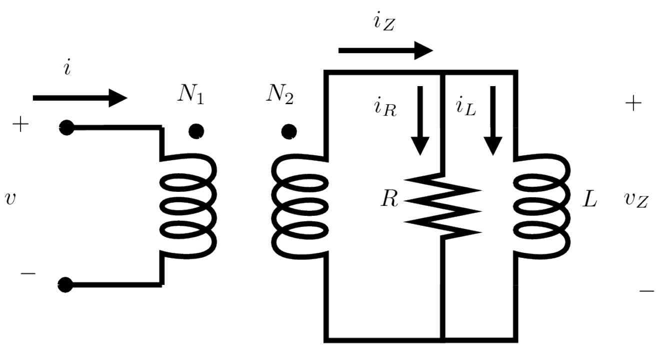
Sistemas Lineales 1

Examen de julio de 2017

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

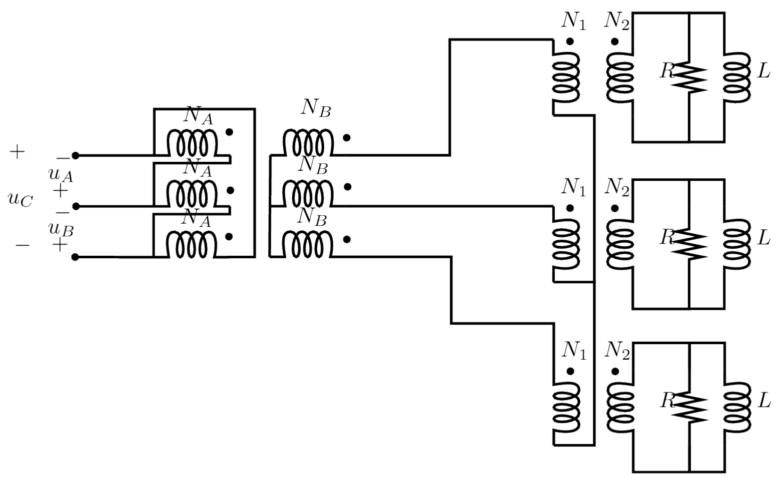
El circuito de la figura opera a una frecuencia de $50Hz$ y el transformador es ideal, con $N_1 = 10$ y $N_2 = 100$. Tanto la resistencia como la bobina que conforman la carga poseen valores desconocidos.



(a) Determinar el valor de R y L, sabiendo que la potencia activa consumida por la carga es de $1kW$ y la carga posee un factor de potencia de 0,87. (Los valores de R y L calculados se utilizarán para el resto del ejercicio).

(b) Calcular los fasores asociados a las siguientes variables y realizar un diagrama fasorial que los contenga: V, I, V_Z, I_Z, I_R e I_L.

En el circuito de la figura, tres cargas como las anteriores son alimentadas desde un transformador ideal trifásico (con $N_A = 10$ y $N_B = 50$) a través de un sistema de fuentes compuestas equilibrada y perfecta (u_A, u_B y u_C) de $50Hz$ y $220V$ eficaces.



(c) Calcular la potencia aparente, activa y reactiva que entrega el sistema de fuentes.

(d) Calcular las expresiones temporales de las corrientes de línea desde el primario del trasformador (del lado de las fuentes).

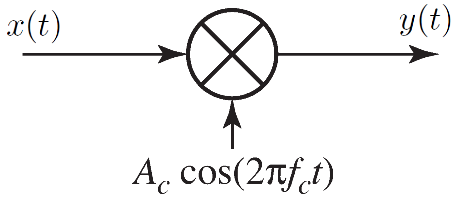
(e) Realizar un diagrama fasorial que contenga los fasories asociados a las tensiones del sistema de fuentes y a las corrientes calculadas en la parte anterior.

(f) Compensar la potencia reactiva, indicando qué tipo de componente conectaría, de qué valor e indique la forma de conexión.

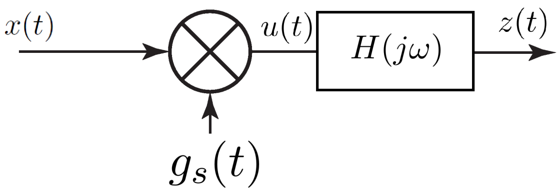
(g) Realizar un diagrama fasorial que contenga los fasores asociados a las tensiones del sistema de fuentes y a las corrientes de línea del sistema compensado.

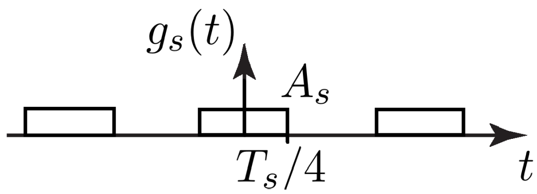
Problema 2

(a) Sea una señal $x(t)$ de ancho de banda W. Grafique la transformada de Fourier de la señal $y(t)$ que resulta de modularla multiplicándola por $g_c(t) = A_c. \cos(2\pi f_c t)$ como se muestra en la siguiente figura. Se cumple que $f_c \gg 2W$.



(b) Se desea utilizar el sistema que se muestra en la figura a continuación para obtener el mismo resultado de la parte a) reemplazando el coseno $g_c(t)$ por la onda cuadrada simétrica $g_s(t)$, de amplitud A_s, valor medio $A_s/2$, periodo $T_s = \frac{1}{f_c}$, y ancho $T_s/2$. El filtro $H(j\omega)$ es el analizado en la parte c).





i) Sabiendo que la **serie** de Fourier de $g_s(t)$ tiene coeficientes $C_0 = A_s/2$ y $C_n = A_s \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi}$, obtenga la **transformada** de Fourier de $g_s(t)$.

ii) Obtenga la transformada de Fourier de la señal intermedia $u(t)$ que resulta de multiplicar $x(t)$ por $g_s(t)$, y grafique su módulo.

(c) Sea el filtro pasabanda de transferencia en régimen $H(j\omega)$

$$H(jw) = \frac{j\omega\omega_1}{(j\omega + \omega_0)(j\omega + \omega_1)}$$

con $\omega_1 = \omega_0 + 2\pi W \gg \omega_0$.

i) Realice los diagramas de Bode de $H(jw)$.

ii) Determine A_s y ω_0 en función de A_c, f_c y W, para que la salida del filtro, la señal $z(t)$, sea aproximadamente igual a la señal $y(t)$ de la parte a).

Sistemas Lineales 1

Examen de julio de 2017

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

Se considera una fuente trifásica, equilibrada y perfecta, conformada por tres fuentes conectadas en estrella:

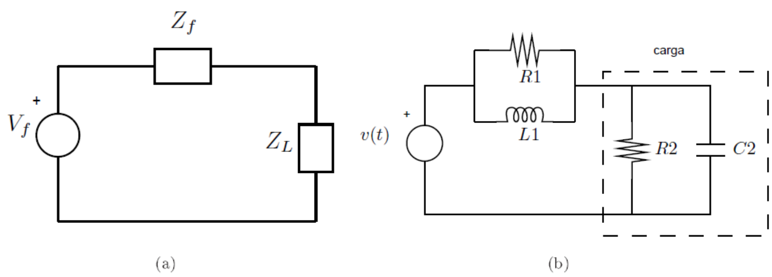
$$v_1(t) = E\cos(\omega t) \quad , \quad v_2(t) = E\cos(\omega t + 2\pi/3) \quad , \quad v_3(t) = E\cos(\omega t - 2\pi/3)$$

Esta fuente trifásica alimenta una carga compuesta por tres impedancias idénticas de valor $Z(j\omega) = Me^{j\varphi}\Omega$, conectadas en triángulo.

(a) Hallar la expresión temporal de la corriente que entrega cada fuente.

(b) Mostrar que la potencia instantánea total entregada por el sistema de fuentes es constante.

Pregunta 2



(a) El circuito de la figura está funcionando en régimen sinusoidal. Deducir la relación entre las impedancias Z_F y Z_L que asegure que se disipa la máxima potencia activa en la impedancia Z_L.

(b) Para el circuito de la figura, con excitación $v(t) = E.\cos(\omega_0 t)$, con L_1 dado y $R_1 = R_2$, hallar el valor del condensador C_2 que asegure que se disipa la máxima potencia activa en la carga.

Pregunta 3

(a) Hallar la respuesta en régimen de un sistema lineal de transferencia en régimen $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1}$ para la entrada $e(t) = A.sen(t)$, señalando las relaciones de amplitud y fase entre la entrada y la salida.

(b) El mismo sistema se excita con una onda cuadrada simétrica de periodo $T = 4\pi$ segundos. Hallar una expresión analítica para la respectiva respuesta en régimen. Justifique bien en caso de usar aproximaciones.

Pregunta 4

(a) Calcule los coeficientes de Fourier de un diente de sierra de periodo T, de valor medio nulo, calculando previamente los coeficientes de Fourier de la derivada segunda del diente de sierra como distribución.

(b) Calcular la suma de la siguiente serie:

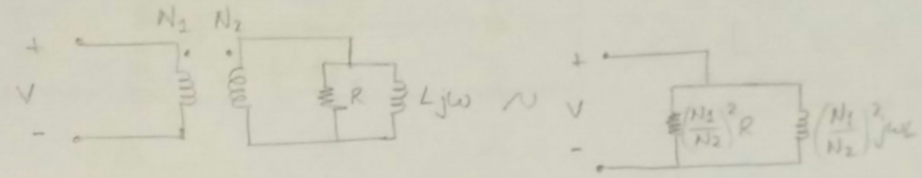
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Solución

Problema 1

Problema 1

(a)



El único consumidor de potencia activa es la resistencia.

$$P = 1\,\mathrm{kW} = \frac{|V|^2}{\left(N_1/N_2\right)^2 R} \Rightarrow \boxed{R = 4840\,\Omega}$$

$$FP = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \Rightarrow Q = 567\,\mathrm{VAr}$$

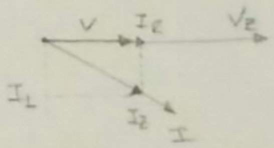
$$Q = \frac{|V|^2}{\left(N_1/N_2\right)^2 \omega L} \Rightarrow \boxed{L = 27\,\mathrm{Hy}}$$

(b)

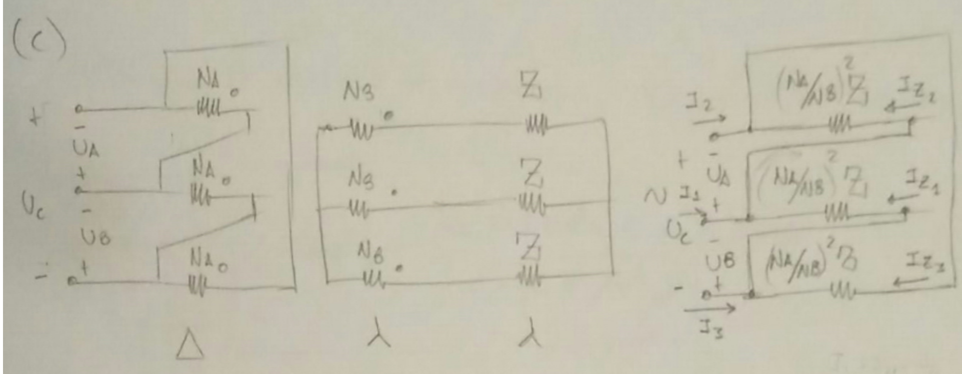
$$S = P + jQ = V\bar{I} \Rightarrow \boxed{I = 4,55 - j\,2,58\,A}$$

$$\boxed{V_Z = \frac{N_2}{N_1} V_1 = 2200\,V}$$

$$\boxed{I_Z = \frac{N_1}{N_2} I = 0,46 - j\,0,26\,A = I_R + I_L}$$

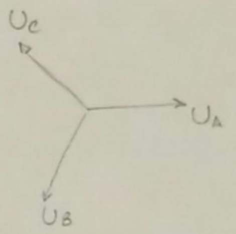


(c)



$$\boxed{\overline{S} = \frac{3\,|U|^2}{\left(\frac{N_A}{N_B}\right)^2 \overline{Z}} = 12{,}0 + j6{,}8\ \text{kVA}}$$

Asumiendo el siguiente sistema de Fuentes:

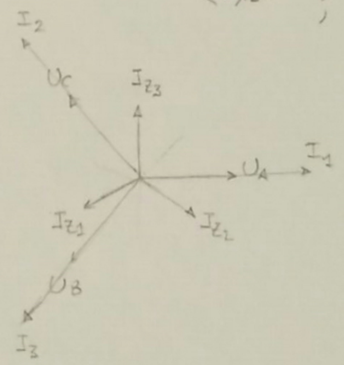


(d)

(e) $I_{Z_2} = \frac{U_A}{\left(N_A/N_B\right)^2 Z} = \frac{220V}{(0{,}5)^2\ 220V}(4{,}55 - j2{,}58)A$

$= 18{,}2 - j10{,}32\ A = 20{,}9A \angle -30°$

Del mismo modo: $I_{Z_1} = 20{,}9A \angle -150°$; $I_{Z_3} = 20{,}9A \angle 90°$



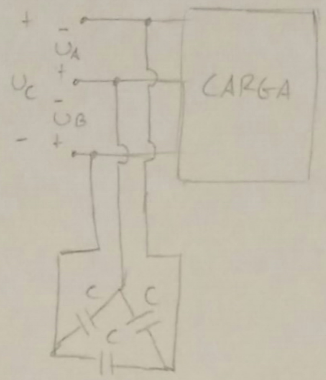
Entonces $I_1 = 36{,}2A \angle 0°$, $I_2 = 36{,}2A \angle 120°$, $I_3 = 36{,}2A \angle 240°$

$i_1(t) = 51{,}2A \cos(2\pi\, 50Hz\, t)$

$i_2(t) = 51{,}2A \cos(2\pi\, 50Hz\, t + 120°)$

$i_3(t) = 512A \cos(2\pi\, 50Hz\, t + 240°)$

(f) Ya que el consumo es inductivo, compenso con condensadores



$Q_c = -3\,|U|^2 \omega C = 6{,}8\,\text{kVAr}$

$\Rightarrow \boxed{C = 149\,\mu F}$

(g) Ahora $S = 12{,}0\,\text{kW}$ $\Rightarrow$ $I_1 = 31{,}5A \angle -30°$

$I_2 = 31{,}5A \angle 90°$

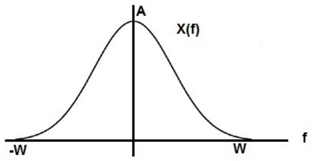
$I_3 = 31{,}5A \angle -150°$

Problema 2

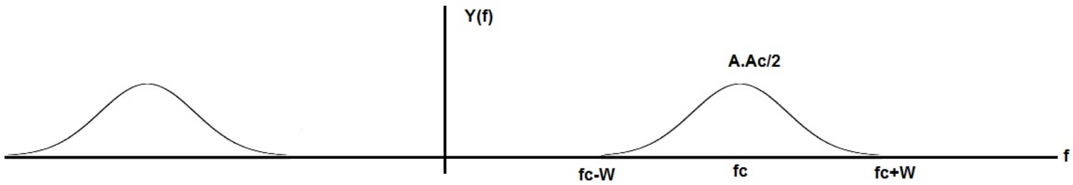
Parte a) Sean $X(f)$, $G_c(f)$, e $Y(f)$ las transformadas de Fourier de $x(t)$, $g_c(t)$ e $y(t)$ respectivamente. Dado que las señales se multiplican en el tiempo, corresponde convolucionar sus transformadas, i.e., $Y(f) = X(f) * G_c(f)$. En particular $G_c(f) = \frac{A_c}{2}(\delta(f + fc) + \delta(f - fc))$ por lo que

$$Y(f) = \frac{A_c}{2}(X(f) * \delta(f + fc) + X(f) * \delta(f - fc)) = \frac{A_c}{2}(X(f + fc) + X(f - fc)).$$

Luego si el espectro de $x(t)$ tiene la forma



entonces el de $y(t)$ corresponderá al anterior trasladado en frecuencia y modificada su amplitud según



En particular no hay solapamiento porque $2W \leq f_c$

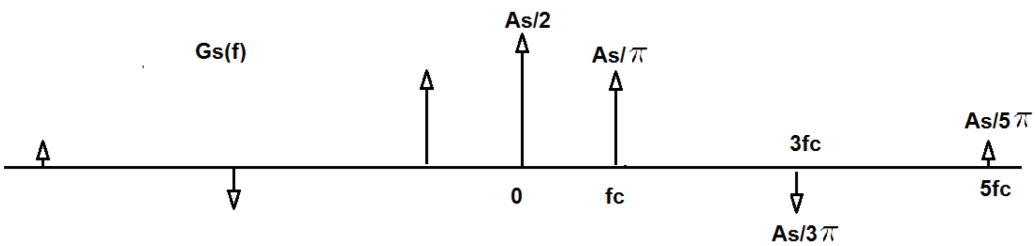
Parte b) A partir de la expansión de $g_s(t)$ en su serie de Fourier $g_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(j2\pi nt/T_s)$ se puede obtener su transformada de Fourier $G_s(f)$. Aplicando linealidad se tiene

$$G_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \mathcal{F}[\exp(j2\pi nt/T_s)]$$

Usando que la transformada de una exponencial compleja es una delta trasladada en frecuencia, i.e., $\mathcal{F}[\exp(j2\pi nt/T_s)] = \delta(f - n/T_s) = \delta(f - nf_c)$, entonces la ecuación anterior se reduce a

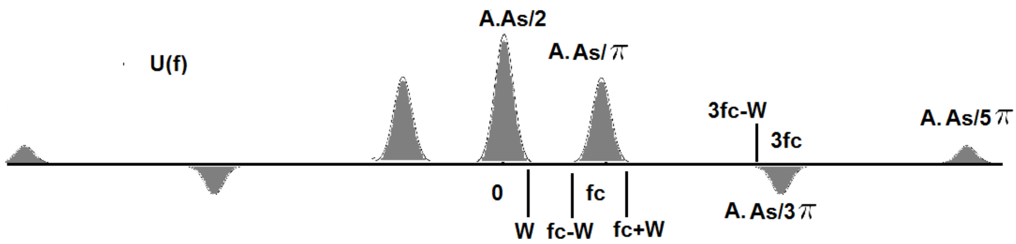
$$G_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(f - nf_c)$$

Entonces representando las deltas como flechas de altura unitaria y susbtituyendo los valores específicos para C_n en este caso, se obtiene la siguiente representación



Luego en forma similar a la parte anterior el espectro de la señal $u(t)$ se obtiene por convolución trasladando el espectro de $x(t)$

$$U(f) = X(f) * G_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n X(f - nf_c)$$



que corresponde a las siguiente gráfica.

Véase que el primer armónico centrado en f_c coincide con $Y(f)$ obtenido en la parte a) salvo por la diferencia en su amplitud.

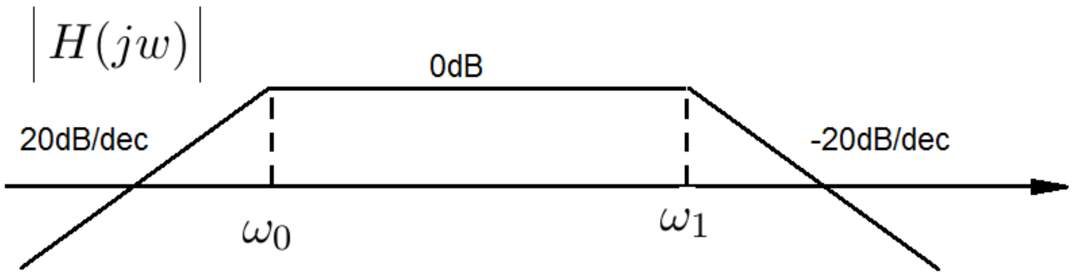
Parte c)

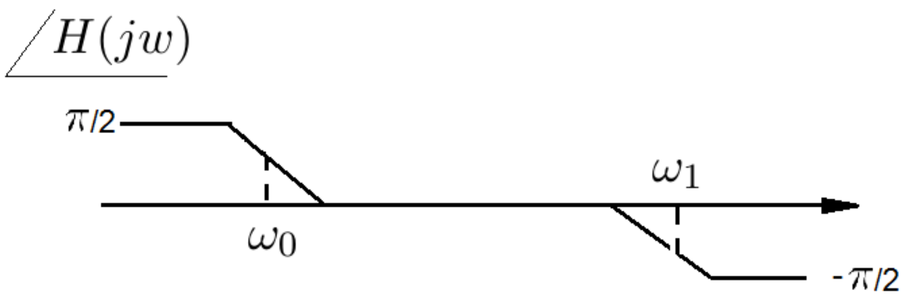
Para $\omega \ll \omega_0 \ll \omega_1$ se aproxima $H(j\omega) \simeq j\omega\omega_1/(\omega_0\omega_1) = j\omega/\omega_0$ con módulo creciente a $20dB$ por decada y ángulo $\pi/2$.

Para $\omega_0 \ll \omega \ll \omega_1$ se aproxima $H(j\omega) \simeq j\omega\omega_1/(j\omega\omega 1) = 1$ con módulo en $0dB$ (no amplifica ni atenua) y ángulo 0.

Para $\omega_0 \ll \omega_1 \ll \omega$ se aproxima $H(j\omega) \simeq j\omega\omega_1/(j\omega)^2 = \omega_1/(j\omega)$ con módulo decrecente a $20dB$ por década y ángulo $-\pi/2$.

Por lo tanto los diagramas de Bode asintóticos toman la forma





Para que el espectro de $z(t)$ sea idéntico al de $y(t)$, debe filtrarse la señal $u(t)$ con un filtro pasabanda ideal $H_{ideal}(j\omega)$, de modo de que solo quede el primer armónico centrado en f_c que se muestra en la figura de la parte b). Si el filtro pasabanda tiene frecuencias de corte f_0 y f_1 entonces deberán elegirse estas frecuencias para que $f_0 \in (W, f_c - W)$ y $f_1 \in (f_c + W, 3f_c - W)$ de modo de filtrar el primer armónico. Si existe la restricción de que $f_1 = f_0 + 2W$ entonces la única elección que hace caer f_0 y f_1 en estos rangos es $f_0 = fc - W$, o su equivalente en radianes por segundo

$$\omega_0 = 2\pi(f_c - W).$$

Si el filtro $H_{ideal}(j\omega)$ tiene amplitud 1 ($0dB$), entonces la amplitud del primer armónico se mantendrá en AAs/π por lo que para igualar la amplitud del espectro $Y(f)$ en la parte a) se deberá imponer $A_s/\pi = A_c/2$, es decir

$$A_s = \pi A_c/2.$$

Finalmente al usar $H(j\omega)$ en lugar de $H_{ideal}(j\omega)$ se tendrá una solución aproximada debido a las variaciones continuas de atenuación y desfasaje del filtro no ideal. En particular la elección de frecuencias de corte $\omega_0 = 2\pi(f_c - W)$ y $\omega_1 = 2\pi(f_c + W)$ no cumplen que $\omega_0 \ll \omega_1$ con lo que no habrá una banda pasante bien definida y la atenuación del filtro $H(j\omega)$ no llegará a $0dB$. Para un ajuste más fino de la amplitud, puede considerarse $\omega \simeq \omega_0 \simeq \omega_1$ y aproximar $H(j\omega) \simeq j(\omega_0)\omega_1/(j\omega_1 + \omega_1)(j\omega_0 + \omega_0) = j/(1+j)^2 = 1/2$. Luego, para compensar esta atenuación puede duplicarse la amplitud de la onda cuadrada, es decir

$$A_s = \pi A_c.$$