Sistemas Lineales 1

Examen de julio de 2018

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

a) Considere el circuito en régimen sinusoidal de la figura 1. Halle la tensión $V_o(j\omega)$ en bornes de la impedancia $Z(j\omega)$ y la corriente $I_Z(j\omega)$ por dicha impedancia.

b) Definiendo convenientemente la tensión $V_S(j\omega)$ y la impedancia $Z_S(j\omega)$ en función solamente de R, L, C, $I(j\omega)$, ω y α, mostrar que es posible imponer que la tensión en bornes y la corriente por la impedancia $Z(j\omega)$ en el circuito de la figura 2 coincidan con las calculadas en la parte anterior para el circuito de la figura 1.

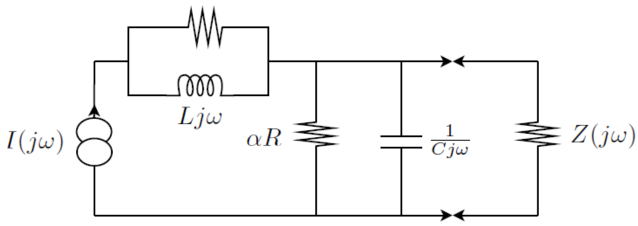


Figura 1: Circuito en régimen sinusoidal.

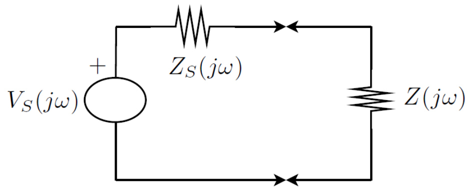


Figura 2: Circuito equivalente.

c) Para $Z(j\omega) = R + Lj\omega$, hallar la transferencia en régimen sinusoidal $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{I(j\omega)}$ observando la dimensiones de dicha transferencia.

d) a. Mostrar que para $\frac{R}{L} = \omega_0$ y $\frac{(1+\alpha)}{\alpha LC} = 100\omega_0^2$, la transferencia anterior puede escribirse somo

$$H(j\omega) = A.\frac{(j\omega + \omega_0)}{(j\omega)^2 + \left(\omega_0 + \frac{1}{\alpha RC}\right)(j\omega) + 100\omega_0^2}$$

siendo A una constante dimensionada que depende de las componentes del circuito.

b. Hallar α real tal que

$$H(j\omega) = K.\frac{\omega_0.(j\omega + \omega_0)}{(j\omega)^2 + 29\omega_0(j\omega) + 100\omega_0^2}$$

definiendo convenientemente la constante K.

e) Deducir y bosquejar los Diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$.

f) a. ¿Qué condición debe cumplir $H(j\omega)$ para que exista una frecuencia de trabajo a la cual la respuesta del sistema esté exactamente en fase con la entrada?

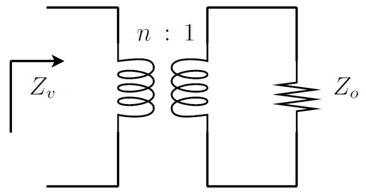
b. Hallar, si existe, una frecuencia de trabajo ω_1 a la cual la respuesta del sistema está exactamente en fase con la entrada.

c. ¿Qué condición debe cumplir $H(j\omega)$ para que exista una frecuencia de trabajo a la cual la respuesta del sistema esté exactamente en cuadratura con la entrada?

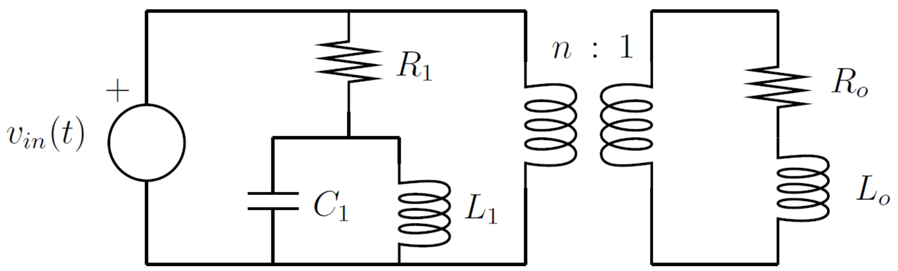
d. Hallar, si existe, una frecuencia de trabajo ω_1 a la cual la respuesta del sistema está exactamente en cuadratura con la entrada.

Problema 2

a) Sea el transformador ideal de la figura, en donde n es la relación de vueltas del primario al secundario. Calcular la impedancia Z_v vista desde el primario, cuando se carga el secundario con una impedancia Z_o.



b) Se considera el circuito de la figura, funcionando en régimen sinusoidal, con $R_1 = 220\Omega$, $C_1 = 883nF$, $L_1 = 660mHy$, $L_o = 16,5mHy$, $R_o = 3\Omega$, $n = 2$ y $v_{in}(t) = 220\sqrt{2}\cos(100\pi t)$ V.



i) Hallar los fasores I_o (corriente por R_o), I_1 (corriente por R_1), I_C (corriente por C_1), I_{L_1} (corriente por L_1) e I (corriente entregada por la fuente).

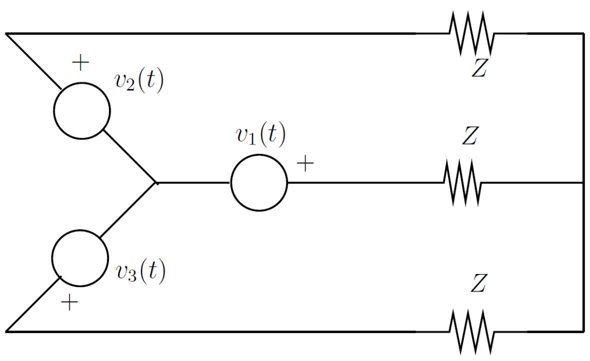
ii) Realizar una diagrama fasorial en el que figuren el fasor V_{in} (tensión de la fuente) y los fasores de las corrientes anteriores. Manejar cuidadosamente las relaciones geométricas involucradas.

iii) Calcular la potencia activa y reactiva consumida a la fuente.

iv) Compensar la potencia reactiva consumida a la fuente, indicando qué elemento colocaría, cómo lo conectaría en el circuito y qué valor debería tener.

c) Se considera el circuito trifásico de la figura, en donde Z es la impedancia total con la que se carga a la fuente de la parte b) y el sistema de fuentes es el siguiente

$v_1(t) = 220\sqrt{2}\cos(100\pi t)$, $v_2(t) = 220\sqrt{2}\cos(100\pi t + 2\pi/3)$, $v_3(t) = 220\sqrt{2}\cos(100\pi t + 4\pi/3)$



i) Calcular la potencia activa y reactiva consumida al sistema trifásico de fuentes.

ii) Hallar las expresiones temporales de las corrientes de línea.

iii) Compensar la potencia reactiva mediante tres componentes idénticas, conectadas en triángulo. Indicar qué elementos colocaría, cómo los conectaría en el circuito y qué valor deberían tener

Sistemas Lineales 1

Examen de julio de 2018

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

(a) Definir la derivada de una distribución.

(b) A partir de la definición, calcular la derivada del escalón $Y(t)$ como distribución.

(c) Sabiendo que $Y(t) + Y(-t) = 1$, mostrar que

$$\frac{d}{dt}Y(-t) = -\delta(t)$$

(d) Sea g una función de clase C^2, tal que $g(0) = 0$ y

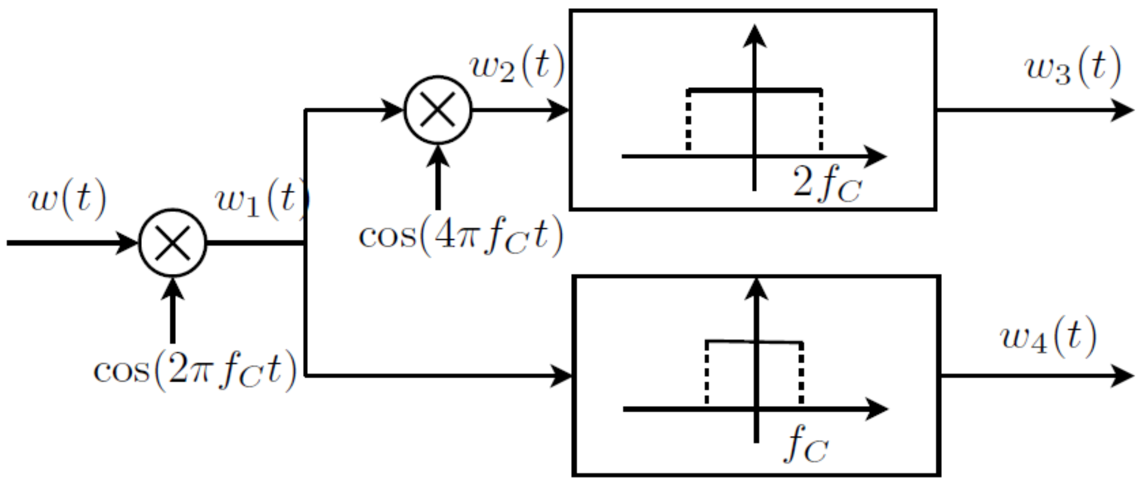
$$g'' + \omega^2 g = 0$$

con $\omega > 0$. Considere la distribución $S(t) = Y(-t)g(t)$. Mostrar que existe una constante real c tal que

$$S''(t) + \omega^2.S(t) = c\delta(t)$$

Pregunta 2

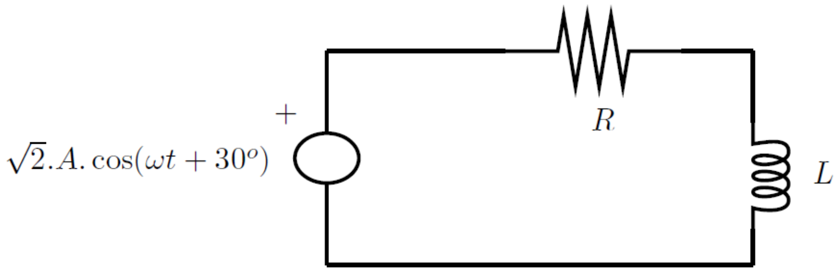
Considere el sistema de modulación de la figura, cuya entrada es la señal w es banda acotada W. Los filtros pasabajos son ideales, siendo $f_C \geq 2W$.



(a) Bosqueje, justificando, los espectros de las señales w, w_1, w_2, w_3 y w_4.

(b) Si E es la energía de la seãl w, hallar las energías de las señales w_3 y w_4.

Pregunta 3



Se considera el circuito de la figura, funcionando en régimen sinusoidal a pulsación ω.

(a) Calcular la potencia reactiva que entrega la fuente, indicando si la carga es capacitiva o inductiva.

(b) Compensar la potencia reactiva que entrega la fuente, explicando cómo lo hace y calculando la componente a colocar.

(c) Una vez compensado el sistema, se duplica la frecuencia de trabajo. Calcular la potencia reactiva que entrega la fuente en esta nueva situación.

Pregunta 4

Se consideran las siguientes transferencias en régimen sinusoidal, con ω_0, ω_1 y ω_n positivos:

$$H_1(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \omega_0} \quad , \quad H_2(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 0{,}6\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

a) ¿Alguna de ellas es capaz de responder en régimen, ante una entrada sinusoidal de amplitud A, con una señal de amplitud mayor a A? (indicar cuál o cuáles).

b) ¿Alguna de ellas es capaz de responder en régimen con una señal de valor medio nulo ante una entrada periódica de tipo diente de sierra? (indicar cuál o cuáles).

c) ¿Alguna de ellas es capaz de responder en régimen, ante una entrada sinusoidal, con una señal que presenta un retraso de fase de 72^o respecto de la entrada? (indicar cuál o cuáles).

Solución

Problema 1

a) La tensión $V_o(j\omega)$ en bornes de la impedancia $Z(j\omega)$ vale

$$V_o(j\omega) = I(j\omega).\left[\frac{1}{\alpha R} + Cj\omega + \frac{1}{Z(j\omega)}\right]^{-1} = I(j\omega).\left[\frac{\alpha R Z(j\omega)}{Z(j\omega)(1+\alpha RCj\omega) + \alpha R}\right]$$

$$V_o(j\omega) = \frac{\alpha R I(j\omega)}{(1+\alpha RCj\omega)}.\left[\frac{Z(j\omega)}{Z(j\omega) + \frac{\alpha R}{(1+\alpha RCj\omega)}}\right] \quad (1)$$

La corriente por la impedancia $Z(j\omega)$ vale

$$I_Z(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{Z(j\omega)} = \frac{\alpha R I(j\omega)}{(1+\alpha RCj\omega)}.\left[\frac{1}{Z(j\omega) + \frac{\alpha R}{(1+\alpha RCj\omega)}}\right] \quad (2)$$

b) En el circuito de la figura 2, la tensión y corriente en la impedancia $Z(j\omega)$ valen

$$V_o'(j\omega) = V_S(j\omega).\frac{Z(j\omega)}{Z_S(j\omega)+Z(j\omega)} \quad , \quad I_Z'(j\omega) = V_S(j\omega).\frac{1}{Z_S(j\omega)+Z(j\omega)}$$

por lo que definiendo

$$V_S(j\omega) = \frac{\alpha R I(j\omega)}{(1+\alpha RCj\omega)} \quad , \quad Z_S(j\omega) = \frac{\alpha R}{(1+\alpha RCj\omega)}$$

se obtienen las expresiones (1) y (2).

c) Para $Z(j\omega) = R + Lj\omega$ hallaremos la transferencia $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{I(j\omega)}$. De lo anterior, sabemos que

$$V_o(j\omega) = I(j\omega).\left[\frac{\alpha R(R+Lj\omega)}{(R+Lj\omega)(1+\alpha RCj\omega) + \alpha R}\right]$$

Entonces

$$H(j\omega) = \frac{\alpha R(R+Lj\omega)}{R + Lj\omega + \alpha R^2 Cj\omega + \alpha RLC(j\omega)^2 + \alpha R} = \frac{\alpha R(R+Lj\omega)}{(1+\alpha)R + (L+\alpha R^2 C)(j\omega) + \alpha RLC(j\omega)^2}$$

$$H(j\omega) = \frac{\alpha RL}{\alpha RLC}.\frac{\left(j\omega + \frac{R}{L}\right)}{(j\omega)^2 + \left(\frac{L+\alpha R^2 C}{\alpha RLC}\right)(j\omega) + \frac{(1+\alpha)R}{\alpha RLC}} = \frac{1}{C}.\frac{\left(j\omega + \frac{R}{L}\right)}{(j\omega)^2 + \left(\frac{1}{\alpha RC} + \frac{R}{L}\right)(j\omega) + \frac{(1+\alpha)}{\alpha LC}}$$

Obsérvese que las dimensiones son adecuadas, ya que la transferencia se corresponde con una impedancia.

d)
i) Para $\frac{R}{L} = \omega_0$ y $\frac{(1+\alpha)}{\alpha LC} = 100\omega_0^2$,

$$\frac{1}{C} = \frac{(1+\alpha)}{\alpha LC}.\frac{L}{R}.\frac{R\alpha}{(1+\alpha)} = 100\omega_0^2.\frac{1}{\omega_0}.\frac{R\alpha}{(1+\alpha)} = \frac{\alpha 100\omega_0 R}{(1+\alpha)}$$

$$\frac{1}{\alpha RC} = \frac{L}{R}.\frac{(1+\alpha)}{\alpha LC}.\frac{1}{(1+\alpha)} = \frac{1}{\omega_0},100\omega_0^2.\frac{1}{(1+\alpha)} = \frac{100\omega_0}{(1+\alpha)}$$

$$H(j\omega) = \frac{100\alpha R}{(1+\alpha)}.\frac{\omega_0\,(j\omega+\omega_0)}{(j\omega)^2 + \left(\frac{100}{(1+\alpha)}+1\right)\omega_0(j\omega) + 100\omega_0^2}$$

ii) Se debe cumplir que

$$\frac{100}{(1+\alpha)} + 1 = 29 \Rightarrow \frac{100}{(1+\alpha)} = 28 \Rightarrow 100 = 28 + 28\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{72}{28} = \frac{18}{7}$$

e) Deducimos los Diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase, haciendo un análisis por bandas de frecuencia. La transferencia toma la forma

$$H(j\omega) = K.\frac{\omega_0\,(j\omega+\omega_0)}{(j\omega)^2+29\omega_0(j\omega)+100\omega_0^2} = K.\frac{\omega_0\,(j\omega+\omega_0)}{(j\omega+4\omega_0)(j\omega+25\omega_0)} \quad , \quad K = \frac{100\alpha R}{(1+\alpha)} > 0$$

y las frecuencias críticas ω_0, $4\omega_0$ y $10\omega_0$. Entonces

$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \approx K.\frac{\omega_0\,(\omega_0)}{(4\omega_0)(25\omega_0)} = \frac{K}{100} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 20\log(K) - 40\,db \\ arg(H) & \approx & 0 \end{cases}$$

$$\omega_0 \ll \omega \ll 4\omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \approx K\frac{\omega_0\,(\omega)}{(4\omega_0)(25\omega_0)} = K.\frac{j\omega}{100\omega_0} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 20\log(K/100\omega_0) + 20\log(\omega)\,db \\ arg(H) & \approx & \frac{\pi}{2}\,(-\frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

$$4\omega_0 \ll \omega \ll 25\omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \approx K.\frac{\omega_0\,(j\omega)}{(j\omega)(25\omega_0)} = \frac{K}{25} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 20\log(K/25)\,db \\ arg(H) & \approx & 0\,(\pm 2\pi) \end{cases}$$

$$25\omega_0 \ll \omega \Rightarrow H(j\omega) \approx K.\frac{\omega_0\,(j\omega)}{(j\omega)(j\omega)} = \frac{K\omega_0}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 20\log(K\omega_0) - 20\log(\omega)\,db \\ arg(H) & \approx & -\frac{\pi}{2}\,(+\frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

La figura 3 muestra los Diagramas de Bode reales y asintóticos de $H(j\omega)$.

f) Sabemos que para una entrada sinusoidal $i(t) = I\cos(\omega_i t)$, la respectiva respuesta en régimen es

$$v_o(t) = I|H(j\omega_i)|\cos\left[\omega_i t + arg(H(j\omega_i))\right]$$

i) Para que exista una frecuencia de trabajo a la cual la respuesta en régimen esté en fase con la entrada, se debe cumplir que la función de transferencia en régimen tome un valor real positivo o, lo que es lo mismo, el Diagrama de Bode real de fase tiene que pasar por el valor 0 (módulo 2π).

ii) Observando el Diagrama de Bode asintótico de fase, y considerando la continuidad de la función $arg(H(j\omega))$, podemos afirmar que existe una frecuencia de trabajo a la cual la función anterior toma el valor 0. Como las frecuencias críticas no están muy separadas entre sí -menos de una década- la aproximación asintótica es muy mala y no permite sacar una conclusión válida sobre cuál será esta frecuencia. En la figura 3 se muestra también el Diagrama de Bode real de fase, del cual puede estimarse la frecuencia buscada. El cálculo exacto requiere imponer que la transferencia sea real positiva. Busquemos constantes positivas β y γ tales que:

$$H(j\gamma\omega_0) = K.\frac{\omega_0\,(j\gamma\omega_0+\omega_0)}{(j\gamma\omega_0+4\omega_0)(j\gamma\omega_0+25\omega_0)} = K.\frac{(j\gamma+1)}{(j\gamma+4)(j\gamma+25)} = \beta$$

De donde

$$K(1+j\gamma) = \beta(100-\gamma^2+j29\gamma) \Rightarrow \begin{cases} K & = & \beta(100-\gamma^2) \\ K\gamma & = & 29\beta\gamma \Rightarrow \beta = \frac{K}{29} = \frac{100\alpha R}{29(1+\alpha)} \end{cases}$$

Entonces

$$K = \beta(100-\gamma^2) \Rightarrow K = \frac{K}{29}(100-\gamma^2) \Rightarrow 1 = \frac{(100-\gamma^2)}{29} \Rightarrow \gamma = \sqrt{71} \approx 8,5$$

iii) Para que exista una frecuencia de trabajo a la cual la respuesta en régimen esté en cuadratura con la entrada, se debe cumplir que la función de transferencia en régimen tome uno de los siguientes valores: $\pm\frac{\pi}{2}$ (módulo 2π).

iv) Nuevamente observando el Diagrama de Bode asintótico de fase, y considerando precisamente el carácter asintótico del mismo, vemos que no hay ninguna frecuencia de trabajo a la cual la función de transferencia tome un valor con argumento múltiplo entero de $\frac{\pi}{2}$. Sin embargo, podemos afirmar que altas frecuencias de trabajo, las respuestas estarán *prácticamente* en cuadratura con la entrada.

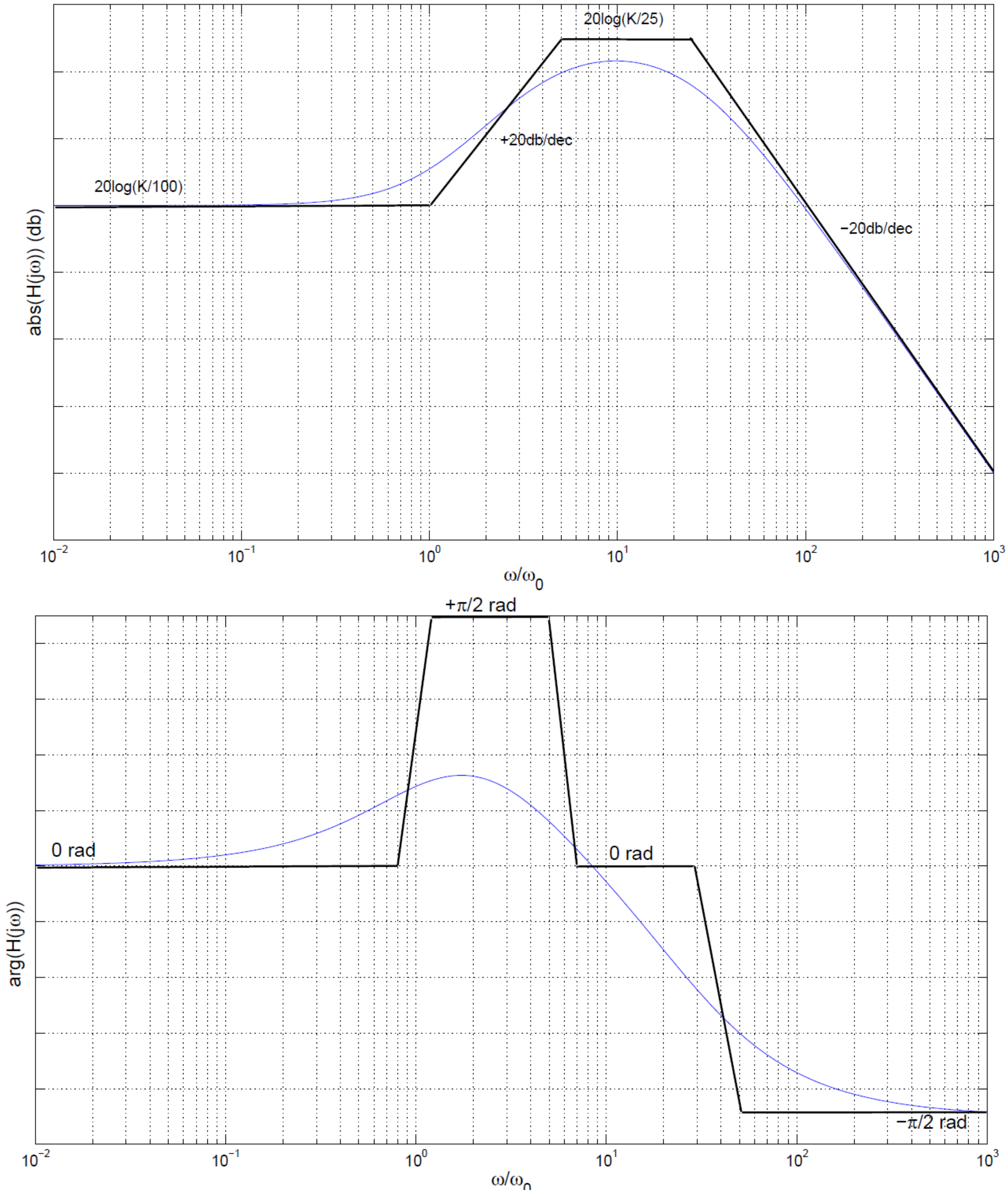


Figura 3: Diagramas de Bode real y asintótico del Problema 1.

Problema 2

a) De las ecuaciones del transformador ideal y escribiendo correctamente la malla del secundario, se obtiene: $Z_v = n^2 Z_o$.

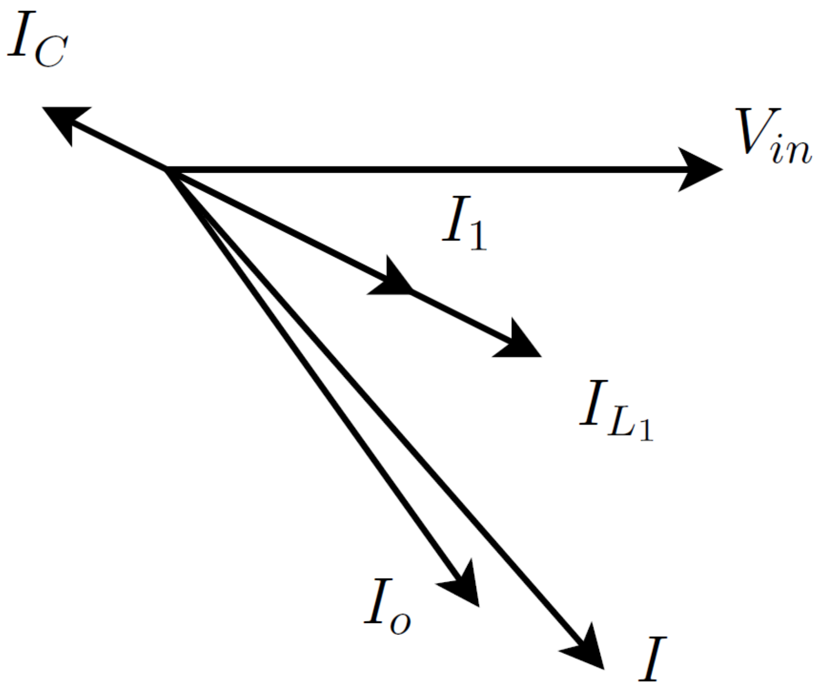
b)

i)

$$I_1 = V_{in}\frac{1 - L_1C_1\omega^2}{R_1(1 - L_1C_1\omega^2) + L_1 j\omega} \quad , \quad I_L = \frac{I_1}{1 - L_1C_1\omega^2} \quad , \quad I_C = \frac{-C_1L_1\omega^2 I_1}{1 - L_1C_1\omega^2}$$

$I_o' = \frac{V_{in}}{4(R_o + jL_o\omega)}$ (corriente del primario)

$$I = I_1 + I_o'$$



ii)

iii) $P = R_1|I_1|^2 + R_o|I_o|^2 = 1121W$,
$Q = L_1\omega|I_L|^2 + L_o\omega|I_o|^2 - \frac{1}{C_1\omega}|I_C|^2 = 1858VAR$.

iv) Como la potencia reactiva es positiva, la fuente ve una impedancia inductiva. Compensamos con un condensador de valor C en bornes de la fuente. Este condensador debe aportar $Q_C = -Q = -|V_{in}|^2 C\omega$. Entonces $C \approx 122,2\mu F$.

c)

i) Como el sistema está en estrella y es equilibrado, la potencia trifásica activa y reactiva es el triple que la calculada en la parte b). El equivalente monofásico coincide con el circuito estudiado en la parte b).

ii) Las corrientes de línea son, en módulo, idénticas a la corriente entregada por la fuente en la parte b). Las expresiones temporales son las siguientes:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= |I_{b)}|\sqrt{2}\cos\left(\omega t + arg(I_{b)})\right) \\ i_2(t) &= |I_{b)}|\sqrt{2}\cos\left(\omega t + arg(I_{b)} + 2\pi/3)\right) \\ i_3(t) &= |I_{b)}|\sqrt{2}\cos\left(\omega t + arg(I_{b)}) + 4\pi/3\right) \end{aligned}$$

iii) En el equivalente monofásico, calculamos el condensador para compensar reactiva, que coincide con lo calculado en la parte b). Como se pide conectar en triángulo, la impedancia debe ser tres veces más grande, por lo que los condensadores a colocar son tres veces más pequeños: $C_t \approx 40{,}7\mu F$.