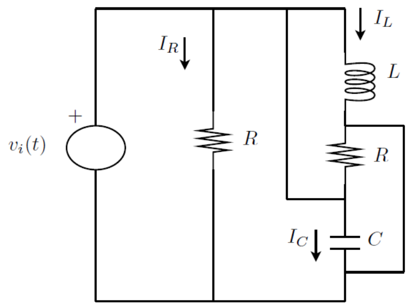
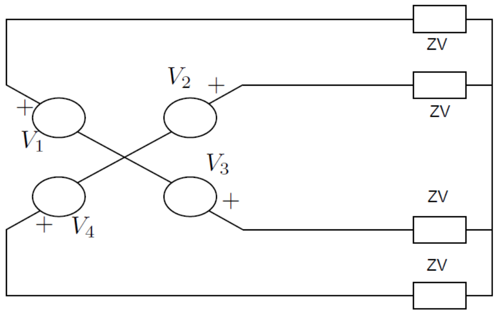
Sistemas Lineales 1

Examen de julio de 2016

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1





(a) Sea el circuito de la figura de la izquierda, donde $v_i(t) = \sqrt{2}\,.\,220.\cos(\omega t)$, $\omega = 100\pi rad/s$, $L = 50mHy$, $R = 75\Omega$.

i) Hallar una expresión para la impedancia Z_v vista por la fuente.

ii) Calcular el valor del condensador C, si se sabe que $|I_L| = 3|I_C|$, donde I_L e I_C son los fasores de corriente por L y C respectivamente.

iii) Ubicar en un diagrama fasorial a V_i (fasor de tensión de la fuente), I (fasor de corriente entregada por la fuente), I_R (fasor de corriente por la resistencia R conectada a la fuente), I_L e I_C.

iv) Hallar las potencias activa y reactiva consumidas a la fuente.

(b) Se considera el circuito **tetra-fásico** de la figura de la derecha. Se tiene que

$$v_1(t) = \sqrt{2}\,.\,220.\cos(\omega t) \quad , \quad v_2(t) = \sqrt{2}\,.\,220.\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v_3(t) = \sqrt{2}\,.\,220.\cos\left(\omega t - \pi\right) \quad , \quad v_4(t) = \sqrt{2}\,.\,220.\cos\left(\omega t - \frac{3\pi}{2}\right)$$

i) Hallar los fasores de las corrientes de línea I_1, I_2, I_3, I_4 y realizar un diagrama fasorial que los involucre junto con los fasores de la fuente tetrafásica.

ii) Calcular **gráficamente** las siguientes tensiones compuestas: U_{12}, U_{23} y U_{42}, agregarlas al diagrama fasorial y dar sus expresiones temporales.

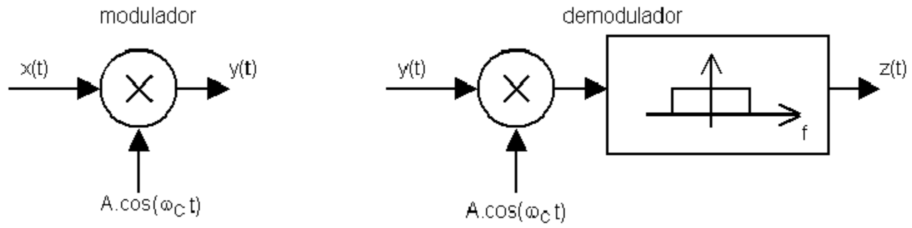
iii) Hallar las potencias totales activa y reactiva consumidas al sistema de fuentes **aplicando del Teorema de Blondell**.

iv) Hallar el valor de los condensadores C^* que, conectados en estrella, compensan el factor de potencia del sistema tetra-fásico. Mostrar que debe cumplirse la identidad $C^* = nC$, para un natural n que se hallará.

Problema 2

(a) Definir la energía de una señal.

(b) Enunciar el Teorema de Parseval para señales de energía finita.



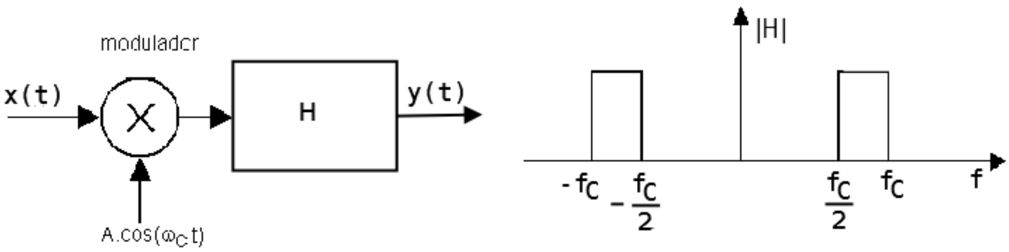
Considere el modulador y el demodulador de AM mostrados en la figura de arriba, con $\omega_C = 2\pi f_C$. Se sabe que $x(t)$ es una señal de energía finita, de módulo menor o igual que 1 y de transformada de Fourier $X(f)$ real y de banda acotada W, con $W \ll \frac{f_C}{2}$. El filtro pasabajos ideal de ganancia unitaria del demodulador tiene frecuencia de corte $\frac{f_C}{2}$.

(c) Dibuje los espectro de las señales $y(t) = x(t).A.\cos(\omega_C t)$ y $z(t)$.

(d) Halle la relación **exacta** entre las energías de las señales $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$.

(e) Se modifica el modulador, sustituyéndolo por el esquema mostrado en la figura de abajo, denominado *modulador de banda lateral única* (SSB por sus siglas en inglés), donde se ha agregado un filtro pasabandas ideal de ganancia unitaria. Repetir nuevamente la parte anterior, hallando la nueva relación **exacta** entre las energías de $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$.

Se sugiere ser cuidadoso calculando las energías, ya que se pide la relación exacta, y utilizar una prolija representación gráfica.

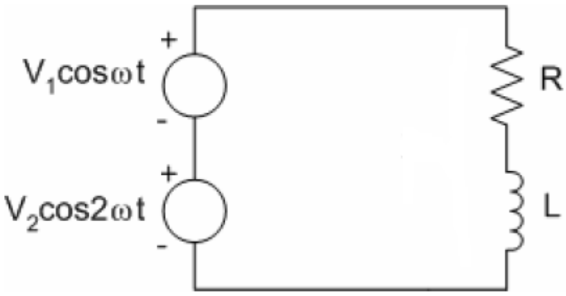


Sistemas Lineales 1

Examen de julio de 2016

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1



En el circuito de la figura, calcular:

(a) la corriente $i(t)$ que circula por la carga formada por la resistencia en serie con la inductancia.

(b) la potencia instantánea disipada en la carga.

(c) la potencia media disipada en la carga.

Recordar la expresión: $\cos(a).\cos(b) = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$

Pregunta 2

(a) Definir el producto convolución en distribuciones.

(b) A partir de la definición, probar que $T * \delta = T$ para $T \in \mathcal{D}'$.

(c) A partir de la definición, probar que $T * \delta' = T'$ para $T \in \mathcal{D}'$.

(d) Probar que si $T, S \in \mathcal{D}'$ tales que existe su convolución, entonces

$$(T * S)' = T' * S = T * S'$$

Pregunta 3

(a) Hallar la respuesta en régimen de un sistema lineal de transferencia en régimen $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1}$ para la entrada $e(t) = A.sen(t)$, señalando las relaciones de amplitud y fase entre la entrada y la salida.

(b) El mismo sistema se excita con una onda cuadrada simétrica de periodo $T = 4\pi$ segundos. Hallar una expresión analítica para la respectiva respuesta en régimen. Justifique bien en caso de usar aproximaciones.

Pregunta 4

Sea $\omega_0 > 0$. Se considera la siguiente transferencia en régimen sinusoidal

$$H(j\omega) = 10\omega_0 \frac{j\omega + \omega_0}{(10\omega_0 - j\omega).(\omega_0 + j10\omega)}$$

(a) Realizar los diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase de $H(j\omega)$. Explicitar y justificar las aproximaciones realizadas e indicar en los diagramas las abscisas, ordenadas y pendientes notables.

(b) Se considera la frecuencia ω_1 que está tres octavas por encima de $10\omega_0$.

i) Hallar el valor exacto de la ganancia que introduce el sistema a dicha frecuencia de trabajo.

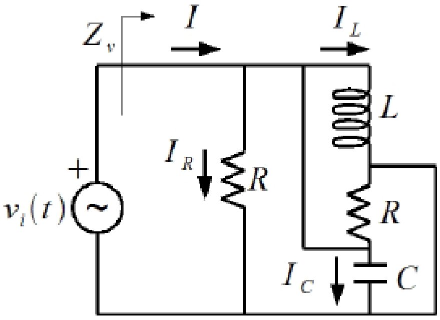
ii) Hallar el valor aproximado de $|H(j\omega_1)|$ de acuerdo al diagrama construido en la primera parte.

iii) Calcular la distancia en decibeles entre el diagrama real y el asintótico de módulo en la frecuencia ω_1.

Solución

Problema 1

(a) I) Calculamos la impedancia vista desde la fuente Z_v, observando que todos los componentes, presentan el mismo potencial entre sus bornes.



Como todos los elementos del circuito se encuentran en paralelo con la fuente, la impedancia vista por la fuente resulta:

$$Z_v = R||R||Lj\omega||\frac{1}{Cj\omega}$$

Operando con los paralelos, obtenemos:

$$\boxed{Z_v = \frac{RL(j\omega)}{R\left[LC(j\omega)^2+1\right]+2L(j\omega)}} \quad (1)$$

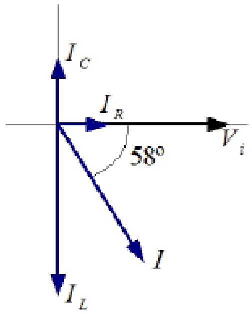
II) Sabemos que $|I_L| = 3|I_C|$, por otro lado, podemos calcular dichas corrientes como:

$$|I_L| = \frac{V_i}{L\omega} \quad \text{y} \quad |I_C| = V_i \cdot C\omega$$

Finalmente como $\omega = 100\pi$ y $L = 50mHy$ obtenemos:

$$C = \frac{1}{3L\omega^2} \Rightarrow \boxed{C = 67,5\mu F}$$

III) Con el valor de C calculado en la parte anterior, y la expresión de la impedancia vista, podemos calcular el valor de las corrientes por los distintos componentes del circuito.



$$I = \frac{V_i}{Z_v} \Rightarrow \boxed{I = (5,86 - j9,33)A = 11A\angle -58^o}$$

$$I_R = \frac{V_i}{R} \Rightarrow \boxed{I_R = 2,93A\angle 0^o}$$

$$I_L = \frac{V_i}{Lj\omega} \Rightarrow \boxed{I_L = 14A\angle -90^o}$$

$$I_C = V_i \cdot j\omega C \Rightarrow \boxed{I_C = 4,66jA = 4,66\angle 90^o}$$

IV) Una vez obtenido el fasor de corriente, podemos calcular la potencia activa y reactiva entregada por la fuente como[a] $P = Re[V \cdot \bar{I}]$ y $Q = Im[V \cdot \bar{I}]$.

$$P = \frac{V_i^2}{\frac{R}{2}} \Rightarrow \boxed{P = 1289W}$$

$$Q = \frac{V_i^2}{L\omega} - C\omega V_i^2 \Rightarrow \boxed{Q = 2053Var}$$

(b) El sistema tetra-fásico, es equilibrado y perfecto; podemos estudiar es circuito, estudiando el equivalente monofásico como se muestra en la figura 5.

I) Trabajando con el circuito monofásico equivalente, podemos calcular fácilmente las corrientes I_i.

[a] recordemos que estamos trabajando con los valores eficaces.

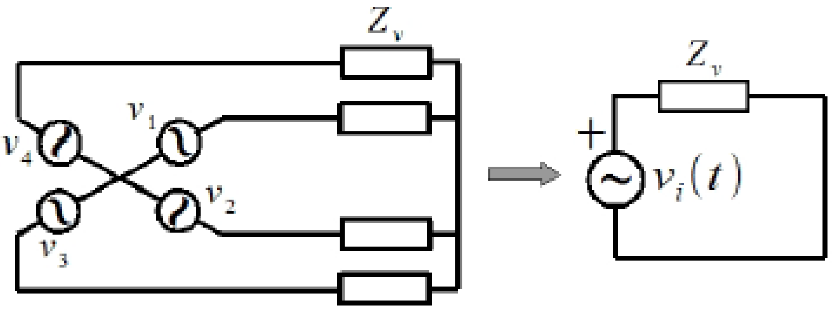
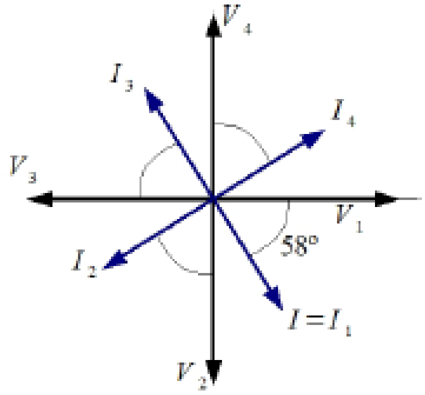
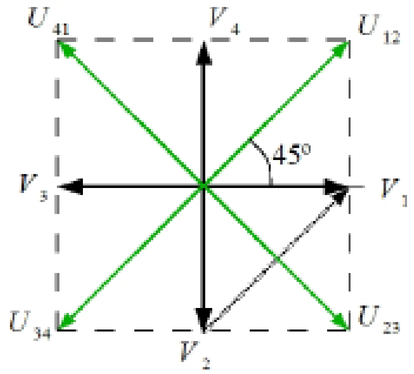


Figura 5: Equivalente monofásico



$$I_i = \frac{V_i}{Z_v} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = I = 11A\angle -58^o \\ I_2 = 11A\angle -58^o - 90^o \\ I_3 = 11A\angle -58^o - 180^o \\ I_4 = 11A\angle -58^o - 270^o \end{cases}$$

II) Para calcular las tensiones de línea, recordemos que $U_{ij} = V_i - V_j$, si realizamos dicha operación, gráficamente obtenemos:



$$\boxed{\begin{aligned} U_{12} &= \sqrt{2}(\sqrt{2}\,220V)\,\cos(\omega t + 45^o) \\ U_{23} &= \sqrt{2}(\sqrt{2}\,220V)\,\cos(\omega t + 45^o - 90^o) \\ U_{34} &= \sqrt{2}(\sqrt{2}\,220V)\,\cos(\omega t + 45^o - 180^o) \\ U_{41} &= \sqrt{2}(\sqrt{2}\,220V)\,\cos(\omega t + 45^o - 270^o) \end{aligned}}$$

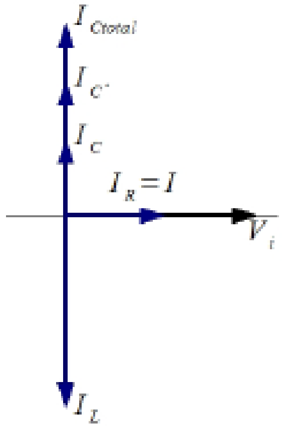
III) Aplicamos el teorema de Blondell, tomando como referencia a la línea 2. Ya conocemos las tensiones compuestas y las corrientes de línea necesarias para el cálculo.

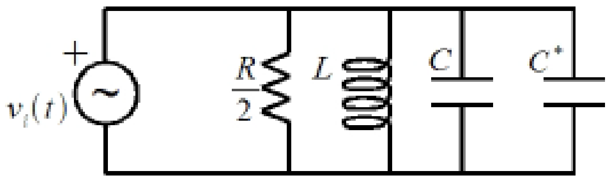
$$P = Re\left[U_{12}I_1 + U_{32}I_3 + U_{42}I_4\right] \Rightarrow \boxed{P = 5156W}$$

$$Q = Im\left[U_{12}I_1 + U_{32}I_3 + U_{42}I_4\right] \Rightarrow \boxed{Q = 8212Var}$$

Otra manera de realizar este cálculo, consiste en tomar como punto de referencia el centro de las fuentes. En ese caso, $U_{ir} = V_i$ y las corrientes coinciden con las de fase. El cálculo se reduce a $P = 4Re[V_1 \cdot I_1] = 4P'$, donde P' coincide con la calculada en la parte a.

IV) En primer lugar, trabajemos con el equivalente monofásico, calculamos el condensador necesario, para que en paralelo con la impedancia existente, la corriente por la fuente sea colineal con la tensión. Sabemos que $|I_L| = 3|I_C|$, para que la corriente quede colineal con la tensión, debemos incluir un condensador en paralelo de modo que $|I_L| = |I_{C_{tot}}|$. Como los condensadores en paralelo, se comportan de manera equivalente a un condensador de valor igual a la suma, si fijamos $C_{total} = 3C$ tendremos una corriente por el condensador 3 veces mayor, como se pretende. Como $C_{total} = C^* + C = 3C$ entonces $\boxed{C^* = 2C}$.





Problema 2

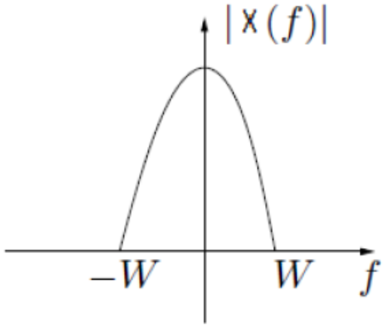


Figura 1: Espectro de x.

(a) Ver definición en las notas de teórico.

(b) Ver enunciado y demostración en las notas de teórico.

(c) Sabemos que la TdF transforma el producto ordinario en el producto convolución, por lo que la relación entre $X(f)$ e $Y(f)$ viene dada por:

$$Y(f) = \mathcal{F}\left[x(t).A\cos(\omega_C t)\right](f) = X(f) * \mathcal{F}\left[A\cos(\omega_C t)\right](f)$$

Sabemos también que

$$\mathcal{F}\left[A\cos(\omega_C t)\right](f) = \frac{\delta(f - f_C) + \delta(f + f_C)}{2}$$

siendo $\omega_C = 2\pi f_C$. Además, convolucionar una señal con una delta corrida es correr la señal, por lo que

$$Y(f) = \frac{A}{2}.\left[X(f - f_C) + X(f + f_C)\right]$$

Con la relación $f_C \gg W$, se obtiene el espectro de Y que se muestra en la figura.

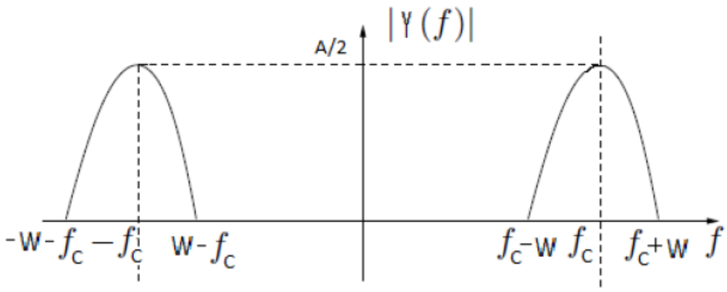


Figura 2: Espectro de y.

(d) La energía de una señal se define como

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Por el Teorema de Parseval, sabemos que esta energía puede calcularse también a partir del espectro, como

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Observando el espectro de y, puede verse que a menos de un factor de escala, el espectro duplica el de x, por lo que

$$E(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y(f)|^2 df = \int_{-W-f_C}^{W-f_C} |Y(f)|^2 df + \int_{-W+f_C}^{W+f_C} |Y(f)|^2 df = 2\int_{-W+f_C}^{W+f_C} |Y(f)|^2 df$$

$$= 2\int_{-W+f_C}^{W+f_C} \left|\frac{A}{2}X(f)\right|^2 df = \frac{A^2}{2}E(x)$$

de donde

$$\boxed{\frac{E(y)}{E(x)} = \frac{A^2}{2}}$$

En la demodulación, se produce un esquema similar al ya visto para $y(t)$, solo que en este caso el espectro que se mueve hacia la izquierda y la derecha es precisamente el de $y(t)$. La señal previa a la entrada del filtro pasabajos ideal tiene entonces tres componentes, todas de ancho $2W$: una centrada en $-2f_C$, otra centrada en 0 y otra centrada en $2f_C$. Las dos alejadas del origen se multiplican por $\frac{A^2}{4}$, en tanto la componente central se multiplica por $\frac{A^2}{2}$ (verificarlo!!!). Al filtrarla, sólo pasa la componente de baja frecuencia. La energía de $z(t)$ vale entonces

$$E(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |Z(f)|^2 df = \int_{-W}^{W} \left|\frac{A^2}{2}X(f)\right|^2 df = \frac{A^4}{4}E(x)$$

(e) En esta parte se repite el razonamiento de la parte anterior, con el cuidado de incorporar el filtro pasabandas ideal del modulador. Éste elimina las componentes de más alta frecuencia de la señal $y(t)$ (mayores en módulo a f_C). Al demodular, se obtiene antes del filtro pasabajos una señal similar a la de la parte anterior, salvo que en este caso las tres componentes tienen el mismo factor multiplicando. O sea, la componente central es idéntica al espectro de $x(t)$, pero multiplicado por $\frac{A^2}{4}$. La respectiva energía es:

$$E(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |Z(f)|^2 df = \int_{-W}^{W} \left|\frac{A^2}{4}X(f)\right|^2 df = \frac{A^4}{16}E(x)$$