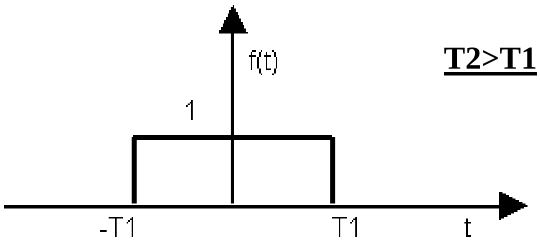
Sistemas Lineales 1

Primer parcial, 8de mayo 2008

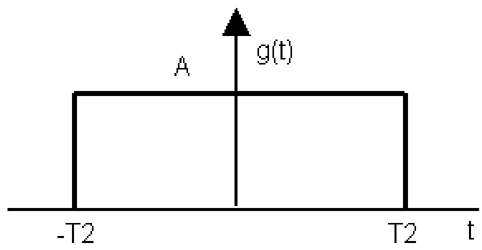
Recomendaciones generales:

- **Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.**
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.**
- **SEA PROLIJO Y EXPLIQUE Y DETALLE BIEN TODOS SUS PASOS. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.**
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- **Se recuerda que la prueba es individual.**
- **Al finalizar, colocar las hojas dentro del sobre amarillo y entregarlo al docente del salón.**

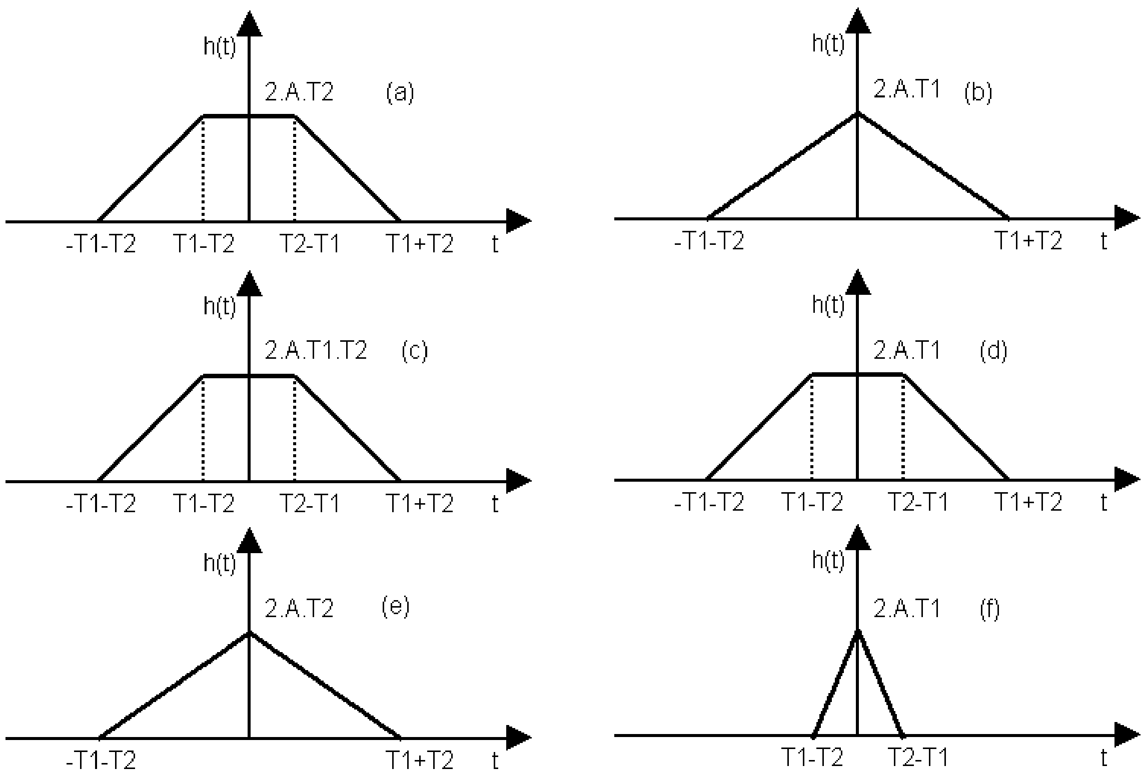
Problema 1 (6 puntos)



T2>T1



a) Indicar, **justificando**, cuál de las siguientes gráficas corresponde a h(t)=f(t)*g(t).



b) Sea $\varphi \in D$, de área 1 y tal que $\varphi(0)=0$, con $sop(\varphi) \subset [-(T2-T1), T2-T1]$. Hallar $\langle T_h(t), \varphi(t) \rangle$.

Problema 2 (12 puntos)

a) El circuito de la Figura 1 consiste en una fuente sinusoidal de tensión v(t) de frecuencia f_o que alimenta una carga compuesta por una resistencia en serie con una inductancia. A la frecuencia de trabajo, la impedancia de la carga vale $Z=R+jX_o$.

Calcular el módulo de la corriente en régimen I_L que entrega la fuente, en función de V (amplitud de la tensión sinusoidal), R y X_o.

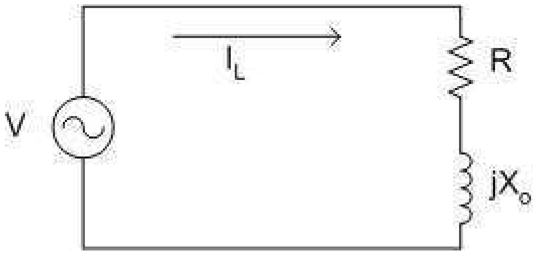


Figura 1

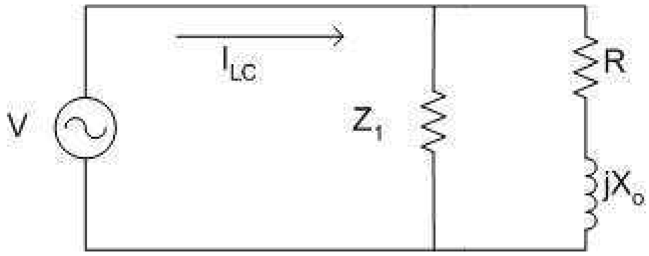


Figura 2

b) Se desea compensar la potencia reactiva entregada por la fuente según el circuito de la Figura 2.

i) Indicar qué componente colocaría para realizar la compensación y calcular el correspondiente valor de la impedancia Z_1, en función de R y X_o.

ii) Calcular el módulo de la corriente en régimen I_{LC} que entrega la fuente en función de V, R, X_o.

iii) Hallar la relación $\frac{|I_{LC}|}{|I_L|}$, vincularla con el argumento de Z y mostrar que la compensación sirve para reducir la corriente en la línea. (Se sugiere verificar el resultado con un diagrama fasorial).

c) La misma carga del circuito de la parte **a)** se alimenta ahora con una fuente sinusoidal $v_3(t)$ cuya frecuencia es la 3ª armónica de la anterior (es decir: $f_3 = 3f_o$).

Calcular el módulo de la corriente en régimen I_{L3} que entrega la fuente, en función de V_3 (amplitud de la fuente), R, X_o.

d) Con la fuente $v_3(t)$ se alimenta el **circuito compensado** de la parte **b)** (recordar que la compensación se diseñó para la impedancia de carga a frecuencia f_o).

i) Calcular el módulo de la corriente en régimen I_{L3C} que entrega la fuente, en función de V_3, R, X_o.

ii) Hallar la relación $\frac{|I_{L3C}|}{|I_{L3}|}$.

iii) Calcular esa relación en el caso particular $R=X_0$ y comentar el resultado obtenido: ¿qué pasa con la corriente de línea de 3ª armónica cuando se compensa la potencia reactiva a la frecuencia fundamental?

Problema 3 (13 puntos)

En la **figura 1** se muestra la gráfica de voltaje y corriente de un motor funcionando en condiciones habituales: $f = 50Hz$ (el tiempo está en segundos).

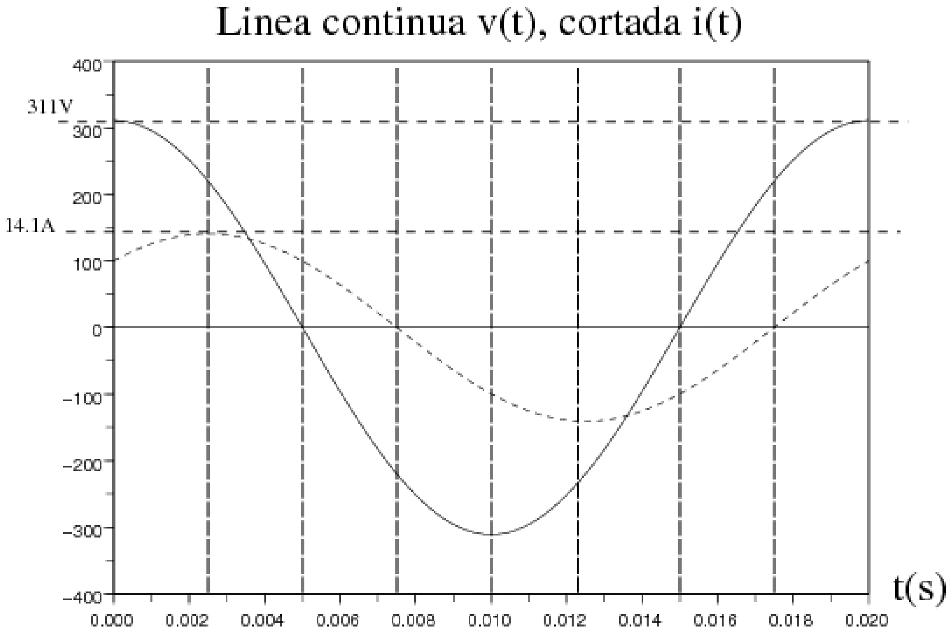


Figura 1

a) Realizar un diagrama fasorial en el cual se representen la corriente y el voltaje.

b) Se desea compensar localmente la reactiva del motor. Determinar el elemento a colocar, su valor y cómo se conecta, para compensar la reactiva del motor.

c) Hallar la impedancia equivalente del motor.

1. Sin el elemento de compensación.
2. Luego de compensar.

d) En el circuito de la **figura 2** la carga Z_L representa al **motor compensado**.

Datos: L=0,56 mHy, R = 1Ω, Vs=311 volts de amplitud, n1=2.n2.

1. Calcular la corriente I_S, el voltaje V_L en bornes del motor y la corriente por el motor (sin incluir la corriente por el elemento de compensación).
2. Representar en un diagrama fasorial, V_S y las magnitudes halladas en **d)**1.
3. Hallar gráficamente en el diagrama anterior la corriente por el elemento de compensación.
4. De una expresión temporal para el voltaje en bornes del motor.

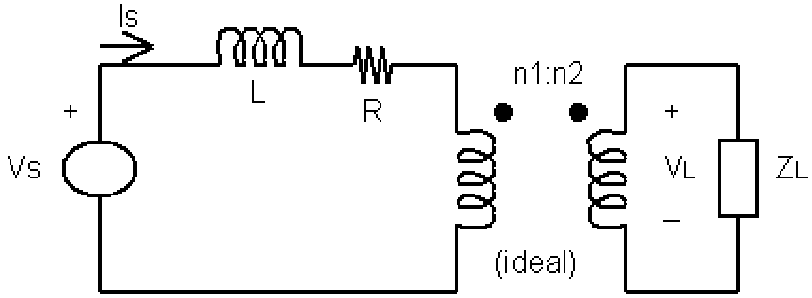


Figura 2

Problema 4 (9 puntos)

Se considera una señal *p(t)*, la cual es un pulso de amplitud 1 y soporte en $[0,\tau]$. Sea T_p la distribución asociada a esta función y *S(t)* el peine de Dirac de período T, con $\tau < T$.

- **a)** Hallar *U(t)*, tal que $T_U(t)=T_p(t)*S(t)$, y bosquejarla.
- **b)** Mostrar que la señal *U(t)* es periódica, hallar su período y mostrar que puede elegirse un intervalo de tiempo tal que coincide con *p(t)* en dicho intervalo.
- **c)** Hallar los coeficientes de Fourier de *U(t)*, en función de τ y de T.
- **d)** Hallar los valores de τ (en función de T) para los cuales se anula el tercer armónico de *U(t)*.
- **e)** Para valores hallados en la parte anterior, calcular la potencia que porta el segundo armónico de *U(t)*.

Primer Parcial de Sistemas Lineales 1

Curso 2008

Solución

Problema 1

a) La gráfica correcta es la (d). La convolución de dos pulsos de anchos $T_1 < T_2$ tiene forma de trapecio ya que mientras se solapan parcialmente el área crece (o decrece linealmente con t y luego se mantiene constante para aquellos t en los que el pulso chico está completamente incluido en el grande. Esto ocurre para $-T_2 + T_1 < t < T_2 - T_1$ y para estos t el área del producto de ambas fuciones es $2T_1 \cdot A$. Esto coincide con la gráfica (d).

b) Si φ es de área 1 y soporte en el intervalo en que h es constante, entonces:

$$< T_h, \varphi >= 2AT_1 \int_{\mathrm{sop}\varphi} \varphi(t)dt = 2AT_1$$

Problema 3

a) De la gráfica surgen los siguientes fasores en valor eficaz:

$$\begin{aligned} V &= 220V \\ I &= 10Ae^{-j\pi/4} = 7{,}07 - j7{,}07A \end{aligned}$$

de donde $Z = 22e^{j\pi/4}\Omega = 15{,}55 + j15{,}55\Omega$.

b) El elemento es inductivo por lo que conviene colocar en paralelo un condensador. Por ser en paralelo la tensión en bornes del mismo será $V = 220V$ y queremos que a esta tensión circule una corriente $I_c = j7{,}07A$ para compensar la del elemento, por lo que:

$$\frac{1}{j2\pi 50C} = \frac{220V}{j7{,}07A} \Rightarrow C = 102\mu F$$

c) Sin el elemento $Z = 15{,}55 + j15{,}55\Omega$. Con el elemento $Z_c = 220V/7,07A = 31{,}1\Omega$.

d) Sea V_1 la tensión en el primario. La relación de vueltas del transformador es $n = 2$ por lo que la impedancia vista desde el primario es $Z_1 = n^2 Z_L = 4 \cdot 31{,}1\Omega = 124\Omega$. Entonces:

$$I_s = \frac{220V}{124\Omega + 1\Omega + j2\pi 50 \cdot (0{,}56mHy)} = \frac{220}{125 + j0{,}176}A = 1{,}76 - j0{,}0025A$$

La tensión del primario es:

$$V_1 = Z_1 I_s = (1{,}76 - j0{,}0025)(124) = 218 - j0{,}31V$$

por lo que la tensión en el secundario es:

$$V_2 = \frac{1}{n}V_1 = 109{,}1 - j0{,}154V$$

y la corriente por el motor es:

$$I_{mot} = \frac{V_2}{Z} = 3{,}502 - 3{,}512j$$

La expresión temporal para V_2 es:

$$v_2(t) = 109{,}1\cos(2\pi \cdot 50 \cdot t - 0{,}0014)$$

Problema 4

a) Por la linealidad y continuidad de la convolución se tendrá que:

$$U(t) = T_p(t) * S(t) = T_p(t) * \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t-nT) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_p(t) * \delta(t-nT) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_p(t-nT)$$

es decir, el resultado es la superposición en el tiempo de múltiples copias de $p(t)$ separadas un tiempo T. La periodización de p es de período T es entonces la señal $U(t)$ buscada.

b) El argumento anterior muestra que U es periódica (de período T). Para verificarlo veamos que:

$$U(t+T) = (T_p * S)(t+T) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_p(t+T-nT) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_p(t-(n-1)T) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} T_p(t-mT)$$

donde hicimos el cambio de variable $m = n - 1$.

A su vez, por la observación anterior, en $[0, T]$ coincide con $p(t)$.

c) El período de la señal es T y la frecuencia fundamental es $\omega_0 = 2\pi/T$. Entonces:

$$c_0(U) = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{\tau}{T}$$

y para los coeficientes superiores usamos que:

$$\begin{aligned} c_n(U') &= \frac{1}{T} < \delta(t) - \delta(t-\tau), e^{-jn\omega_0 t} > \\ &= \frac{1}{T}\left(< \delta(t), e^{-jn\omega_0 t} > - < \delta(t-\tau), e^{-jn\omega_0 t} >\right) \\ &= \frac{1}{T}(1 - e^{-jn\omega 0\tau}) \end{aligned}$$

y como para $n \neq 0$, $c_n(U') = (jn\omega_0)c_n(U)$ se tiene que:

$$c_n(U) = \frac{1 - e^{-jn\omega_0\tau}}{j2\pi n}$$

donde hemos usado que $\omega_0 T = 2\pi$.

d) Para que $c_3(U) = 0$ debe ocurrir que:

$$\frac{1 - e^{-j3\omega_0\tau}}{j6\pi} = 0$$

o bien $e^{-j3\omega_0\tau} = 1$ lo que se da si:

$$3\omega_0\tau = 2k\pi$$

para algún k entero.

Sustituyendo $\omega_0 = 2\pi/T$ y despejando se tiene:

$$\tau = \frac{kT}{3}$$

por lo que los valores de τ posibles, usando que $0 < \tau < T$ son $\tau = T/3$ y $\tau = 2T/3$.

e) La potencia del segundo armónico es $P_2 = |c_2|^2 + |c_{-2}|^2 = 2|c_2|^2$ ya que la señal es real. Calculando c_2 para $\tau = T/3$ se obtiene:

$$c_2(U) = \frac{1 - e^{-j4\pi/3}}{j4\pi} = \frac{1 - (-1/2 + j\sqrt{3}/2)}{j4\pi} = \frac{3 - j\sqrt{3}}{j8\pi}$$

de donde $|c_2| \approx 0{,}1378$ y $P_2 = 0{,}0380$. El caso $\tau = 2T/3$ es similar y da el mismo resultado.

Problema 2

a)

$Z = R + jX_o \qquad I_L = \dfrac{V}{R + jX_o} \qquad |I_L| = \dfrac{V}{\sqrt{R^2 + X_o^2}}$

b)

1) $Z_1 = jX_1$

Impongo carga resistiva: $Z = \dfrac{(R + jX_o)jX_1}{R + j(X_o + X_1)} = \dfrac{-X_o X_1 + jRX_1}{R + j(X_o + X_1)}$

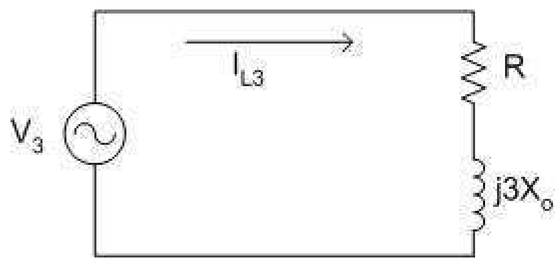
$-\dfrac{RX_1}{X_o X_1} = \dfrac{X_o + X_1}{R} \qquad -R^2 = X_o^2 + X_o X_1 \quad \Rightarrow \quad X_1 = -\dfrac{R^2 + X_o^2}{X_o}$

2) $Z = -\dfrac{X_o X_1}{R} = \dfrac{X_o (R^2 + X_o^2)}{X_o R} = \dfrac{R^2 + X_o^2}{R}$

3) $I_{LC} = \dfrac{RV}{R^2 + X_o^2}$

4) $\dfrac{|I_{LC}|}{|I_L|} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + X_o^2}} = \cos\varphi \leq 1$

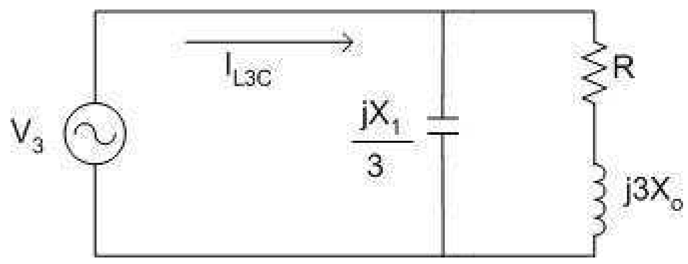
c)



$I_{L3} = \dfrac{V_3}{R + j3X_o}$

$|I_{L3}| = \dfrac{V}{\sqrt{R^2 + 9X_o^2}}$

d)



1) $Z = \dfrac{(R + j3X_o)\dfrac{jX_1}{3}}{R + j\left(3X_o + \dfrac{X_1}{3}\right)} = \dots\dots\dots = \dfrac{(R^2 + X_o^2)\left(1 - \dfrac{jR}{3X_o}\right)}{R + j\dfrac{8X_o^2 - R^2}{3X_o}}$

2) $$|Z| = \frac{(R^2 + X_o^2)\sqrt{1 + \dfrac{R^2}{9X_o^2}}}{\sqrt{R^2 + \dfrac{(8X_o^2 - R^2)^2}{9X_o^2}}} = (R^2 + X_o^2)\sqrt{\frac{R^2 + 9X_o^2}{R^4 - 7R^2X_o^2 + 64X_o^2}}$$

$$|I_{L3C}| = \frac{V_3}{(R^2 + X_o^2)}\sqrt{\frac{R^4 - 7R^2X_o^2 + 64X_o^2}{R^2 + 9X_o^2}}$$

3) $$\frac{|I_{L3C}|}{|I_{L3}|} = \frac{\sqrt{R^4 - 7R^2X_o^2 + 64X_o^2}}{R^2 + X_o^2}$$

4) Si $X_o = R$ $$\frac{I_{L3C}}{I_{L3}} = \frac{\sqrt{58}}{2} \cong 3.8$$

Al compensar la fundamental, aumentó la corriente de línea de 3ª armónica.