

# Sistemas Lineales 1

## Primer Parcial, 12 de mayo de 2007

### Recomendaciones generales:

- Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.
- En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.
- SEA PROLIJO Y EXPLIQUE Y DETALLE BIEN TODOS SUS PASOS. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.
- HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.
- PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.
- Se recuerda que la prueba es individual.
- Al finalizar, colocar las hojas dentro del sobre amarillo y entregarlo al docente del salón.

### Problema 1 (12 puntos)

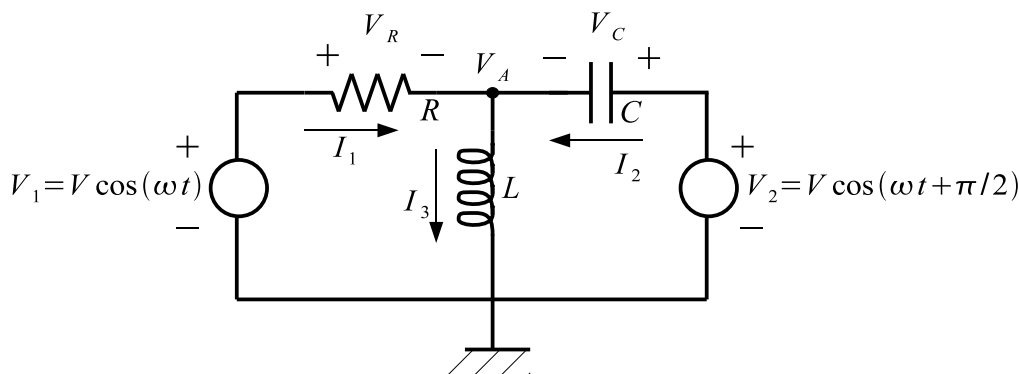


Figura 1:

(a) En el circuito de la Figura 1:

- i) Calcular  $V_A(j\omega)$  en función de  $V$ ,  $L$ ,  $R$ , y  $C$ .
- ii) Hallar  $\omega$  en función de  $R$  y  $C$  para que  $V_A$  sea 0 para todo  $t$ .

En las partes siguientes, los componentes del circuito tienen los siguientes valores:

$$V = 40 \text{ Volts}, \quad \omega = 2000 \text{ rad/seg}, \quad L = 10 \text{ mHy}, \quad R = 100 \Omega, \quad C = 10 \mu\text{F}$$

- (b)
  - i) Calcular los fasores  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_A$ ,  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ . Realizar un diagrama fasorial que contenga a los fasores antes mencionados. Enfatizar los ángulos notables.
  - ii) Calcular la corriente  $i_1(t)$ .
- (c)
  - i) Calcular  $V_C$  y  $V_R$ . Realizar para cada componente ( $R$ ,  $L$  y  $C$ ), un diagrama fasorial del voltaje y la corriente que lo atraviesa.
  - ii) Calcular la potencia activa, reactiva y aparente consumida por  $R$ ,  $L$  y  $C$ .

## Problema 2 (9 puntos)

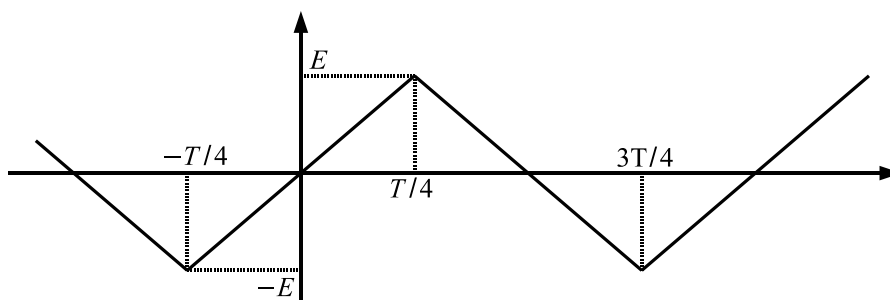


Figura 2: Bosquejo de  $f(t)$

- (a) Probar que si una **distribución** periódica  $S \in \mathcal{D}'$ , de periodo  $T$ , verifica que  $S(t + \frac{T}{2}) = S(-t)$ , entonces su serie de Fourier no presenta armónicos pares.
- (b) **Bosquejar** las distribuciones  $T_f'$  y  $T_f''$ , derivadas primera y segunda de la función  $f$  como distribución.
- (c) Hallar los coeficientes de Fourier de  $T_f''$ , que denotaremos por  $c_n(T_f'')$ . Verificar que efectivamente la señal no presenta armónicos pares, que los coeficientes no nulos son imaginarios puros y que:

$$\operatorname{sg}(\operatorname{Im}[c_{4n+1}(T_f'')]) = -\operatorname{sg}(\operatorname{Im}[c_{4n+3}(T_f'')])$$

- (d) Hallar los coeficientes de Fourier de  $f$ . Sabiendo que la potencia media  $P_m$  de  $f$  vale  $\frac{E^2}{3}$ , encontrar el número de primeros armónicos necesarios para obtener el 99% de la potencia media de la señal.
- (e) Si se inyecta la señal  $f(t)$  en un filtro pasabajos ideal de frecuencia de corte  $\omega_c$ . Hallar una relación entre dicha frecuencia y el periodo  $T$  que asegure que a la salida del pasabajos se obtenga en régimen una señal cuya potencia sea al menos, el 99% de la potencia media de  $f(t)$ .

**Justificar claramente los pasos dados y las propiedades y resultados utilizados.**

## Problema 3 (5 puntos)

- (a) Definir la convergencia en distribuciones en  $\mathcal{D}'$ .

Para cada  $n$  natural, consideremos el número  $h_n = \frac{1}{n}$  y la distribución  $T_n = \frac{\delta_{h_n} - \delta_{-h_n}}{2h_n}$ .

- (b) Hallar  $T \in \mathcal{D}'$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$ .
- (c) Sea  $S \in \mathcal{D}'$  la distribución asociada al pulso de amplitud 1 con soporte en el intervalo  $[-1, 1]$
- i) Hallar la distribución  $R_n = S * T_n$ . Representar gráficamente el resultado.
  - ii) Hallar la distribución  $R = \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n$ . Representar gráficamente el resultado.

### Problema 4 (5 puntos)

En el circuito en fasores de la Figura 3,

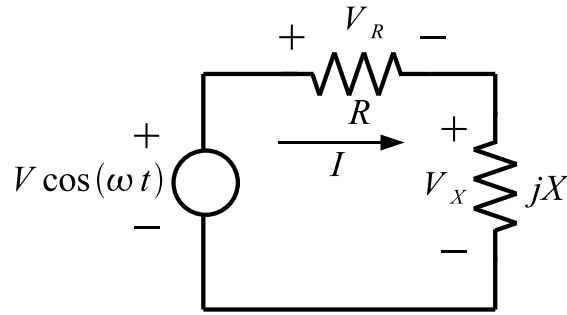


Figura 3:

- Mostrar que los fasores  $V_R$  y  $V_X$  son perpendiculares.
- Dibujar el diagrama fasorial para  $V$ ,  $I$ ,  $V_R$ ,  $V_X$ , explicando las diferencias según que  $X$  sea:
  - Inductiva
  - Capacitiva
- Dibujando el fasor  $V_R$  a partir del origen del plano complejo, hallar y dibujar el lugar geométrico de su extremo al variar  $X$  en todo su rango.

(**Sugerencia:** no hacerlo de forma analítica, sino recordando el resultado geométrico del arco capaz o las propiedades de las transformaciones bilineales.)

### Problema 5 (9 puntos)

- En el circuito de la Figura 4, hallar la ecuación diferencial que vincula  $v_o(t)$  con  $v_i(t)$ .

**Dato:**  $g = 1/R$

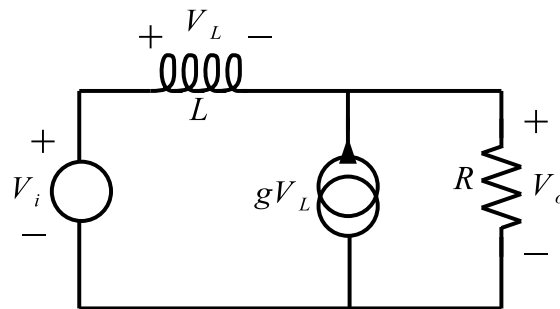


Figura 4:

- Determinar dos distribuciones  $T$  y  $S$  tales que:  $T * v_o = S * v_i$ .
- Hallar la respuesta al impulso del sistema, considerando como entrada  $v_i$  y como salida  $v_o$ .
- Hallar la respuesta del sistema a la entrada  $v_i(t) = 1V Y(t) \cdot e^{-\frac{R}{2L}t}$ .

# Solución

## Problema 1

- (a) 1) Aplicando superposición, podemos calcular  $V_A$ , como la suma de los aportes de cada fuente por separado. De esta forma, tomando los circuitos de las Figuras 5(a) y 5(b), obtenemos  $V_A$  como<sup>a</sup>:  $V_A(j\omega) = V_{A1}(j\omega) + V_{A2}(j\omega)$ . Para calcular  $V_{A1}$  y  $V_{A2}$ , observamos

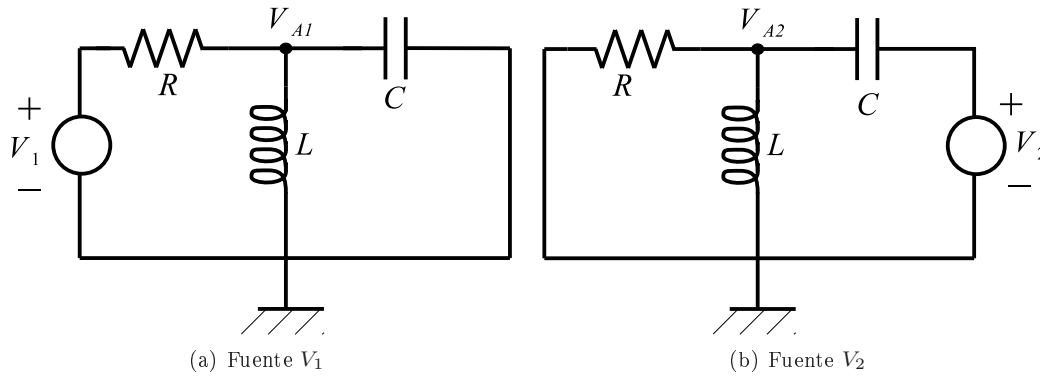


Figura 5:

que en ambos casos tenemos un divisor de tensión de la forma:

$$V_{A1} = V_1 \frac{Z_1}{R + Z_1} \quad \text{donde } Z_1 = j\omega L \parallel \left( \frac{1}{j\omega C} \right) \quad (1)$$

$$V_{A2} = V_2 \frac{Z_2}{\frac{1}{j\omega C} + Z_2} \quad \text{donde } Z_2 = j\omega L \parallel R \quad (2)$$

Luego teniendo en cuenta que  $V_1 = V$  y  $V_2 = V \angle \pi/2$ , y las ecuaciones (2) y (??), tenemos:

$$V_A(j\omega) = V \frac{Z_1}{R + Z_1} + V \angle \pi/2 \frac{Z_2}{\frac{1}{j\omega C} + Z_2} \Rightarrow V_A(j\omega) = \frac{(j\omega)L[1 - \omega RC]}{(j\omega)^2 LRC + j\omega L + R} V \quad (3)$$

- ii) Para que  $v_A(t) = 0$  para todo  $t$ , imponemos que  $V_A(j\omega) = 0$ , observando el resultado obtenido en (3), es fácil ver que para que  $v_A(t) = 0 \quad \forall t$ ,  $\omega = \frac{1}{RC}$

- (b) 1) Para las partes siguientes, se utilizan los valores:

$$V = 40 \text{ Volts}, \quad \omega = 2000 \text{ rad/seg}, \quad L = 10 \text{ mHy}, \quad R = 100 \Omega, \quad C = 10 \mu\text{F}$$

Con los datos anteriores, y utilizando la parte anterior, podemos calcular el valor de  $V_A = 12,6V \angle -108,4^\circ = (-3,98 - j11,95)V$ . Luego, podemos calcular el valor de los fasores  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ :

$$I_1 = \frac{V_R}{R} = \frac{(40 + 3,98 + j11,95)V}{100 \Omega} = 0,46A \angle 15,2^\circ \quad (4)$$

$$I_2 = \frac{V_C}{1/(j\omega C)} = j0,02 \frac{1}{\Omega} (j40 + 3,98 + j11,95)V = 1,04A \angle 175,6^\circ \quad (5)$$

$$I_3 = \frac{V_A}{j\omega L} = \frac{12,6V \angle -108,4^\circ}{20 \Omega \angle 90^\circ} = 0,63A \angle 161,6^\circ \quad (6)$$

<sup>a</sup>Observar que se puede realizar la suma directamente en fasores porque **las frecuencias de ambas fuentes son iguales**.

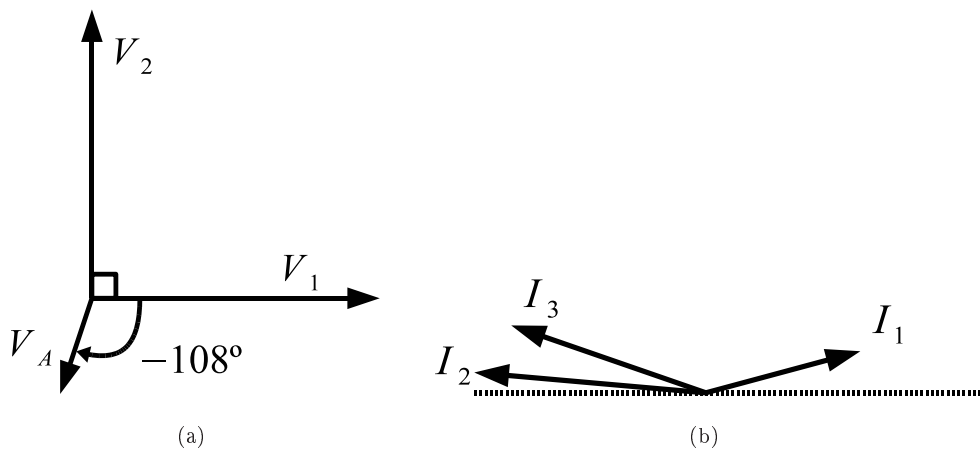


Figura 6: Diagramas fasoriales

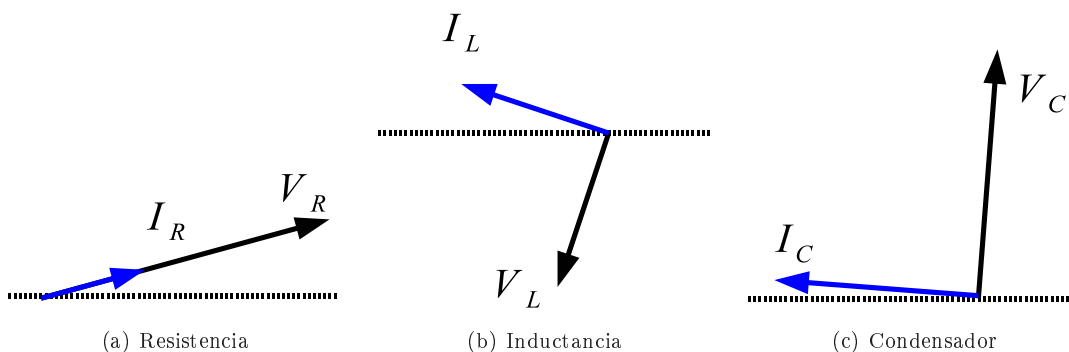
ii) Calculamos  $i_1(t)$ , recordando que  $i_1(t) = \text{Re} [I_1(j\omega)e^{j\omega t}]$

$$\Rightarrow \boxed{i_1(t) = 0,46A \cos(2000t + 0,27)}$$

(c) i) Utilizando las partes anteriores, podemos calcular fácilmente  $V_C$  y  $V_R$  como:

$$V_C = V_2 - V_A = (3,98 + j51,95)V = 52,10V \angle 85,6^\circ \tag{7}$$

$$V_R = V_1 - V_A = (43,98 + j11,95)V = 45,57V \angle 15,2^\circ \tag{8}$$



ii) Con los valores de tensión y corriente para cada componente, podemos calcular la potencia que consume cada elemento, utilizando:

$$S = \frac{V \bar{I}}{2} \quad P = \text{Re}[S] \quad Q = \text{Im}[S]$$

	Potencia Activa (W)	Potencia Reactiva (VAr)	Potencia Aparente (VA)
Resistencia	10,4	0	10,4
Inductancia	0	4	$j4$
Capacitor	0	-27,2	$-j27,2$

## Problema 2

- (a) Sea  $S(t) \in \mathcal{D}'$  una distribución periódica, de periodo  $T$ , tal que

$$S\left(t + \frac{T}{2}\right) = -S(t)$$

Dicha propiedad la cumple también la distribución  $\tilde{S}(s) \in \mathcal{D}'(\tau)$  que representa a  $S$  en un periodo. Definamos la pulsación  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Por definición de coeficiente de Fourier, tenemos que

$$c_n(S) = \frac{1}{T} \langle \tilde{S}(s), e^{-jn\omega s} \rangle = -\frac{1}{T} \langle \tilde{S}\left(t + \frac{T}{2}\right), e^{-jn\omega s} \rangle = -\frac{1}{T} \langle \tilde{S}(u), e^{-jn\omega(s - \frac{T}{2})} \rangle$$

donde en la última igualdad hemos realizado el cambio de variable  $u = s + \frac{T}{2}$ . Aplicando linealidad y considerando nuevamente la definición de coeficiente de Fourier, llegamos a que

$$c_n(S) = -\frac{1}{T} \cdot e^{jn\omega \frac{T}{2}} \langle \tilde{S}(u), e^{-jn\omega u} \rangle = -\frac{1}{T} \cdot e^{jn \frac{2\pi}{T} \frac{T}{2}} \langle \tilde{S}(u), e^{-jn\omega u} \rangle = (-1)^{n+1} \cdot c_n(S)$$

Por lo que para  $n$  par, se concluye que  $c_n(S) = 0$ .

- (b) Derivemos la función  $f$ , que se muestra en la figura 7(a) como distribución. Al ser  $f$  una función continua, su derivada como distribución ( $T'_f$ ) coincidirá con la distribución asociada a la derivada de  $f$  como función en los puntos donde es derivable  $T'_f$ . La gráfica de la figura 7(b) muestra que  $T'_f$  es la distribución asociada a una onda cuadrada que oscila entre los valores  $\pm \frac{4E}{T}$ . La derivada segunda de  $f$  como distribución se obtiene entonces derivando  $T'_f$ . Como  $T'_f$  es la distribución asociada a una función seccionalmente constante, tenemos que  $T''_f$  contiene sólo deltas de Dirac en los puntos de discontinuidad de la onda cuadrada. El resultado se muestra en la figura 7(c). La distribución de  $\mathcal{D}'(\tau)$  asociada a  $T''_f$  es

$$\tilde{T}''_f(s) = -\frac{8E}{T} \delta\left(s - \frac{T}{4}\right) + \frac{8E}{T} \delta\left(s - \frac{3T}{4}\right)$$

- (c) El respectivo coeficiente de Fourier es

$$\begin{aligned} c_n(T''_f) &= \frac{1}{T} \langle \tilde{T}''_f(s), e^{-jn\omega s} \rangle = \frac{8E}{T^2} \left[ -e^{jn\omega \frac{T}{4}} + e^{jn\omega \frac{3T}{4}} \right] \\ \Rightarrow c_n(T''_f) &= 2j \frac{8E}{T^2} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = (j)^n - \frac{8E}{T^2} - [1 - (-1)^n] \end{aligned}$$

Verificamos que los coeficientes pares se anulan, lo cual es coherente con lo visto en la parte (a). Además, observemos que

$$(j)^{4n+1} = j \quad , \quad (j)^{4n+3} = -j$$

- (d) De la propiedad de los coeficientes de Fourier para distribuciones

$$c_n(T') = (jn\omega)c_n(T)$$

obtenemos

$$c_n(f) = \frac{c_n(T''_f)}{-n^2\omega^2} = \frac{T^2 \cdot c_n(T''_f)}{-4n^2\pi^2}$$

El valor medio de  $f$  es cero, ya que el gráfico de  $f$  es simétrico respecto del eje de abscisas. Los coeficientes pares de  $f$  se anulan pues también lo hacen los de  $T''_f$ . Finalmente, los restantes coeficientes de Fourier valen

$$c_{4n+1}(f) = -j \frac{4E}{(4n+1)^2\pi^2} \quad , \quad c_{4n+3}(f) = +j \frac{4E}{(4n+3)^2\pi^2}$$

La potencia que *transportan* los primeros  $N$  armónicos de la señal  $f$  viene dada por

$$P_N = \sum_{n=-N}^{n=N} |c_n(f)|^2$$

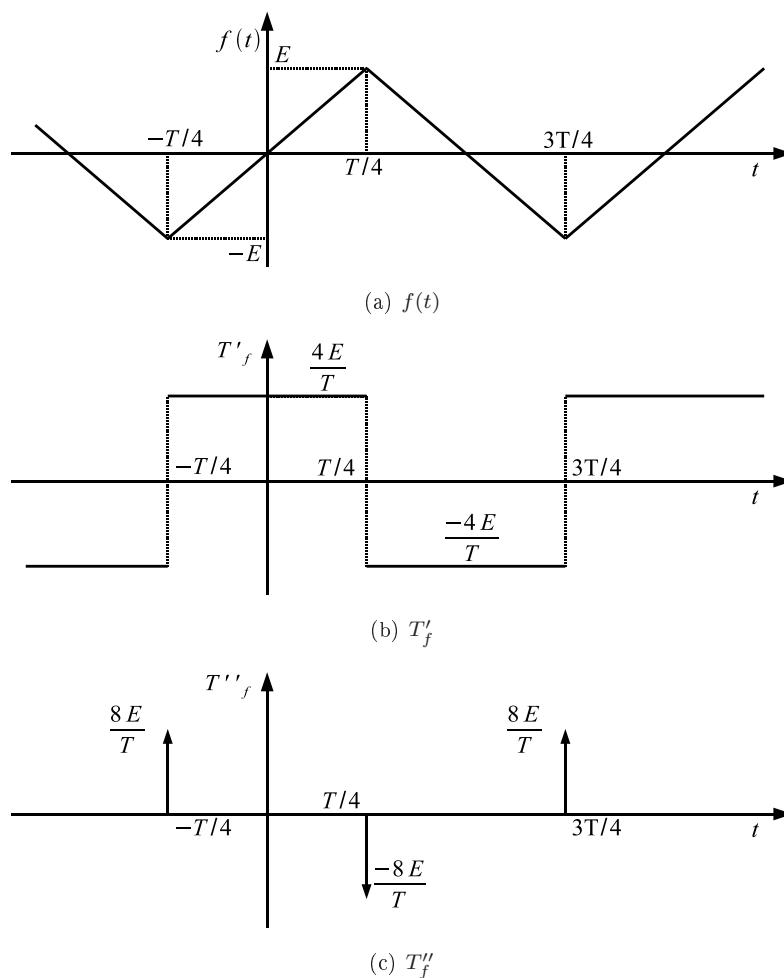


Figura 7:

Como  $f$  es una señal real, entonces  $|c_n| = |c_{-n}|$ , de donde

$$P_N = 2 \cdot \sum_{n=1}^{n=N} |c_n(f)|^2$$

Comencemos con el primer armónico.

$$P_1 = 2 \cdot |c_1(f)|^2 = 2 \cdot \frac{16E^2}{\pi^4} = 0,329E^2 = 98,5\%P_m$$

Como no hay armónicos pares,  $P_2 = P_1$ . Sigamos con  $P_3$ :

$$P_3 = 2 \cdot \left[ |c_1(f)|^2 + |c_3(f)|^2 \right] = 2 \cdot \frac{16E^2}{\pi^4} \left( 1 + \frac{1}{81} \right) = 99,77\%P_m$$

Entonces, necesitamos al menos hasta el tercer armónico.

- (e) El filtro pasabajos ideal *dejará pasar*<sup>b</sup> sólo las frecuencias menores a su frecuencia de corte  $\omega_c$ . Por lo tanto, para tener a la salida del filtro una señal cuya potencia media sea al menos el 99% de la potencia media de  $f(t)$ , de las infinitas frecuencias presentes en ésta, deberán pasar por lo menos la fundamental y el tercer armónico (ver parte d)). Entonces, se debe cumplir la relación

$$3\omega = \frac{6\pi}{T} < \omega_c$$

<sup>b</sup> *Dejar pasar* significa que estas frecuencias aparecerán a la salida con la misma amplitud que tienen a la entrada.

### Problema 3

- (a) Decimos que una sucesión  $T_n$  con  $T_n \in \mathcal{D}'$  converge a  $T \in \mathcal{D}'$  (y escribimos  $T = \lim_n T_n$ ) si y solo si  $\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow_n \langle T, \varphi \rangle \forall \varphi \in \mathcal{D}$ .
- (b) Observar que, dada  $\varphi \in \mathcal{D}$ , se tiene que:

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \left\langle \frac{\delta_{h_n} - \delta_{-h_n}}{2h_n}, \varphi \right\rangle = \frac{1}{2h_n} (\varphi(h_n) - \varphi(-h_n))$$

Y como  $h_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , el último término es un cociente incremental que tiende a  $\varphi'(0)$ , ya que  $\varphi$  es infinitamente derivable. Por lo tanto:

$$\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow_n \varphi'(0) = \langle -\delta', \varphi \rangle$$

Por lo que  $T = -\delta$ .

- (c) i) Sustituyendo  $T_n$  y aplicando propiedades de convolución:

$$T_n * S = \left( \frac{\delta_{h_n} + \delta_{-h_n}}{2h_n} \right) * S = \frac{1}{2h_n} (\delta_{h_n} * S) - \frac{1}{2h_n} (\delta_{-h_n} * S)$$

Utilizando que  $\delta_a * S = S(t - a)$  se tiene que:

- $\frac{1}{2h_n} (\delta_{h_n} * S)$  es un pulso de amplitud  $\frac{1}{2h_n} = \frac{n}{2}$  en el intervalo  $[-1 + 1/n, 1 + 1/n]$ .
- $\frac{1}{2h_n} (\delta_{-h_n} * S)$  es un pulso de amplitud  $\frac{1}{2h_n} = \frac{n}{2}$  en el intervalo  $[-1 - 1/n, 1 - 1/n]$ .

Al hacer la diferencia de las dos distribuciones anteriores obtenemos que  $R_n$  consiste en la distribución asociada a la función:

$$f(t) = \begin{cases} -n/2 & \text{si } t \in [-1 - 1/n, -1 + 1/n] \\ n/2 & \text{si } t \in [1 - 1/n, 1 + 1/n] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- ii) La distribución  $R$  puede hallarse pasando el límite en  $R_n$  obtenido en la parte anterior, o bien utilizando el hecho de que la convolución es una operación continua por lo que:

$$R = \lim_n R_n = \lim_n (T_n * S) = \left( \lim_n T_n \right) * S = -\delta' * S$$

Al ser  $\delta' * S = S' = \delta_{-1} - \delta_{+1}$  (la derivada como distribución de  $S$ ), se tiene que:

$$\boxed{R = -\delta_{-1} + \delta_{+1}}$$



### Problema 4

- (a) Calculando los fasores  $V_R$  y  $V_X$  obtenemos:

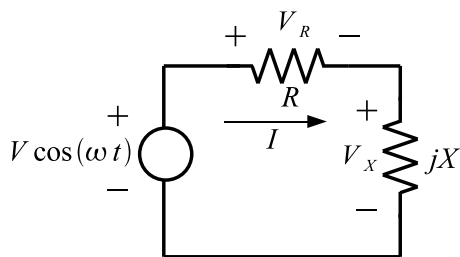


Figura 8:

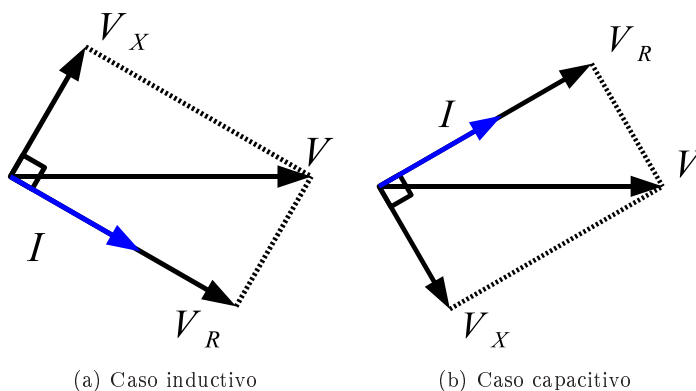
$$V_R = \frac{R}{R + jX} \quad V_X = \frac{jX}{R + jX}$$

Por lo que:

$$V_X = j \left( \frac{X}{R} \right) \frac{R}{R + jX} = j \left( \frac{X}{R} \right) V_R$$

Donde se ve claramente que  $V_R$  y  $V_X$  son perpendiculares.

- (b) En las Figuras 9(a) y 9(b) se muestra el diagrama fasorial para los distintos casos. Analizando



ambos diagramas se puede observar que en el caso de una impedancia inductiva, la corriente se atrasa con respecto al voltaje, mientras que en el caso de una impedancia capacitiva la corriente se adelanta. Por ultimo, en el caso de una resistencia, el voltaje y la tension son colineales, ya que  $V_R = RI$  donde  $R \in \mathbb{R}$ .

- (c) En fasores  $V = V_R + V_X$ , además de la parte a) sabemos que  $V_R$  es perpendicular a  $V_X$ . Obteniéndose el diagrama fasorial mostrado en la Figura 9, donde la línea continua representa el caso capacitivo y la punteada el inductivo.

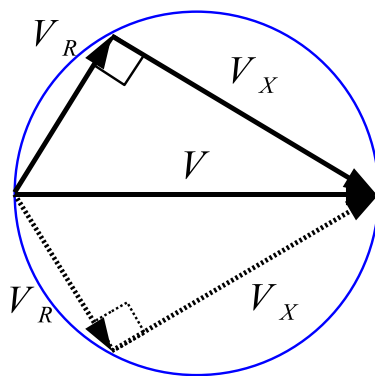


Figura 9:

Siguiendo el razonamiento anterior a medida que varía  $X$  entre  $(-\infty, +\infty)$ ,  $V_R$  va describiendo la curva tal que el vector  $V$  se ve bajo un ángulo de  $90^\circ$ , este lugar geométrico es por definición el arco capaz correspondiente al vector  $V$  y un ángulo de  $90^\circ$ , además al ser el ángulo de  $90^\circ$ ,  $V$  es un diámetro de dicha circunferencia. Por lo dicho anteriormente; el lugar geométrico de los extremos de  $V_R$  que se obtienen al variar  $X$  en todo su rango, es la circunferencia de centro  $V/2$  (sobre el eje real) y radio  $V/2$ .

## Problema 5

- (a) En el circuito de la Figura 10:

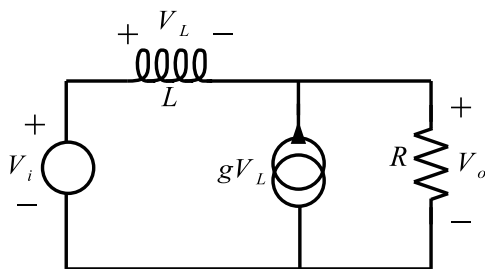


Figura 10:

La ecuación para el nudo queda:

$$v_o = RG \cdot v_L + R \cdot i_L \quad (9)$$

derivando la ecuación anterior, ( $RG = 1$ )

$$\frac{dv_o}{dt} = \frac{dv_L}{dt} + R \cdot \frac{di_L}{dt} = \frac{dv_L}{dt} + R \cdot \frac{v_L}{L}$$

Tomando la malla exterior, tenemos

$$v_L = v_i - v_o$$

Sustituyendo,

$$\frac{dv_o}{dt} = \frac{dv_i}{dt} - \frac{dv_o}{dt} + R \cdot \frac{v_i - v_o}{L} \Rightarrow \boxed{2 \frac{dv_o}{dt} + R \frac{v_o}{L} = \frac{dv_i}{dt} + R \frac{dv_i}{dL}}$$

- (b) Si definimos los operadores  $D_1 = 2 \frac{d}{dt} + \frac{R}{L}$  y  $D_2 = \frac{d}{dt} + \frac{R}{L}$  tenemos que  $D_1(v_o) = D_2(v_i)$ , que por propiedades de la convolución y la  $\delta$ , es lo mismo que  $D_1(\delta) * v_o = D_2(\delta) * v_i$ . Por lo tanto tenemos:

$$\boxed{T = 2\delta' + \frac{R}{L}\delta \quad \text{y} \quad S = \delta' + \frac{R}{L}\delta}$$

- (c) La respuesta al impulso será  $T^{-1} * S$  pues  $v_o = T^{-1} * S * v_i$ . Hallemos  $T^{-1}$ , por el teorema de la inversa,  $T^{-1}$  será de la forma  $T^{-1} = Y(t)f(t)$  con  $f \in C^\infty$  y que cumple la ecuación diferencial  $2f' + \frac{R}{L}f = 0$  con condiciones iniciales  $f(0) = \frac{1}{2}$ . Resolviendo la ecuación diferencial obtenemos,  $f(t) = A e^{-\frac{R}{2L}t}$  y al plantear condiciones iniciales obtenemos  $A = \frac{1}{2}$ . Por lo tanto

$$T^{-1} = Y(t) \frac{e^{-\frac{R}{2L}t}}{2}$$

Ahora debemos convolucionar  $T^{-1}$  con S:

$$\begin{aligned} T^{-1} * S &= Y(t)f(t) * \left( \delta' + \frac{R}{L}\delta \right) = \frac{dY(t)f(t)}{dt} + \frac{R}{L}Y(t)f(t) \\ &= f(0)\delta + Y(t)f'(t) + \frac{R}{L}Y(t)f(t) = \frac{\delta}{2} + Y(t) \left( -\frac{R}{4L}e^{-\frac{R}{2L}t} + \frac{R}{2L}e^{-\frac{R}{2L}t} \right) \\ &\Rightarrow \boxed{h(t) = \frac{\delta}{2} + Y(t) \frac{R}{4L}e^{-\frac{R}{2L}t}} \end{aligned}$$

- (d) i) Para hallar la respuesta al escalón, hay que convolucionar la respuesta al impulso hallada en la parte anterior con el escalón:

$$\begin{aligned} h(t) * 1V \cdot Y(t) &= 1V \left( \frac{\delta}{2} * Y(t) + Y(t) \frac{R}{4L} e^{-\frac{R}{2L}t} * Y(t) \right) \\ &= 1V Y(t) \left( \frac{1}{2} + \frac{R}{4L} \int_0^t e^{-\frac{R}{2L}u} du \right) = 1V Y(t) \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\frac{R}{2L}t} \Big|_0^t \right) = 0,5V \cdot Y(t) (2 - e^{-\frac{R}{2L}t}) \end{aligned}$$

- ii) Al igual que en la parte anterior, realizamos la convolución entre la entrada y  $h(t)$ :

$$\begin{aligned} h(t) * v_i(t) &= \frac{v_i(t)}{2} + \frac{R}{4L} \cdot Y(t) e^{-\frac{R}{2L}t} * v_i(t) \\ Y(t) e^{-\frac{R}{2L}t} * v_i(t) &= Y(t) \int_0^t e^{-\frac{R}{2L}u} e^{-\frac{R}{2L}(t-u)} du = Y(t) e^{-\frac{R}{2L}t} \int_0^t du = Y(t) t \cdot e^{-\frac{R}{2L}t} \\ &\Rightarrow \boxed{v_o = 0,5V Y(t) e^{-\frac{R}{2L}t} \left( 1 + \frac{R}{2L}t \right)} \end{aligned}$$