Sistemas Lineales 1

Primer Parcial, mayo del 2004

Recomendaciones generales:

- Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.
- En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.
- SEA PROLIJO Y EXPLIQUE Y DETALLE BIEN TODOS SUS PASOS. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.
- HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.
- PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.
- Se recuerda que la prueba es individual.
- Al finalizar, colocar las hojas dentro del sobre amarillo y entregarlo al docente del sal´on.

Problema 1 (7 puntos)

(a) Dibujar el esquema de las siguientes distribuciones:

- I) $S = Y(t).\cos(t)$
- II) $T = S_{t-\pi}$
- III) $U = S + T$
- IV) $V = U'$
- V) $W = U''$
- VI) $X = U + W$

(b) Indicar cuáles de las distribuciones anteriores se pueden aplicar a una $\varphi \in \mathbf{C}^\infty$, sin restricciones de soporte.

(c) I) Probar la identidad $\alpha(t)\delta'(t) = \alpha(0)\delta'(t) - \alpha'(0)\delta(t)$.

II) Calcular el producto $\sin(t)\,X(t)$

Problema 2 (9 puntos)

(a) Consideramos la función $h(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x}$, que es continua y derivable en todo punto (la aparente discontinuidad en $x = 0$ no es tal; $h(0) = \pi$, $h'(0) = 0$). Mostrar que esta función se anula para todo entero no nulo (se recomienda bosquejar su gráfico).

(b) Se considera la función periódica $g(t)$ de la figura 1.

- I) Calcular los coeficientes de Fourier de $g(t)$ y expresarlos en función de h.
- II) Hallar τ en función de T de manera tal que $g(t)$ no tenga armónicos pares.
- III) Hallar τ en función de T de manera tal que $g(t)$ no tenga armónicos múltiplos de 3.

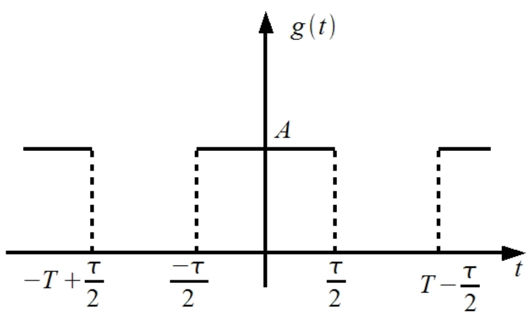


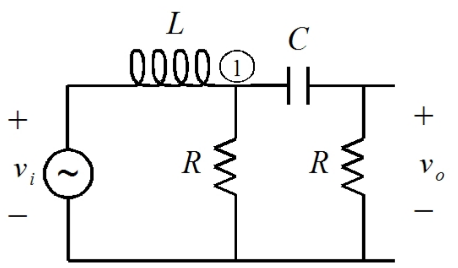
Figura 1: Gráfico de $g(t)$

(c) Calcular:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Problema 3 (11 puntos)

(a) Hallar la ecuación diferencial que víncule $v_o(t)$ con $v_i(t)$, sabiendo que se cumple $\frac{L}{R} = RC = \tau$



Sugerencias:

- Plantear el nudo en 1.
- Escribir la ecuación diferencial que vincula el voltaje y la corriente en la bobina, y en el condensador.
- Eliminar las variables intermedias y verificar que la relación se puede escribir como:

$$\dot{v}_i(t) = 2\tau \cdot \ddot{v}_o(t) + 2 \cdot v_o(t) + \frac{1}{\tau} v_o(t)$$

DE AQUÍ EN ADELANTE SE TRABAJARA CON LA ECUACIÓN QUE APARECE ARRIBA.

(b) Dar dos distribuciones T y S tales que $T * v_i = S * v_o$.

(c) Hallar las inversas de S y T en D'_+, (recordar que la solución homogénea de una ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden es de la forma $Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$, donde $\lambda_1, \lambda_2 \in C$ son dos raíces distintas d el polinomio característico y A y B son constantes.)

(d) I) Encontrar v_1 para que la salida sea $v_o(t) = Y(t)E\frac{t}{\tau}$

II) Encontrar v_o si la entrada es $v_i(t) = EY(t)$

Problema 4 (13 puntos)

(a) Se considera el circuito de la figura 2. Hallar la impefancia vista en régimen sinusoidal Z_v entre los puntos A y B, en función de n (relación de vueltas del transformador ideal), C, R_1 y ω (frecuencia de trabajo).

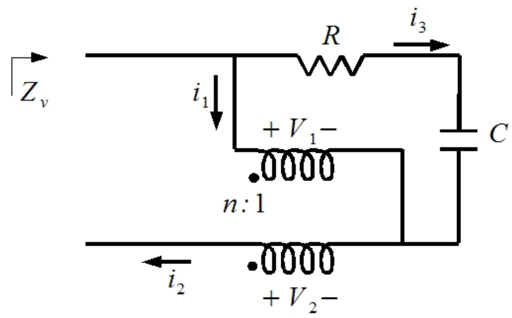


Figura 2:

$$v_i(t) = 220\sqrt{2}\cos(\omega t)$$
$$\omega = 100\pi$$
$$n = 3$$
$$C = 33\mu F$$
$$R_1 = 22\Omega$$
$$R_2 = 100\Omega$$

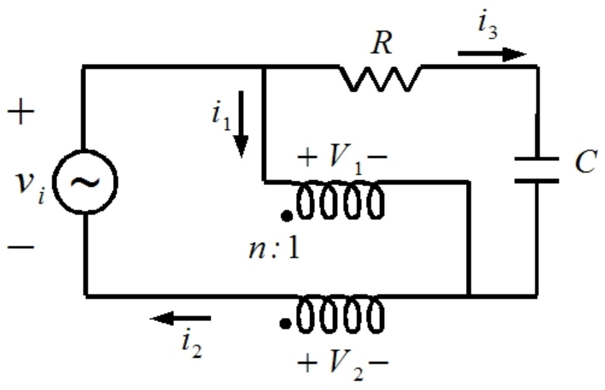


Figura 3:

(b) Sea el circuito de la figura 3 donde:

I) **Justificar** mediante argumentos circuitales que los fasores asociados a todas las corrientes en el circuito deben ser colineales.

II) Calcular I (fasor de corriente por R_2) e I_C (fasor de corriente por el condensador C).

(c) I) Realizar un diagrama fasorial que involucre a V_i (fasor de la fuente $v_i(t)$), I (fasor de corriente por R_2) e I_C (fasor de corriente por el condensador C).

II) Ubicar .ª grandes rasgos (darle importancia al sentido).ª I_1 (fasor de corriente por el primario del transformador ideal), V_C (fasor de voltaje en C), V_R (fasor de voltaje en R_1). **Justificar**.

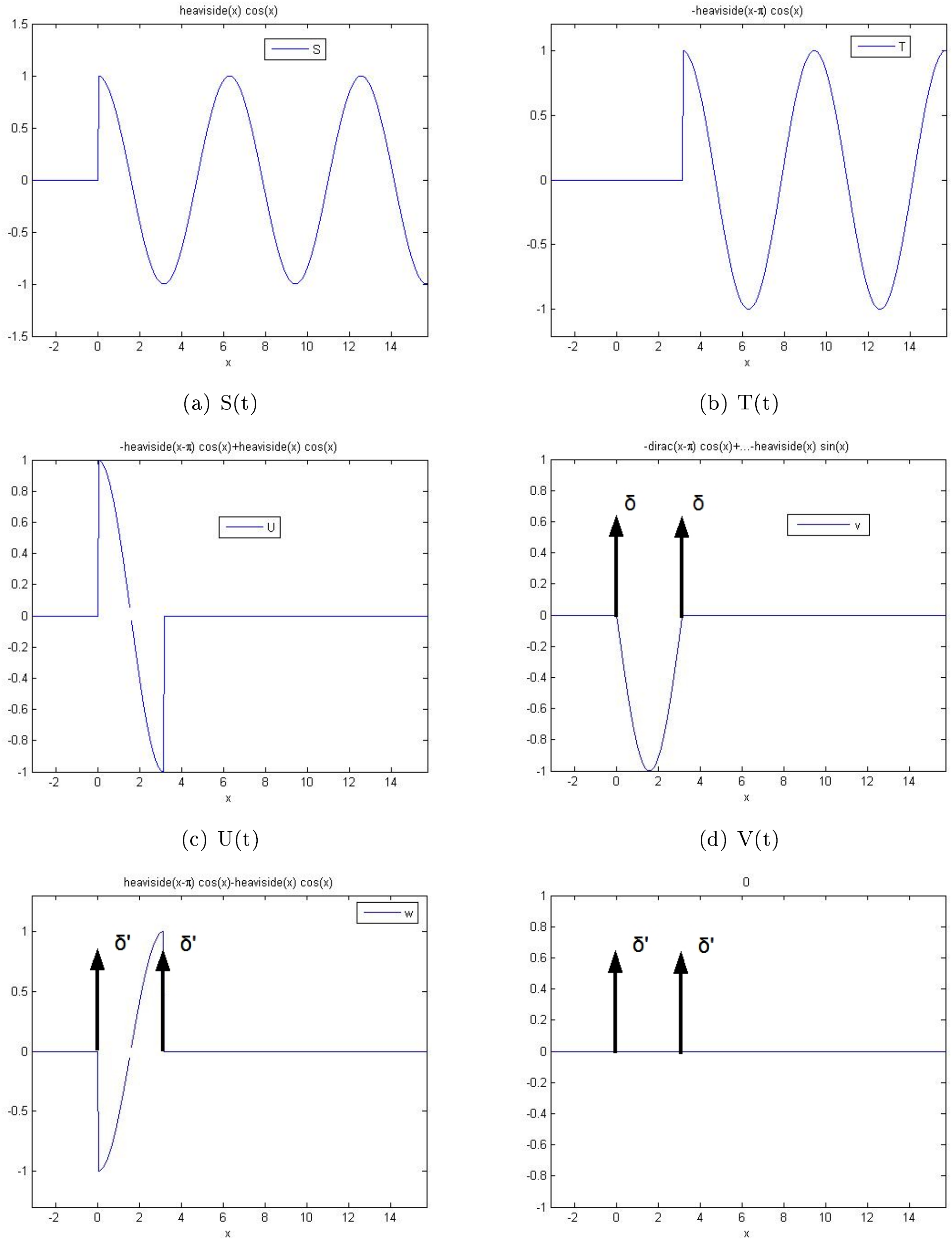
(d) I) Calcular las potencias activa y reactiva consumidas a la fuente.

II) Se desea compensar el factor de potencia mediante la adición de una componente y de tal forma de que no se modifique la potencia activa consumida a la fuente. Indicar que componente utilizaría, como la conectaría y su valor. **Justificar**.

Solución

Problema 1

(a) Dibujamos el esquema de las distintas distribuciones propuestas



(a) S(t) (b) T(t)

(c) U(t) (d) V(t)

(e) W(t) (f) X(t)

(b) Las distribuciones que se pueden aplicar a cualquier función $\varphi \in C^\infty$ son las de soporte acotado. En este caso, las distribuciones U,V,W y X.

(c) I) Para probar la identidad $\alpha(t)\delta'(t) = \alpha(0)\delta'(t) - \alpha'(0)\delta(t)$, debemos probar que para toda $\varphi(t)$, ambas distribuciones arrojan el mismo resultado. Si consideramos:

$$\begin{aligned}\langle \alpha(t)\delta'(t), \varphi(t)\rangle = \langle \delta'(t), \alpha(t)\varphi(t)\rangle = -(\alpha\varphi)'_{t=0} &= -\alpha'(0)\varphi(0) - \alpha(0)\varphi'(0) \\ &= \langle \alpha(0)\delta'(t) - \alpha'(0)\delta(t), \varphi(t)\rangle\end{aligned}$$

de modo que obtenemos $\alpha(t)\delta'(t) = \alpha(0)\delta'(t) - \alpha'(0)\delta(t)$.

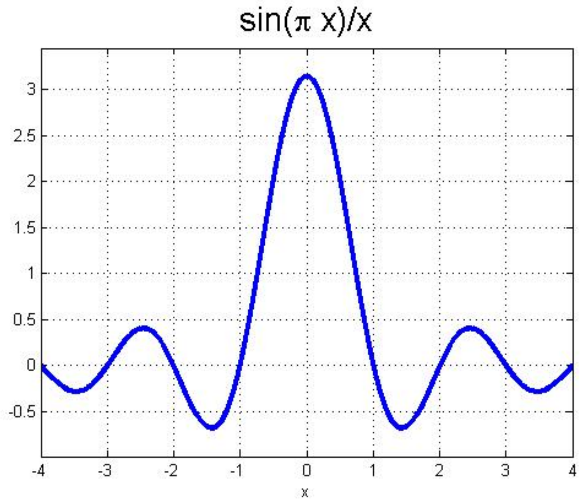
II) Recordando que $X(t) = \delta'(t)+\delta'(t-\pi)$, podemos utilizar el resultado de la parte anterior, con $\alpha(t) = sen(t)$.

$$sen(t)\,[\delta'(t) + \delta'(t-\pi)] = sen(0)\delta'(t) - cos(0)\delta(t) + sen(\pi)\delta'(t-\pi) - cos(\pi)\delta(t-\pi)$$

$$\boxed{sen(t) \cdot X = -\delta(t) + \delta(t-\pi)}$$

Problema 2

(a) Como se puede ver en la figura , la función se anula para los valores enteros de x, pues $sen(x\pi) = 0 \;\; \forall x \in Z$



(b) I) Calculamos los coeficientes de fourier para la función dada,

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,dt \\ &= \frac{A\tau}{T} \\ b_n &= 0 \quad \text{Ya que la funcion dada es par.} \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T g(t)cos(n\omega t)\,dt \\ &= \frac{4}{T}\int_0^{\tau/2} Acos(n\omega t)\,dt \\ &= \frac{4A}{2\pi n} sen\left(\frac{\pi n \tau}{T}\right) = \frac{2A\tau}{\pi T} h\left(\frac{n\tau}{T}\right) \end{aligned}$$

II) Para que la función no contenga armónicos pares, $a_n = 0 \; \forall n = 2k$ con $k \in Z$. Como la h se anula para los valores enteros, imponemos $\frac{2k\tau}{T} \in Z \;\Rightarrow\; 2k\frac{\tau}{T} \in Z \Rightarrow \tau = \frac{T}{2}$

III) Análogamente, imponemos que los coeficientes de la serie sean nulos, si $n = 3k$, obteniendo:

$$\frac{3k\tau}{T} = N \;\Rightarrow\; \begin{cases} \tau = \frac{T}{3} \\ \tau = \frac{2T}{3} \end{cases}$$

(c) Para calcular el valor de la serie, observamos que corresponde a la suma, del cuadrado, del inverso de los enteros impares. Imponiendo $\tau = \frac{T}{2}$, los coeficientes pares de la serie de Fourier de g se anulan, luego utilizando la igualdad de Parseval tenemos:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{T}\int_0^T |g(t)|^2\,dt &= a_0^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \\
\tfrac{A^2}{2} &= \tfrac{A^2}{4} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2A}{\pi}\right)^2\left[1 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{5^2} + \tfrac{1}{7^2} + ...\right] \\
\tfrac{1}{2} &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{1}{(2n+1)^2} \\
\Rightarrow &\quad \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}
\end{aligned}$$

Problema 3

(a) Planteando la ecuación para el nudo 1 obtenemos:

$$I_L = I_R + I_C \;\Rightarrow\; L\dot{I}_L = L\dot{I}_R + L\dot{I}_C$$

Recordando como se relaciona la corriente y la tensión en bornes de una bobina, una resistencia y un capacitor, reescribimos la ecuación anterior.

$$V_L = \frac{L}{R}\dot{V}_R + LC\ddot{V}_c \tag{1}$$

Luego utilizamos:

$$V_o = RI_C \tag{2}$$

$$V_i = V_L + V_C + V_o \tag{3}$$

Finalmente utilizando (1), (2), (3) y recordando que $\frac{L}{R} = RC = \tau$ obtenemos:

$$\boxed{\dot{V}_i = 2\tau\ddot{V}_o + 2\dot{V}_o + \frac{V_o}{\tau}} \tag{4}$$

(b) La igualdad de la parte anterior, la podemos reescribir de la siguiente manera:

$$\delta' * V_i = \left(2\tau\delta'' + 2\delta' + \frac{\delta}{\tau}\right) * V_o \tag{5}$$

De modo que definiendo las distribuciones T y S como:

$$\left.\begin{array}{c} T = \delta' \\ S = \left(2\tau\delta'' + 2\delta' + \frac{\delta}{\tau}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{T * V_i = S * V_o}$$

(c) Recordemos que la inversa de una distribución A, es aquella que verifica $A * A^{-1} = \delta$, se ve fácilmente entonces que la inversa de la distribución T será $T^{-1} = Y(t)$.

Para calcular la inversa de la distribución S, notemos que S se puede escribir como:

$$S = 2\tau\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2\tau^2}\right)\delta$$

Es decir,

$$S = 2\tau\, D\delta \quad \text{con} \quad D = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2\tau^2}$$

Donde $S^{-1} = \frac{1}{2\tau}\,D\delta^{-1}$, finalmente, utilizamos un resultado del teórico[c], que indica:

$$D\delta^{-1} = Y(t)f(t) \text{ donde } f \text{ verifica } \left\{\begin{array}{c} Df = 0 \\ f(0) = f'(0) = ... = f^{(n-2)}(0) = 0 \\ f^{(n-1)}(0) = 1 \end{array}\right.$$

[c]por más detalles consultar los apuntes del curso, (página 70)

Calculamos f solución de $f'' + \frac{1}{\tau} f' + \frac{1}{2\tau^2} f = 0$, obteniendo soluciones de la forma:

$$f = e^{-\frac{t}{2\tau}} \left(A\,sen\left(\frac{1}{2\tau}t\right) + B\cos\left(\frac{1}{2\tau}t\right)\right)$$

Con las condiciones iniciales, obtenemos, $B = 0$ y $A = 2\tau$. Finalmente S^{-1} esta dada por:

$$S^{-1} = Y(t)e^{-\frac{t}{2\tau}}\,sen\left(\frac{t}{2\tau}\right)$$

(d) I) Para calcular v_i tal que $v_o = Y(t).E\frac{t}{\tau}$, teniendo en cuenta que $T * v_i = S * v_o$, multiplicamos a ambos lados de la igualdad por T^{-1} (calculado en la parte anterior).

$$v_i = T^{-1} * S * v_o = Y(t) * \left[\left(2\tau\delta'' + 2\delta' + \frac{1}{\tau}\delta\right) * Y(t)E\frac{t}{\tau}\right] \tag{6}$$

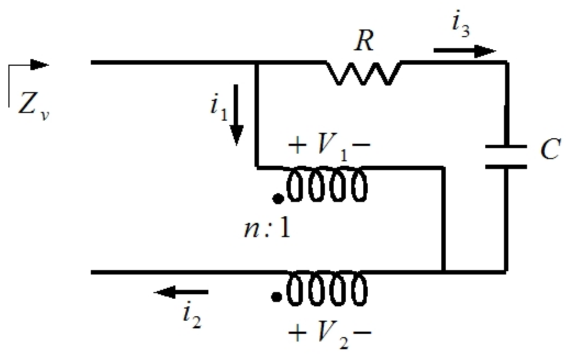
$$\boxed{v_i = Y(t)E\left[2 + 2\frac{t}{\tau} + \frac{t^2}{2\tau^2}\right]} \tag{7}$$

II) Análogamente podemos calcular v_o como $S^{-1} * T * v_i$ donde:

$$Y(t)e^{-\frac{t}{2\tau}}\,sen\left(\frac{t}{2\tau}\right) * \delta' * E\,Y(t) = v_o \tag{8}$$

$$\boxed{v_o = E\,Y(t)e^{-\frac{t}{2\tau}}\,sen\left(\frac{t}{2\tau}\right)} \tag{9}$$

Problema 4



(a) La impedancia vista, será $Z_v = \frac{V}{i_2}$.

Planteamos las ecuaciones para el circuito mostrado en la figura , obteniendo:

$$V = V_1 - V_2 \tag{10}$$

$$V_1 = nV_2 \tag{11}$$

$$ni_1 = i_2 \tag{12}$$

$$V_1 = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) i_3 \;\Rightarrow\; i_3 = \frac{j\omega C}{1 + jRC\omega} V_3 \tag{13}$$

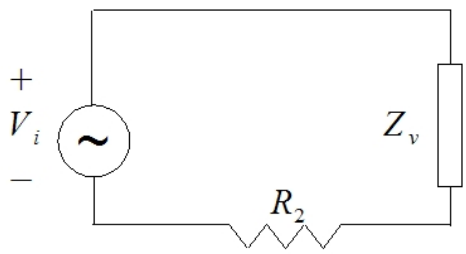
$$i_1 + i_3 = i_2 \tag{14}$$

Eliminando las distintas variables, obtenemos la impedancia vista como:

$$\boxed{Z_v = \frac{V}{i_2} = \frac{(n-1)^2}{n} \cdot \frac{1 + jRC\omega}{jC\omega}}$$

(b) I) Por un lado, sabemos que i_1 es proporcional a i_2, de modo que dichas corrientes son colineales, luego, como $i_1 + i_3 = i_2$, i_3 es la resta de las corrientes i_2 e i_1, por tanto también colineal con estas.

II) Conociendo la impedancia vista de la parte anterior, podemos simplificar el circuito, sustituyendo el bloque de la primera parte por su impedancia equivalente. El circuito equivalente se muestra en la figura II.



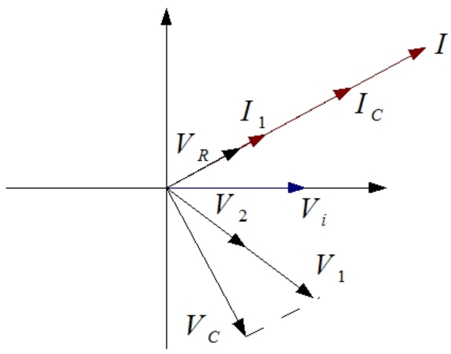
$$I = \frac{V_i}{R_2 + Z_v} \tag{15}$$

$$\text{sustituyendo los valores dados en la letra } Z_v = \frac{4}{9}[22 - 96,4j] \tag{16}$$

$$I = \frac{220}{100 + 7,78 - 42,87}A = 1,87A\angle 21,33^{o} \tag{17}$$

$$i_1 = \frac{I}{3} \quad i_c = \frac{2}{3}I \tag{18}$$

(c) A continuación, se muestra el diagrama fasorial con las cantidades indicadas:



(d) I) Calculamos la potencia activa y reactiva consumida a la fuente como:

$$P = Re[V_{ef}\bar{I}_{ef}] = 220 \cdot 1,74 = 383W \tag{19}$$

$$Q = Im[V_{ef}\bar{I}_{ef}] = -220 \cdot 0,68 = -149,6VAr \tag{20}$$

II) Para compensar la potencia reactiva, agregamos una carga inductiva en paralelo, de modo que $Q_L + Q_R = 0$. Como $Q_L = \frac{V^2}{L\omega} \;\Rightarrow\; L = \frac{V^2}{|Q_c|\omega}$.

$$\boxed{L = \frac{220^2}{149,6 \cdot 100\pi} = 1,02Hy}$$