Sistemas Lineales 1

Primer Parcial, 12 de mayo de 2005

Recomendaciones generales:

- Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.
- En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.
- SEA PROLIJO Y EXPLIQUE Y DETALLE BIEN TODOS SUS PASOS. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.
- HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.
- PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.
- Se recuerda que la prueba es individual.
- Al finalizar, colocar las hojas dentro del sobre amarillo y entregarlo al docente del salón.

Problema 1 (11 puntos)

Se consideta el diente de sierra que se muestra en la Figura 1.

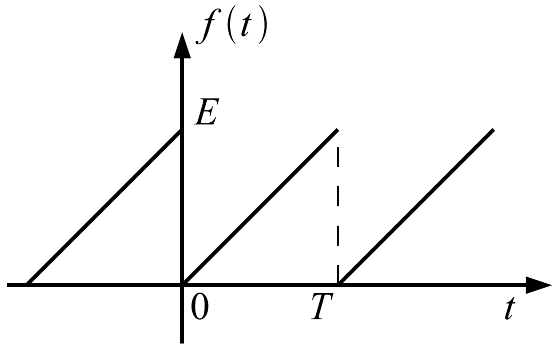


Figura 1:

(a) Hallar el valor medio de $f(t)$

(b) Hallar $T''(t)$, la derivada segunda de la distribución asociada al diente de sierra, (se sugiere graficarla).

(c) Hallar $c_n(T'')$, los coeficientes de Fourier de T''.

(d) Usando a parte b, hallar los coeficientes de Fourier $c_n(T)$ del diente de sierra.

(e) Verificar el resultado calculando $c_n(T)$ mediante integración directa.

(f) Calcular la suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Nota: Se recuerda la formula de integración por partes

$$\int_a^b f(t)g'(t) = f(t)g(t)|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)$$

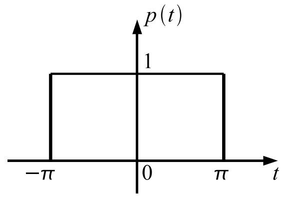
Problema 2 (6 puntos)

(a) **Usando las definiciones de derivada de una distribución, del producto convolución y del producto tensorial de dos distribuciones**, mostrar la identidad: $(T * S)' = T * S'$

(b) I) Mostrar que $\langle T(t-a), \varphi(t)\rangle = \langle T(t), \varphi(t+a)\rangle$

II) Probar que $T(t) * \delta(t-a) = T(t-a)$

(c) Se consideran las siguientes tres distribuciones: $T(t) = T_f(t)$, $S(t) = T_g(t)$, $R(t) = \delta'(t)$, siendo $f(t) = \sin(t)$ y $g(t) = p(t)$.

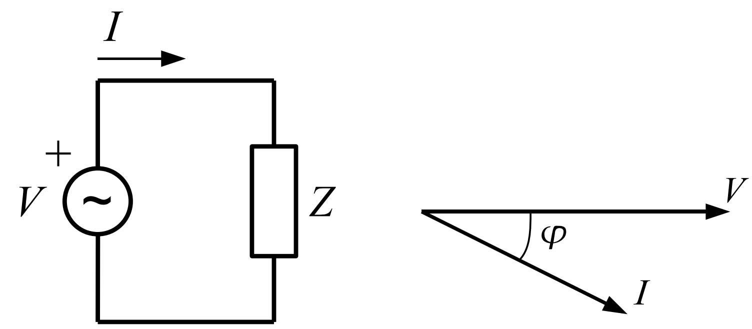


I) Calcular $T * (R * S)$, $(T * R) * S$

II) ¿Se cumple la asociativa?

Problema 3 (9 puntos)

Se considera el circuito de al Figura 2, en régimen sinusoidal donde un generador alimenta una carga **variable** $Z = R + jX$. En cierto punto de trabajo, $Z = R_0 + jX_0$, se tiene un diagrama fasorial $V - I$ como en la Figura 2 y la carga consume potencias P_0 y Q_0.



(a) Circuito (b) Diagrama fasorial

Figura 2:

(a) I) Teniendo en cuenta la posible variación de Z, hallar el lugar geométrico del extremo del fasor I cuando la potencia activa es constante igual a P_0. **Justificar claramente los argumentos utilizados para su construcción**.

II) Repetir la parte anterior cuando la potencia reactiva es constante igual a Q_0.

(b) I) Calcular el valor de la impedancia Z_1 en función de R_0 y X_0, a conectar **en paralelo** con el generador y que cumpla:

- que **la potencia activa suministrada por la fuente siga siendo P_0.**
- que **la corriente suministrada por la fuente sea mínima.**

II) ¿La impedancia Z_1 deberá ser sélfica o capacitiva?

Problema 4 (14 puntos)

Se considera el circuito de la Figura 3 en régimen sinusoidal donde las fuentes son de **diferente** frecuencia ω_1 y ω_2. Sean V_1 el voltaje en bornes de la fuente de corriente, I_{L1} la corriente por la bobina L_1, V_C el voltaje en bornes del condensador e I_R la corriente por la resistencia. **Se cumple que $L_1 = L_2 = L$ y el transformador es perfecto.**

$\omega_1 = 314\,\frac{rad}{s}$,	$\omega_2 = 377\frac{rad}{s}$
$I_0 = 2A$,	$V_o = 311V$
$L = 20mHy$	Transformador perfecto
$R = 50\Omega$	$C = 10\mu F$

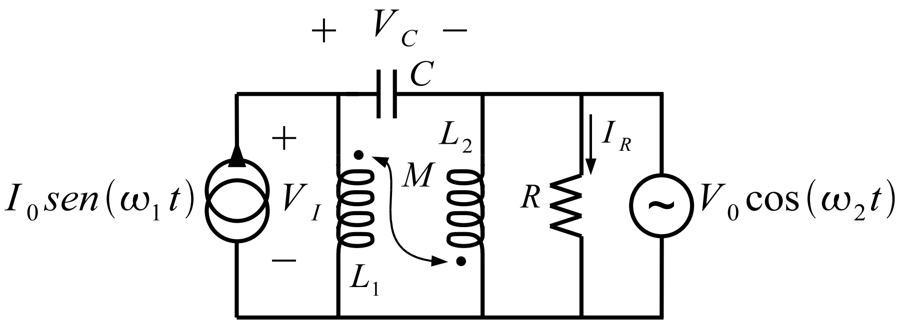


Figura 3:

(a) Aplicando el principio de superposición, dibujar dos circuitos en fasores, que superpuestos sean equivalentes (**en el tiempo**) al circuito de la Figura 3.

(b) Calcular los fasores V_1, I_{L1} e I_R debidos a la fuente de frecuencia ω_1 y ubicarlos en un diagrama fasorial junto al fasor de la fuente.

(c) I) Hallar los fasores V_1, I_{L1}, e I_R debidos a la fuente de frecuencia ω_2.

II) Representarlos en un nuevo diagrama fasorial junto al fasor de la fuente.

III) Obtener gráficamente y agregar el fasor V_C al diagrama.

(d) Hallar la expresión temporal para la corriente I_{L1}.

(e) Hallar la potencia instantánea consumida por R y mostrar que por más que existan fuentes de diferente frecuencia, se puede definir una potencia media (activa) y calcularla.

Solución

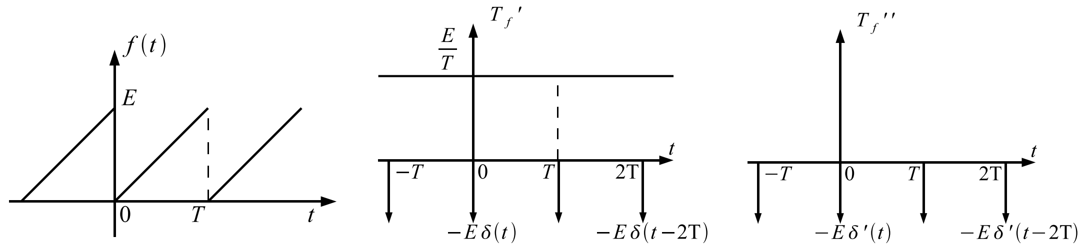
Problema 1

(a) El valor medio de la función $f(t)$ esta dado por:

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{T}\frac{E}{T}\frac{T^2}{2} = \frac{E}{2}$$

(b) Si derivamos dos veces f como distribución, obtenemos,

$$T'_f = \frac{E}{T} + \sum_{n\in Z} -E\delta(t-nT) \;\Rightarrow\; \boxed{T''_f = \sum_{n\in Z} -E\delta'(t-nT)}$$



(a) $f(t)$ (b) T'_f (c) T''_f

Figura 4:

(c) Podemos calcular los coeficientes de Fourier de T''_f como:

$$\begin{aligned} c_n(T''_f) &= \frac{1}{T}\langle T''_f, e^{-j\frac{2\pi n}{T}s}\rangle = \frac{1}{T}\langle -E\delta'(s), e^{-j\frac{2\pi n}{T}s}\rangle \\ &= -\frac{E}{T}\langle \delta, j\frac{2\pi n}{T}e^{-j\frac{2\pi n}{T}s}\rangle = -j\frac{E2\pi n}{T^2} \\ c_n(T''_f) &= \frac{E\,2\pi n}{jT^2} \end{aligned}$$

(d) Usando $c_n(T''_f) = \left(j\frac{2\pi n}{T}\right)^2 c_n(T_f)$ podemos calcular los coeficientes de Fourier de T_f:

$$c_n(T_f) = \frac{-T^2}{n^2 4\pi^2}\cdot\frac{-jE\,2\pi n}{T^2} = j\frac{E}{2\pi n}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_n(T_f) = \begin{cases} \frac{E}{2} & \text{si } n = 0 \\ \frac{jE}{2\pi n} & \text{si } n \neq 0 \end{cases}}$$

(e) Podemos calcular los coeficientes de T_f, mediando integración, aplicando la definición directamente:

$$c_n(T_f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-j\frac{2\pi n t}{T}}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{E}{T}te^{-j\frac{2\pi n t}{T}}\,dt \tag{1}$$

Llamando $u = \frac{E}{T}t$ y $\frac{dv}{dt} = e^{-\frac{j2\pi n}{T}t}$, y aplicando integración por partes, podemos reescribir (1) como:

$$C_n(T_f) = \left.\frac{-E\,te^{-\frac{j2\pi n t}{T}}}{Tj2\pi n}\right|_0^T + \frac{1}{T}\int_0^T \frac{E}{j2\pi n}e^{-\frac{j2\pi n t}{T}}\,dt = \frac{-E}{j2\pi n} \tag{2}$$

$\Rightarrow \boxed{c_n(T_f) = \dfrac{jE}{2\pi n} \text{ si } n \neq 0}$ confirmando el resultado de la parte anterior.

(f) Planteando Parseval, obtenemos:

$$P_M = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,dt = \sum_{n\in Z}|c_n|^2 = {}^{\text{f}}|c_0|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 = \frac{E^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{E^2}{2\pi^2 n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{2\pi^2}{E^2}\left[P_M - \frac{E^2}{4}\right]$$

Por otro lado,

$$P_M = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{E^2}{T^2}\,dt = \frac{E^2}{T^3}\frac{t^3}{3}\Big|_0^T = \frac{E^2}{3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 2\pi\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] = \frac{\pi^2}{6} \;\Rightarrow\; \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Problema 2

(a) Consideremos $U(t) = T{*}S$, usando la definición para la derivad a de una distribución, tenemos:

$$\langle U'(t), \varphi(t)\rangle = -\langle U(t), \varphi'(t)\rangle$$

Usando la definición del producto convolución,

$$-\langle U(t), \varphi'(t)\rangle = -\langle T(x)\otimes S(y), \frac{d\varphi(x+y)}{d(x+y)}\rangle \tag{3}$$

La derivada $\frac{d}{d(x+y)} = \frac{d}{dy}\frac{d(x+y)}{dy} = \frac{d}{dy}$, donde se utilizo la regla de la cadena, podemos entonces reescribir (3) como:

$$-\langle T(x)\otimes S(y), \frac{d\varphi(x+y)}{dy}\rangle = \langle T(x), -\langle S(y), \frac{d}{dy}\varphi(x+y)\rangle\rangle \tag{4}$$

$$\langle T(x)\otimes S'(y), \varphi(x+y)\rangle = \langle T(t) * S'(t), \varphi(t)\rangle \;\Rightarrow\; \boxed{(T*S)' = T*S'} \tag{5}$$

(b) I) Realizando el cambio de variable $g(t) = t - a$, $(|g'(t) = 1|)$, obtenemos:

$$\langle T(t-a), \varphi(t)\rangle = \langle T(g(t)), \varphi(g(t)+a).|g'(t)|\rangle = \langle T(x), \varphi(x+a)\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle T(t-a), \varphi(t)\rangle = \langle T(t), \varphi(t+a)\rangle}$$

II) Aplicamos la definición del producto convolución, y obtenemos,

$$\langle T(x)\otimes\delta(y-a), \varphi(x+y)\rangle = \langle T(x), \langle\delta(y-a), \varphi(x+y)\rangle\rangle$$

$$\langle T(x), \langle\delta(y), \varphi(x+y+a)\rangle\rangle = \langle T(x), \varphi(x+a)\rangle$$

Utilizando la parte anterior, tenemos,

$$\langle T(x), \varphi(x+a)\rangle = \langle T(x-a), \varphi(x)\rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{T*\delta(t-a) = T(t-a)}$$

(c) I) Calculamos $T*(R*S)$,

$$R*S = \delta'(t)*T_g(t) = T'{}_g(t) = \delta(t+\pi) - \delta(t-\pi)$$

$$\Rightarrow\; T*(R*S) = \sin(t+\pi) - \sin(t-\pi) = -\sin(t) - (-\sin(t)) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{T*(R*S) = 0}$$

[f] en este paso esta implicito $|c_n| = |c_{-n}|$

En segundo lugar, calculemos $(T * R) * S$,

$$T_f * R = T_f * \delta' = T'_f = T_{\cos(t)}$$

$$\Rightarrow \ (T * R) * S = \int_{-\pi}^{\pi} cos(t-\tau)\, d\tau = \sin(\tau - t)|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\Rightarrow \ \boxed{(T * R) * S = 0}$$

II) Se cumple la asociativa, lo cual era de esperar, pues dos de las tres distribuciones son de soporte acotado.

Problema 3

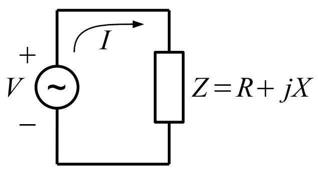


Figura 5:

Para el circuito de la Figura 5, la impedancia Z es variable. Para $Z = R_0 + jX_0$, la carga consume una potencia activa P_0 y una potencia reactiva Q_0

(a) I) Buscamos el lugar geométrico del extremo del fasor de I, cuando la potencia activa consumida es constante e igual a P_0. Planteando la potencia activa consumida por la carga, obtenemos,

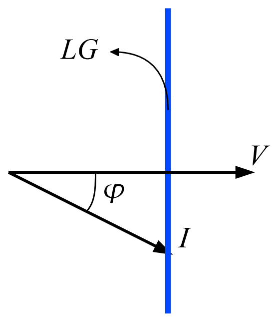


Figura 6: Lugar geométrico $P = P_0$

$$P = |V_{eff}||I_{eff}|\cos(\varphi) \ \Rightarrow \ |I_{eff}|\cos(\varphi) = \frac{P_0}{|V_{eff}|} = cte$$

El lugar geométrico corresponde a los fasores cuya proyección según la dirección del fasor de la fuente es constante. Sabemos que el lugar geométrico debe pasar por el punto de trabajo donde la potencia era P_0. El lugar geométrico se muestra en al Figura I.

II) De forma análoga, $Q = |V_{eff}||I_{eff}|\sin(\varphi) \ \Rightarrow \ \dfrac{Q_0}{|V_{eff}|} = |I_{eff}|\sin(\varphi) = cte.$

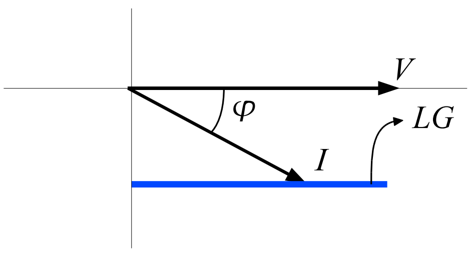


Figura 7: Lugar geométrico $Q = Q_0$

El lugar geométrico, consiste en todos los puntos tal que $|I_{eff}|\sin(\varphi)$ es constante. Sabemos que debe pasar por el punto de trabajo, donde la reactiva era Q_0 y además es una semirecta ya que $Re\{Z\} \geq 0$ (I solo puede estar en el 1^{er} y 4^{to} cuadrante).

(b) I) Si queremos que la potencia activa consumida a la fuente siga siendo P_0, entonces la carga $Z_1 = jX_1$ puramente reactiva.

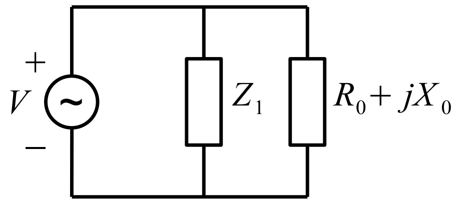


Figura 8:

Por otro lado, debemos buscar la corriente mínima, observando el lugar geométrico calculado en , vemos que dicha corriente se alcanza cuando la corriente y la tensión se encuentran en fase. Para que esto suceda, la impedancia equivalente vista por la fuente, debe ser real, imponiendo dicha condición, obtenemos:

$$Z_v = \frac{jX_1(R_0 + jX_0)}{R_0 + j(X_0 + X_1)} = \frac{-X_0X_1 + jR_0X_1}{R_0 + j(X_1 + X_0)}$$

Para que Z_v sea real, se debe verificar,

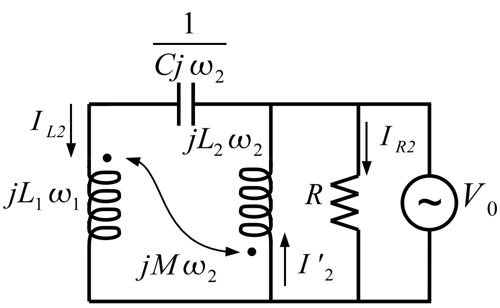
$$-\frac{R_0X_1}{X_0X_1} = \frac{X_1 + X_0}{R_0} \Rightarrow -R_0^2 = X_0X_1 + X_0^2$$

$$\Rightarrow \boxed{X_1 = -\frac{R_0^2 + X_0^2}{X_0}}$$

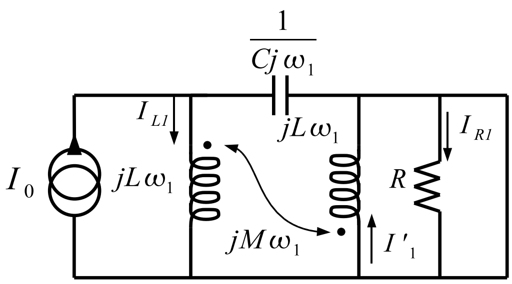
II) Del diagrama fasorial dado para el punto de trabajo, vemos que la corriente atrasa el voltaje, de modo que Z es inductiva, es decir, $X_0 > 0$. Entonces, $X_1 < 0$ y por lo tanto $\boxed{Z_1 \text{ será puramente capacitiva.}}$

Problema 4

(a) Aplicando superposición, obtenemos dos estados que superpuestos son equivalentes (en el tiempo) al circuito original.



(a) Anulo la fuente de corriente



(b) Anulo la fuente de tensión

(b) Trabajo con el circuito que tiene la fuente de voltaje anulada.

- Como el transformador es perfecto, $M = \sqrt{L\,L} = L$
- Como la resistencia se encuentra cortocircuitada, $I_{R1} = 0$
- Las ecuaciones para el transformador son:

$$V_{I1} = Lj\omega_1 I_{L1} + Lj\omega_1 I'_1 \quad (6)$$
$$0 = Lj\omega 1 I'_1 + Lj\omega_1 I_{L1} \quad (7)$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{I1} = 0} \text{ y ademas } V_{C1} = 0$$

Planteando el nudo en el primario: $I_0 = I_{L1} + V_{C1}Cj\omega_1 \Rightarrow \boxed{I_{L1} = I_0}$

(c) I) Trabajo con el circuito que tiene la fuente de corriente anulada. Observando el circuito obtenemos,

$$I_{R2} = \frac{V_0}{R} \Rightarrow \boxed{I_{R2} = 4,4A} \text{ donde } V_0 = 220V\angle 0^o$$

Las ecuaciones para el transformador quedan:

$$V_{I2} = Lj\omega_2 I_{L2} + Lj\omega_2 I'_2$$
$$-V_0 = Lj\omega_2 I'_2 + Lj\omega_2 I_{L2}$$

$$\Rightarrow \; V_{I2} = -V_0 \; \Rightarrow \; \boxed{V_{I2} = -220V}$$

Planteando el nudo en el primario, obtenemos,

$$I_{L2} = (V_o - V_{I2})Cj\omega_2 = 2Cj\omega_2 V_o$$

$$\Rightarrow \; \boxed{I_{L2} = 1,66A\angle 90^{\text{o}}}$$

II) Podemos representarlos en un diagrama fasorial, como se muestra en la Figura 9.

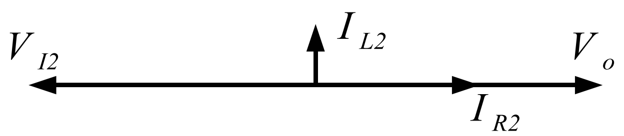


Figura 9: Diagrama fasorial

III) Podemos calcular $V_{C2} = V_{I2} - V_o$, como los fasores son colineales, la resta se obtiene directamente,

$$\Rightarrow \; \boxed{V_{C2} = -2V_o}$$

(d) Aplicando superposición, y los resultados de las partes anteriores, podemos obtener la expresión para la corriente como la suma de las corrientes obtenidas para cada circuito, obteniendo:

$$i_L(t) = Im\left\{\sqrt{2} I_{L1} e^{j\omega_1 t}\right\} + Re\left\{\sqrt{2} I_{L2} e^{j\omega_2 t}\right\}$$

$$\Rightarrow \; \boxed{i_L(t) = [2\sin(\omega_1 t) + 2,35\cos\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{2}\right)]A}$$

(e) Podemos escribir la potencia consumida en la resistencia como $P(t) = v_o(t).i_R(t)$, utilizando el valor de i_R calculado anteriormente obtenemos:

$$p(t) = \sqrt{2} V_o \cos(\omega_2 t)\,.Re\left\{\sqrt{2} I_{R2} e^{j\omega_2 t}\right\}$$

Como la corriente por la resistencia no tiene una componente de frecuencia ω_1, la potencia queda:

$$p(t) = 1935W\cos(\omega_2 t)^2$$

La variación de la potencia es sinusoidal a frecuencia ω_2 únicamente, por lo cual tiene sentido definir la potencia activa como:

$$P = \frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} p(t)\,dt \;\;\text{con}\;\; T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$$

Calculamos dicho valor, integrando, o directamente utilizando los fasores ($P = R|I_{R2}|^2$).

$$\boxed{P = 968W}$$