(t)\frac{e^{-\omega.t}}{2\omega}\left(\frac{e^{(1+j)\omega t}}{1+j} + \frac{e^{(1-j)\omega t}}{1-j} - \frac{1}{1+j} - \frac{1}{1-j}\right) \\
&= \frac{311\mathrm{kAY}(t)}{\omega}\left(\frac{\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}} - \frac{e^{-\omega.t}}{2}\right) \\
&= \boxed{\left(700\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) - 495 e^{-\omega.t}\right)\mathrm{Y}(t)\mathrm{A}}
\end{aligned} \tag{13}$$

2. Aplicando el Método de los fasores, calcular la corriente $i_{LR}(t)$, **corriente por la bobina en régimen sinusoidal.** ? Qué relación existe entre i_L e i_{LR}? **Justifique!!!**

Primero calculamos Z_{eq} marcada en la figura 1.

$$\mathrm{Z}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega}} = \frac{1}{\frac{1}{234\Omega} + \frac{1}{j314m\Omega}} \simeq 314m\Omega j \tag{14}$$

[1] s representa la unidad segundos y se reemplazaron los Henris por ohms segundo

La impedancia equivalente es la de la bobina pues la resistencia que está en paralelo es del orden de mil veces mas grande.

Usando divisor de voltaje y la impedancia vista desde el primario del transformador y que $n = \frac{300}{11} = 27{,}3$.

$$V_1 = \frac{n^2 Z_{eq}}{n^2 Z_{eq} + R_s} V_s \simeq \frac{234j}{234j + 234} V_s = \frac{1+j}{2} V_s = 6{,}01\text{kV}\angle_{\frac{\pi}{4}} \tag{15}$$

Por lo que el voltaje en el secundario, que también es el voltaje en bornes de la bobina es:

$$V_2 = \frac{V_1}{2} kV = 220\angle_{\frac{\pi}{4}} V \tag{16}$$

Para calcular el fasor corriente por la bobina solo resta dividir V_2 entre su impedancia.

$$I_{LR} = \frac{220\angle_{\frac{\pi}{4}} V}{j314m\Omega} \simeq 700\angle_{-\frac{\pi}{4}} \text{A} \tag{17}$$

Pasando al tiempo:

$$i_{LR}(t) = 700A\cos\left(314\frac{\text{rad}}{\text{s}} \times t - \frac{\pi}{4}\right) \tag{18}$$

La respuesta en régimen sinusoidal es como se comporta la salida cuando la entrada es una sinusoide y pasó suficiente tiempo como para que los transitorios se hayan extinguido, por lo cual la corriente en régimen i_{LR} tiene que ser igual a la corriente i_L cuando $t \to \infty$, y esto es lo que ocurre en este caso ya que lo único que diferencia a ambas expresiones es la exponencial que tiende a 0.

Sistemas Lineales 1 - Soluciones Primer Parcial

Problema 3.-

a) Dado que $\tilde{x}$ es periódica, con periodo T_0, tenemos que $\tilde{x}(u) = \tilde{x}(u + T_0)$, $\forall u \in \mathbb{R}$. Esto implica que

$$\tilde{y}(t) = (h * \tilde{x})(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)\tilde{x}(t-s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)\tilde{x}(t+T_0-s)ds =$$
$$(h * \tilde{x})(t+T_0) = \tilde{y}(t+T_0)\ ,\ \forall t \in \mathbb{R}\ .$$

b) Por hipótesis

$$\tilde{y}(t) = (h * \tilde{x})(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s)\tilde{x}(t-s)ds = \int_{0}^{T_0} h(s)\tilde{x}(t-s)ds = \int_{0}^{T_0} \tilde{h}(s)\tilde{x}(t-s)ds\ .$$

Entonces, se verifica que

$$c_k(\tilde{y}) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \tilde{y}(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\int_0^{T_0} \tilde{h}(s)\tilde{x}(t-s)ds\, e^{-jk\omega_0 t}\,dt =$$
$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \tilde{h}(s) \underbrace{\left(\int_0^{T_0} \tilde{x}(t-s)\, e^{-jk\omega_0 t}\,dt\right)}_{T_0 c_k(\tilde{x})\, e^{-jk\omega_0 s}} ds = c_k(\tilde{x})\int_0^{T_0} \tilde{h}(s)\, e^{-jk\omega_0 s}\,ds = T_0 c_k(\tilde{x})c_k(\tilde{h})\ .$$

c) Tenemos que

$$c_k(\tilde{x}) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \tilde{x}(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \left(\frac{-1}{T_0}t + 1\right) e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{2} & ,\ k = 0 \\ \frac{-j}{2\pi}\frac{1}{k} & ,\ k \neq 0 \end{cases}\ .$$

Usando ahora nuestro conocimiento de $\{c_k(\tilde{y})\}$, y la formula de la parte (**b**), obtenemos

$$c_k(\tilde{h}) = c_k(\tilde{x})\ ,\ \forall k \in \mathbb{Z}\ ,$$

lo cual implica que $\tilde{h} = \tilde{x}$. Como por hipótesis $\mathrm{Sop}\{h\} \subset [0, T_0]$, entonces se verifica que

$$h(t) = \tilde{h}(t) = \tilde{x}(t) = -\frac{1}{T_0}t + 1\ ,\ \forall t \in [0, T_0)\ .$$

d)

$$\tilde{y}(t) = (h * \tilde{x})(t) = \int_0^{T_0} h(s)\tilde{x}(t-s)ds =$$
$$\int_0^{t}\Big(-\frac{1}{T_0}s + 1\Big)\Big(\frac{1}{T_0}s - \frac{1}{T_0}t + 1\Big)ds + \int_t^{T_0}\Big(-\frac{1}{T_0}s + 1\Big)\Big(\frac{1}{T_0}s - \frac{1}{T_0}(t+T_0) + 1\Big)ds =$$
$$-\frac{1}{T_0}\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}t + \frac{T_0}{6} = -\frac{1}{2T_0}\Big(t - \frac{T_0}{2}\Big)^2 + \frac{7}{24}T_0\ ,\ t \in [0, T_0)\ .$$

Usando ahora nuestro conocimiento de $\tilde{y}$ en $[0, T_0)$, e invocando la identidad de Parseval

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |\tilde{y}(t)|^2 dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(\tilde{y})|^2 = \frac{T_0^2}{4^2} + 2\frac{T_0^2}{(2\pi)^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}\ ,$$

es fácil de ver que es posible calcular $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}$. Así, luego de un poco de algebra obtenemos finalmente que

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}\ .$$