Sistemas Lineales 1

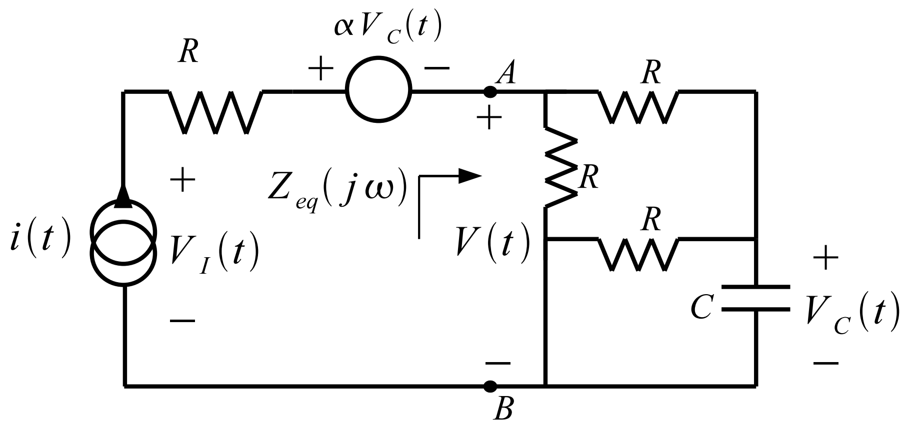
Primer Parcial, 19 de mayo de 2006

Recomendaciones generales:

- Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.
- En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.
- SEA PROLIJO Y EXPLIQUE Y DETALLE BIEN TODOS SUS PASOS. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.
- HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.
- PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.
- Se recuerda que la prueba es individual.
- Al finalizar, colocar las hojas dentro del sobre amarillo y entregarlo al docente del salón.

Problema 1 (11 puntos)

El circuito lineal de la figura está excitado por una fuente de corriente sinusoidal de valor $i(t)$ y contiene también una fuente de tensión dependiente que entrega una tensión proporcional a la tensión en bornes del condensador ($\alpha \in \mathcal{R}$).



(a) Hallar la impedancia equivalente $Z_{eq}(j\omega)$ entre los puntos A y B.

(b) Hallar la relación en régimen entre las tensiones $V_c(j\omega)$ y $V(j\omega)$.

(c) Hallar la transferencia en régimen $G(j\omega) = \dfrac{V_c(j\omega)}{I(j\omega)}$.

(d) I) Hallar la transferencia en régimen $H(j\omega) = \dfrac{V_I(j\omega)}{I(j\omega)}$. **La salida del sistema será la tensión en bornes de la fuente.**

II) Mostrar que puede escribirse de la forma $H(j\omega) = K\,R\,\dfrac{(j\omega + a_1)}{(j\omega + a_2)}$, hallando las constantes K, a_1 y a_2.

III) Hallar el valor de α tal que $a_1 = 10a_2$, **de ahora en más se trabajara con dicho valor de α.**

(e) I) Hallar las respuestas en régimen del sistema para $i_1(t) = A\cos(a_2\,t)$ y $i_2(t) = A\cos\left(\sqrt{10}\cdot a_2 t + \frac{\pi}{4}\right)$.

II) Deducir que existe al menos una frecuencia que excitación a la cual el sistema introduce a la salida un retraso de 50º.

Problema 2 (6 puntos)

Sea $\varphi(x)$ una función par del espacio $\mathcal{D}$, de área A, con $\varphi(0) = b$, como se indica en la Figura 1. Sea $\phi(x, y, z) = \varphi(x).\varphi(y).\varphi(z)$.

(a) **Indicar y justificar** si las distribuciones siguientes están bien definidas:

I) $T(x, y, z) = 1_x \otimes \delta_y \otimes Y(z)$

II) $S(x) = 1_x * \delta_x * Y(x)$

(b) En los casos posibles, calcular:

I) $\langle T(x, y, z), \phi(x, y, z)\rangle$

II) $\langle \frac{\partial T}{\partial x}, \phi(x, y, z)\rangle$

III) $\langle \frac{\partial T}{\partial z}, \phi(x, y, z)\rangle$

IV) $\langle S'(x), \varphi(x)\rangle$

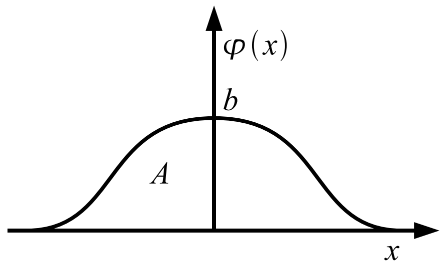
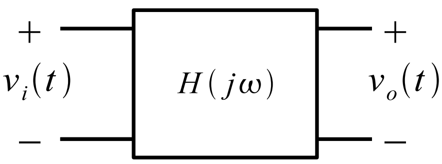


Figura 1: Bosquejo de $\varphi(x)$

Problema 3 (8 puntos)

(a) Se considera un circuito eléctrico lineal invariante en el tiempo, con entrada $v_i(t)$ y salida $v_o(t)$.

En régimen sinusoidal, dicho sistema puede describirse por su función de transferencia $H(j\omega) = \dfrac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$, con $V_o(j\omega)$ y $V_i(j\omega)$ fasores asociados a la salida y la entrada respectivamente. Para el caso de $v_i(t)$ periódica, de pulsación $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, dada por su serie de Fourier $v_i(t) = \sum_{n\in Z} C_n e^{jn\omega_0 t}$, hallar **justificando detalladamente** la serie de Fourier de la salida en régimen $v_o(t)$.



(b) Sean dos circuitos con funciones de transferencia respectivas $H_1(j\omega)$ y $H_2(j\omega)$ que verifican:

$$|H_1(j\omega)| = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \frac{3}{2}\omega_0 \\ \\ 0 & |\omega| \geq \frac{3}{2}\omega_0 \end{cases} \qquad |H_2(j\omega)| = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \frac{7}{2}\omega_0 \\ \\ 0 & |\omega| \geq \frac{7}{2}\omega_0 \end{cases}$$

Si a ambos circuitos se aplica a la entrada la misma señal periódica $v_i(t)$, ¿en cuál esperaría tener una señal de salida con mayor potencia media? **Justificar.**

(c) Si la $v_i(t)$ de la Figura 2 se aplica a la entra de ambos circuitos, calcular las potencias medias de las respectivas salidas.

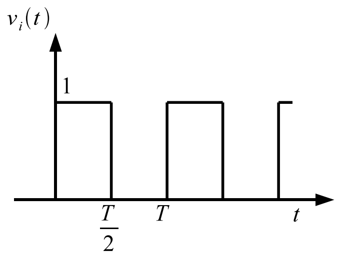


Figura 2: Señal de entrada

Problema 4 (9 puntos)

Se modela una **fuente real** en régimen sinusoidal como una **fuente ideal** de tensión V_s en serie con una impedancia $Z_s = R_s + jX_s$. Dicha fuente alimenta una carga Z_L a través de un transformador simple, tal como se muestra en la Figura 3.

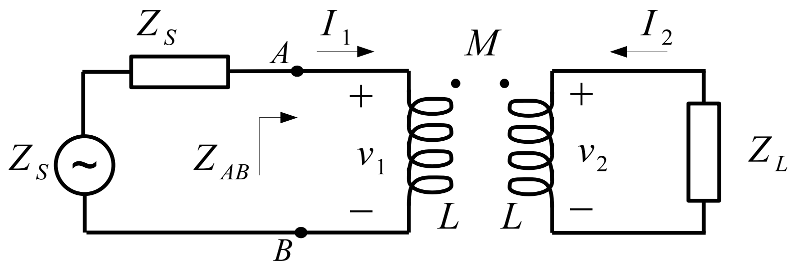


Figura 3:

(a) Hallar la impedancia vista por la fuente real, es decir, la impedancia Z_{AB} señalada en la Figura 3.

(b) Simplificar la expresión anterior para el caso de un transformador perfecto (**esta hipótesis se mantendrá para el resto del ejercicio.**) Escribir Z_{AB} como el paralelo de dos impedancias.

(c) Para una carga resistiva $Z_L = R$ y asumiendo que $X_s < 0$, hallar los valores de R y L que maximizan la potencia entregada por la **fuente real**.

(d) Considerando nuevamente una carga $Z_L = R$, compensar la potencia reactiva consumida a la **fuente real.** Indicando claramente qué elemento colocaría, dónde lo haría y qué valor tendría.

Problema 5 (6 puntos)

(a) Probar que la convolución entre una distribución periódica y una distribución se soporte acotado está bien definida.

(b) Probar que la convolución entra una distribución periódica y una distribución de soporte acotado es periódica.

(c) Sea P el puso de ancho T y sea S el tren de pulsos de ancho T y periodo $2T$ (ver Figura 4). Hallar las serie de Fourier de $P * S$ (**sugerencia:** usar que toda distribución periódica se pueden ver como la convolución entre una de soporte acotado y un tren de impulsos).

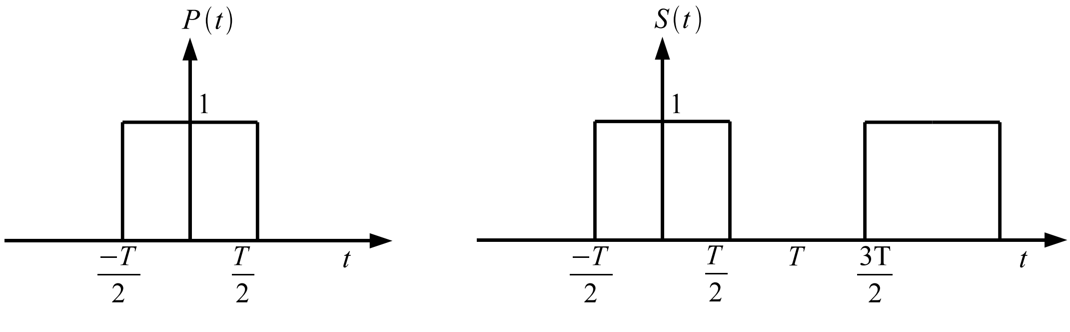


Figura 4:

Solución

Problema 1

(a) Si observamos el circuito de la Figura 5, podemos ver que la impedancia equivalente consiste:

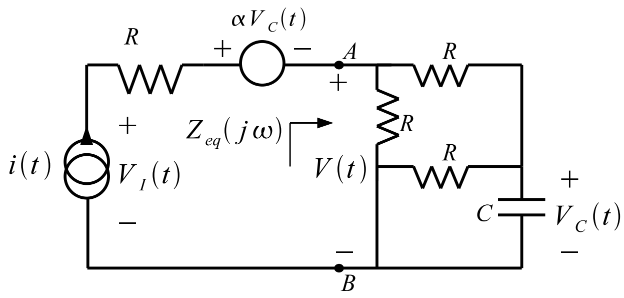


Figura 5:

$$Z_{eq}(j\omega) = R \| \left(R + R \| \frac{1}{j\omega C} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_{eq} = \frac{R[RCj\omega + 2]}{2RCj\omega + 3}}$$

(b) Planteando el divisor de tensiones, obtenemos:

$$V_c(j\omega) = \frac{R\|1/j\omega C}{R + R\|1/j\omega C} V(j\omega) \;\Rightarrow\; \boxed{V_c(j\omega) = \frac{V(j\omega)}{RCj\omega + 2}}$$

(c) De la definición de impedancia equivalente, $Z_{eq} = \frac{V}{I}$. Eliminando $V(j\omega)$ en función de $V_c(j\omega)$ utilizando la parte anterior, resulta:

$$Z_{eq} = \frac{V_c(j\omega)[RCj\omega + 2]}{I} \;\Rightarrow\; \frac{V_c}{I} = \frac{Z_{eq}}{RCj\omega + 2} \;\Rightarrow\; \boxed{G(j\omega) = \frac{R}{2RCj\omega + 3}}$$

(d) I) Planteando la ley de mallas de Kirchoff, se tiene:

$$V_i = [R + Z_{eq}]I + \alpha V_c = [R + Z_{eq} + \alpha G]\, I \;\Rightarrow\; H(j\omega) = R + Z_{eq} + \alpha G$$

Utilizando las partes anteriores y desarrollando los términos, se obtiene:

$$\Rightarrow \boxed{H(j\omega) = R\frac{[3RCj\omega + 5 + \alpha]}{2RCj\omega + 3}}$$

II) Reescribiendo,

$$H(j\omega) = \frac{3}{2}R \left[\frac{j\omega + \dfrac{5+\alpha}{3RC}}{j\omega + \dfrac{3}{2RC}} \right] \;\Rightarrow\; \begin{cases} K = \dfrac{3}{2} \\ a_1 = \dfrac{5+\alpha}{3RC} \\ a_2 = \dfrac{3}{2RC} \end{cases}$$

III) Si $a_1 = 10a_2$ tenemos que,

$$\frac{5+\alpha}{3RC} = \frac{15}{RC} \;\Rightarrow\; \boxed{\alpha = 40}$$

(e) I) Si $i_1(t) = A\cos(a_2\, t) \;\Rightarrow\; v_1(t) = A|H(ja_2)|\cos(a_2\, t + arg(H(ja_2)))$, como:

$$H(ja_2) = \frac{3}{2}R\frac{ja_2 + 10\, a_2}{ja_2 + a_2} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{101}{2}}R\angle - 39{,}3^{\text{o}}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_1(t) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{101}{2}}AR\cos(a_2\, t - 39{,}3^{\text{o}})}$$

II) De manera análoga,

$$v_2(t) = A|H(j\sqrt{10}a_2)|\cos\left(\sqrt{10}a_2\,t + \frac{\pi}{4} + arg(H(j\sqrt{10}a_2))\right)$$

$$H(j\sqrt{10}a_2) = \frac{3}{2}R\sqrt{\frac{101}{11}}\angle -55^{\text{o}} \;\Rightarrow\; \boxed{v_2(t) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{101}{11}}AR\cos\left(\sqrt{10}a_2\,t - 10^{\text{o}}\right)}$$

III) El retardo introducido por el sistema a cierta frecuencia ω es igual a $R(\omega) = -arg(H(j\omega))$, en este caso,

$$R(\omega) = -arctg\left(\frac{\omega}{10a_2}\right) + arctg\left(\frac{\omega}{a_2}\right)$$

Observando $R(\omega)$ podemos ver que es una función continua en ω, además de la parte anterior, sabemos que:

$$\left.\begin{array}{r} R(a_2) = 39{,}3^{\text{o}} \\ R(\sqrt{10}a_2) = 55^{\text{o}} \end{array}\right\} \Rightarrow\; \exists\;\omega^* \text{ tal que } R(\omega^*) = 50^{\text{o}} \text{ y } \omega^* \in [a_2, \sqrt{10}a_2]$$

Problema 2

(a) I) $T(x,y,z) = 1_x \otimes \delta_y \otimes Y(z)$ esta bien definida, ya que el producto tensorial de distribuciones existe siempre. Para un número finito de distribuciones se calcula valiendo la propiedad asociativa.

II) $S(x) = 1_x + \delta_x + y(x)$ no esta definido, ya que no existe el producto convolución de 1_x y $Y(x)$; $\left(1_x * Y(x) = \int_{-\infty}^{t} dt > \infty\right)$. Además observar que el $sop\{1_x\} = \mathcal{R}$ y $sop\{Y(x)\} = [0,+\infty)$, por lo tanto, si tomamos $x_1 \in sop\{1_x\}$ y $x_2 \in sop\{y(x)\}$ la acotación de $x_1 + x_2$ no implica x_1 acotado y x_2 acotado.[b]

(b) I) De la definición de T y ϕ dadas en la letra, tenemos:

$$\langle T(x,y,z) = \phi(x,y,z)\rangle = \langle 1_x \otimes \delta_y \otimes Y(z), \varphi(x).\varphi(y).\varphi(z)\rangle$$

$$= \langle 1_x, \varphi(x)\rangle.\langle \delta_y, \varphi(y)\rangle.\langle Y(z), \varphi(z)\rangle$$

$$\langle 1_x, \varphi(x)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = A \text{ (Area de } \varphi(x))$$

$$\langle \delta_y, \varphi(y)\rangle = \varphi(0) = b$$

$$\langle Y(z), \varphi(z)\rangle = \int_{0}^{\infty} \varphi(z)dz = \frac{A}{2}$$

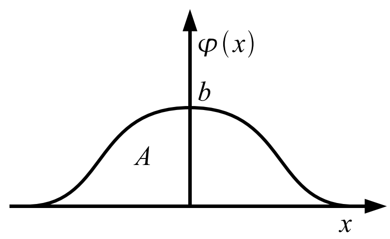


Figura 6:

$$\Rightarrow \boxed{\langle T(x,y,z), \phi(x,y,z)\rangle = \frac{A^2 b}{2}}$$

II) En segundo lugar, calculamos:

$$\langle \frac{dT(x,y,z)}{dx}, \phi(x,y,z)\rangle = -\langle 1_x \otimes \delta_y \otimes Y(z), \varphi'(x)\varphi(y)\varphi(z)\rangle =$$

$$= \langle 1_x, \varphi'(x)\rangle.\langle \delta_y, \varphi(y)\rangle.\langle Y(z), \varphi(z)\rangle \text{ pero } \langle 1_x, \varphi'(x)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(x)|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \frac{dT(x,y,z)}{dx}, \phi(x,y,z)\rangle = 0}$$

[b] Para más detalles, se sugiere revisar las notas de teórico, pag 61.

III) Tenemos:

$$\langle \frac{dT(x,y,z)}{dz}, \phi(x,y,z)\rangle = -\langle 1_x \otimes \delta_y \otimes Y(z), \varphi(x)\varphi(y)\varphi'(z)\rangle = \langle 1_x, \varphi(x)\rangle . \langle \delta_y, \varphi(y)\rangle . \langle Y(z), \varphi'(z)\rangle$$

$$\langle Y(z), \varphi'(z)\rangle = \int_0^{+\infty} \varphi'(z)dz = -b \Rightarrow \boxed{\langle \frac{dT(x,y,z)}{dz}, \phi(x,y,z)\rangle = Ab^2}$$

IV) S' no está definida pues S no lo está.

Problema 3

(a) Como el sistema es lineal e invariante en el tiempo, la respuesta a la entrada periódica $v_i(t) = \sum_{n\in Z} C_n e^{jn\omega_0 t}$ es igual a la suma de las respuestas correspondientes a las entradas $C_n e^{jn\omega_0 t}, n \in Z$. A estas términos sinusoidales de frecuencia $n\omega_0$, se les puede asociar el fasor C_n, por lo cual el fasor asociado a cada salida será $H(jn\omega_0).C_n$. Usando el principio de superposición, obtenemos que la salida en régimen resulta[a]:

$$\boxed{v_o(t) = \sum_{n\in Z} H(jn\omega_0) C_n e^{jn\omega_0 t}}$$

(b) Para el sistema $H_1(j\omega)$, se cumple que el producto $H_1(jn\omega_0).C_n = 0$ para todo $n > 3/2$, es decir, solo se obtendrán a la salida, los términos con $n = -1, 0, 1$. De modo que el sistema solo dejará pasar la componente de continua de v_i y su primer armónico. Mediante un razonamiento análogo, el sistema $H_2(j\omega)$ dejará pasar hasta el tercer armónico inclusive. Finalmente, podemos relacionar la potencia a la salida, con la cantidad de armónicos, utilizando el teorema de Parseval, que nos permite calcular la potencia media de la señal a la salida como:

$$P_m = \sum_{n\in Z} |H(jn\omega_0).C_n|^2 \qquad (1)$$

Si observamos la ecuación (1), podemos observa que todos los términos son mayores o iguales que cero; de modo que el filtro que deje pasar más armónicos tendrá una potencia mayor a la salida, pues la suma tendrá más términos. En este caso, H_2 dejara pasar más potencia a la salida que H_1.

(c) Sea $v_i(t)$ como se muestra en la Figura 7. Usando la parte anterior, y con los coeficientes de

Calculemos los coeficientes de Fourier de la tensión $v_i(t)$:

$$C_0 = \frac{1}{2} \quad C_n = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j\frac{n2\pi}{T}t} dt$$

Resolviendo dicha integral, y evaluando, obtenemos:

$$\Rightarrow \begin{cases} C_0 = \dfrac{1}{2} \\ C_n = 0 \text{ si } n \text{ es par } \neq 0 \\ C_n = \dfrac{1}{jn\pi} \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

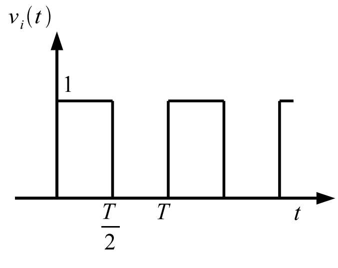


Figura 7: Señal de entrada

Fourier calculados, obtenemos la potencia a la salida de cada uno de los sistemas:

- Para el sistema con transferencia $H_1(j\omega)$, obtenemos:

$$P_{m1} = |H_1(j0)|^2|C_0|^2 + 2(|H_1(j\omega_0)|^2|C_1|^2) \Rightarrow \boxed{P_{m1} = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2}}$$

[a] observar que obtenemos la salida como una suma, que coincide con la serie de Fourier de la señal periódica $v_o(t)$

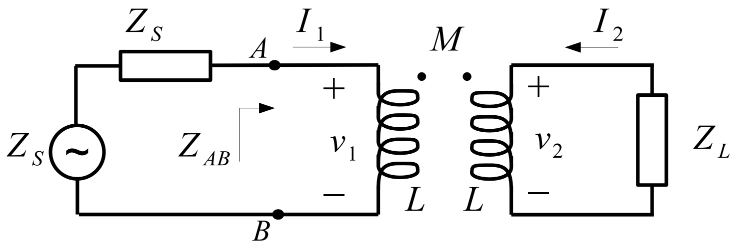
- Análogamente para el sistema con transferencia $H_2(j\omega)$,

$$P_{m2} = |H_2(j0)|^2|C_0|^2 + 2(|H_2(j\omega_0)|^2|C_1|^2) + 2(|H_2(j3\omega_0)|^2|C_3|^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{m2} = \frac{1}{4} + 2\left[\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2}\right]} \quad P_{m2} > P_{m1} \text{ como era de suponer.}$$

Problema 4

(a) Planteando las ecuaciones para el transformador simple, obtenemos:



$$\begin{cases} V_1 = Lj\omega\, I_1 + Mj\omega I_2 \\ V_2 = Lj\omega\, I_2 + Mj\omega I_1 \end{cases}$$

En el secundario, tenemos $V_2 = -Z_L I_2$

Figura 8:

$$\Rightarrow V_1 = Lj\omega I_1 - \frac{Mj\omega}{Z_L}V_2 \quad \text{y} \quad V_2\left[1 + \frac{Lj\omega}{Z_L}\right] = Mj\omega I_1 \tag{2}$$

Con las ecuaciones obtenidas en (2) podemos eliminar V_2 obteniendo:

$$V_1 = \left[Lj\omega - \frac{(Mj\omega)^2}{Z_L + Lj\omega}\right] I_1 \Rightarrow \boxed{Z_L = \frac{Z_L Lj\omega + (Lj\omega)^2 - (Mj\omega)^2}{Z_L + Lj\omega}} \tag{3}$$

(b) Si el transformador es perfecto $\Rightarrow$ $M = L$ y la impedancia calculada en (3) queda:

$$\boxed{Z_v = \frac{Z_L Lj\omega}{Z_L + Lj\omega} = Z_L \| Lj\omega}$$

(c) La potencia activa entregada por al fuente real, debe ser igual a la consumida por $Z_A B$, donde para las relaciones dadas en la letra tenemos:

$$Z_{AB} = \frac{RLj\omega}{R + Lj\omega} = \frac{R(L\omega)^2 + jR^2(L\omega)}{R^2 + (L\omega)^2}$$

Sabemos que la potencia consumida por dicha impedancia es máxima cuando $Z_{AB} = \bar{Z_S} = R_S - jX_S$. Imponiendo dicha condición, obtenemos:

$$\frac{L\omega}{R} = -\frac{R_s}{X_s} \Rightarrow L\omega = -\frac{R\,R_s}{X_S} \tag{4}$$

Igualando partes reales:

$$R(L\omega)^2 = R_s(R^2 + (L\omega)^2 \tag{5}$$

Utilizando (4) y (5) obtenemos:

$$\boxed{R = R_s\left[\frac{X_s^2}{R_s^2} + 1\right]} \qquad \boxed{L = -\frac{R_s}{\omega}\left[\frac{X_s}{R_s} + \frac{R_s}{X_s}\right]}$$

(d) Trabajamos con el circuito equivalente mostrado en la Figura 9.

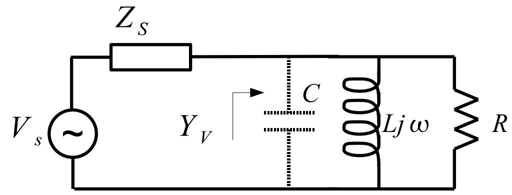


Figura 9: Circuito equivalente

Compensamos con un condensador en paralelo, de manera tal que la admitancia vista por la fuente real sea puramente resistiva.

$Y_V = Cj\omega + \frac{1}{Lj\omega} + \frac{1}{R}$ imponiendo que sea real $\Rightarrow$ $\boxed{C = \frac{1}{L\omega^2}}$

Problema 5

(a) Sea T distribución periódica y S distribución de soporte acotado.

$$\langle T(t) * S(t), \varphi(t)\rangle = \langle T_x \otimes S_y, \varphi(x+y)\rangle = \langle T_x, \langle S_y, \varphi(x+y)\rangle\rangle$$

Luego $\theta(x) = \langle S_y, \varphi(x+y)\rangle$ es de soporte acotado, pues si $sop\{S\} \subseteq [a,b]$ y $sop\{\varphi\} \subseteq [c,d]$ $\Rightarrow$ $\theta(x) = 0$ si $x \in [c-a, d-b]^c$, entonces $\langle T_x, \theta(x)\rangle$ está bien definida y consecuentemente $T(t) * S(t)$

(b) Planteando la convolución entre T y S tenemos,

$$\langle T(t) * S(t), \varphi(t)\rangle = \langle T_x \otimes S_y, \varphi(x+y)\rangle = \langle S_y \otimes T_x, \varphi(x+y)\rangle = \langle S_y, \langle T_x, \varphi(x+y)\rangle\rangle$$

Luego como T es periódica, de periodo τ:

$$\langle S_y, \langle T_x, \varphi(x+y)\rangle\rangle = \langle S_y, \langle T_x, \varphi(x+n\tau+y)\rangle\rangle = \langle T_x \otimes S_y, \varphi(x+n\tau+y)\rangle = \langle T(t)*S(t), \varphi(t+n\tau)\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{T * S \text{ es periodica de periodo } \tau}$$

(c) Notar que $S(t)$ puede escribirse como:

$$S(t) = \sum_{n\in Z} P(t - n2T) = P(t) * \sum_{n\in Z} \delta(t - n2T)$$

$$\Rightarrow P * S = P * \left(P * \sum_{n\in Z} \delta(t-n2T)\right) =^{c} (P*P) * \sum_{n\in Z} \delta(t-n2T)$$

Observa que $P * P$ tienen un gráfico como el que se muestra en la Figura 11, que se obtiene

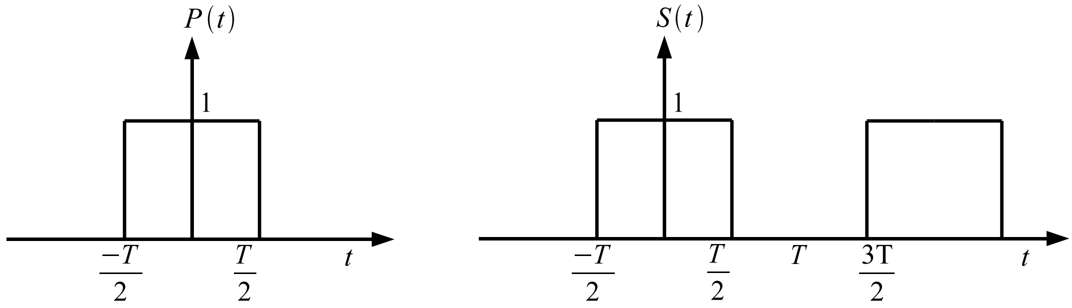


Figura 10:

tras aplicar la convolución entre dos pulsos como los de la Figura 10. Una vez calculado $P * P$, al convolucionar con el tren de deltas, extendemos de manera periódica la distribución calculada. Por ultimo, para calcular los coeficientes de fourier de la distribución $P * S$ (que se muestra en la Figura 11), derivamos dos veces dicha distribución, obteniendo:

$$(P * S)'' = 2 \sum_{n\in Z} (-1)^{n+1} \delta(t - nT)$$

[c] pues $P(t)$ es de soporte acotado

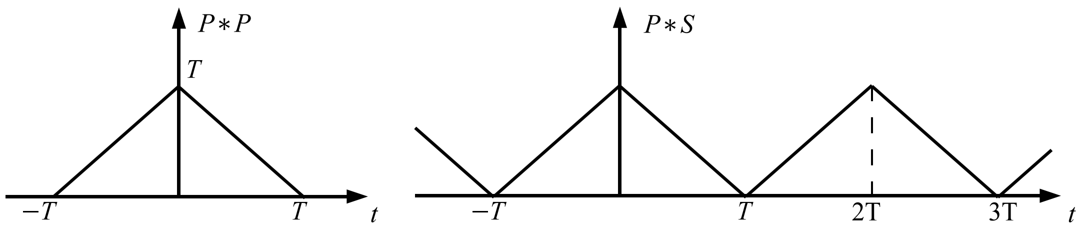


Figura 11:

Los coeficientes de Fourier de la distribución $(P*S)''$ resultan:

$$c_n(P*S)'' = \frac{1}{2T}\langle -2\delta(\tau) + 2\delta(\tau - T), e^{-j\frac{2\pi n\tau}{2T}} \rangle = \frac{1}{T}((-1)^n - 1)$$

Por otro lado, recordando la propiedad $c_n(P*S)'' = \left(\frac{jn2\pi}{2T}\right)^2 c_n(P*S)$ obtenemos:

$$\Rightarrow \ c_n(P*S) = \frac{T}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n) \ \ n \neq 0, \ \ c_0 = \frac{T}{2} \text{ (valor medio)}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_n(P*S) = \begin{cases} \frac{T}{2} & n = 0 \\ 0 & n \text{ par } \neq 0 \\ \frac{2T}{n^2\pi^2} & n \text{ impar} \end{cases}} \qquad \boxed{P*S = \frac{1}{2T}\sum_{n\in Z} c_n(P*S)e^{j\frac{n2\pi t}{2T}}}$$