Sistemas Lineales 1

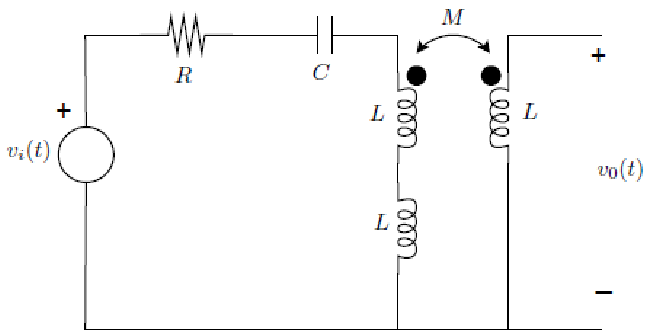
Examen de julio de 2015

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

(a) Se considera un transformador perfecto funcionando en régimen sinusoidal. Mostrar que la transferencia en régimen entre la tensión del primario y la del secundario es constante, independiente de la frecuencia de trabajo y de la carga del secundario. Hallar dicha constante

Se considera ahora el circuito de la figura, en el que el transformador es perfecto.



(b) Hallar la transferencia en régimen

$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$$

y simplificarla para el caso

$$\frac{R}{L} = \frac{1}{2RC} = \omega_0 \quad > 0$$

(c) Deducir y bosquejar los Diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$, **poniendo particular cuidado en definir claramente las frecuencias críticas involucradas**.

(d) Calcular el módulo y la fase de $H(j\omega_0)$ e incluir dicha información en los Diagramas asintóticos, bosquejando los reales.

(e) Hallar, si existe, una frecuencia de trabajo a la cual el sistema introduzca una **atenuación** de $3db$

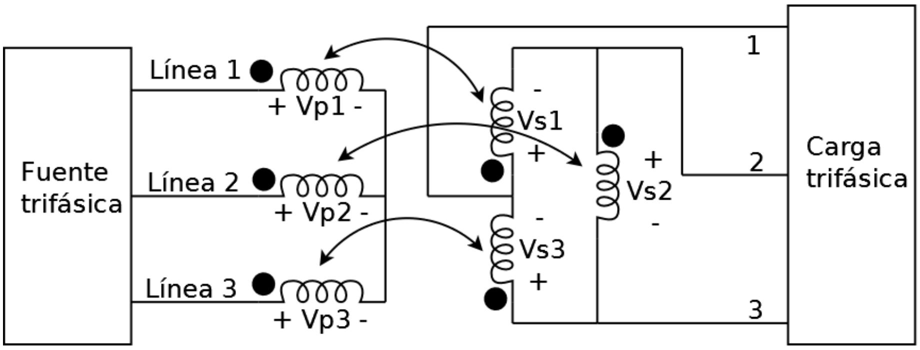
(f) Hallar las respectivas respuestas en régimen para las siguientes entradas

i) $v_1(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \pi/2)$;

ii) $v_2(t) = A_2 \cos(10\omega_0 t)$;

iii) $v_3(t) = A_3 \cos\left(\frac{\omega_0}{2} t + \pi/2\right)$;

Problema 2



Se tiene un sistema trifásico de fuentes 50Hz. Es equilibrado y perfecto y entrega una tensión compuesta (entre líneas) de 10392 V eficaces. Se tiene también una carga trifásica, de la que se sabe que está conformada por tres cargas idénticas de impedancia Z, con factor de potencia de 0,8 inductivo, sin saber cómo están conectadas. Se decide modelar Z como el paralelo de una resistencia R y una inductancia L. Para determinar estos parámetros del modelo, se realiza un ensayo mediante el circuito que se indica en la figura. Los transformadores son ideales, de relación de vueltas primario-secundario:

$$\frac{n_1}{n_2} = 26$$

Se colocan dos vatímetros luego de los secundarios, siguiendo el *Método de los dos vatímetros*. La lectura de ambos vatímetros es

$$W_1 = 510W \qquad , \qquad W_2 = 1290W$$

Se pide:

(a) Determinar R y L (indicar bien cómo modela la carga trifásica).

(b) Realizar un diagrama fasorial en el que se muestren las tensiones de la fuente, las corrientes por los primarios, las tensiones de los secundarios y las corrientes que entran a la carga.

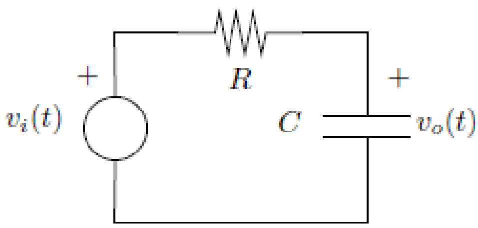
(c) Compensar la potencia reactiva consumida a la fuente trifásica. Indicar qué elementos colocaría, de qué valor y el respectivo esquema de conexión.

Sistemas Lineales 1

Examen de julio de 2015

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1



(a) En el circuito de la figura, hallar una distribución $T \in \mathcal{D}'$ tal que $v_i = T * v_o$.

(b) Hallar la respuesta al impulso del circuito, considerando como entrada la tensión $v_i(t)$ y como salida la tensión $v_o(t)$.

(c) Hallar la respuesta del circuito a un escalón de tensión en la entrada.

Pregunta 2

Se considera la transferencia en régimen $H(j\omega) = \frac{10\omega_0^2}{(j\omega+\omega_0)^2}$. Se pide

a) Deducir y dibujar el Diagrama asintótico de Bode de módulo de $H(j\omega)$.

b) Calcular la distancia entre el Diagrama de Bode asintótico de módulo y el Diagrama real, para las siguientes frecuencias: ω_0, $\omega_0/2$, $10\omega_0$. **Expresarlas en decibeles**.

Pregunta 3

Se considera un sistema trifásico con un sistema de fuentes en estrella, equilibrado y perfecto. Se define la potencia instantánea que entrega cada fuente de la manera usual , como el producto de la tensión en bornes de la fuente por la corriente que entrega la fuente. Se define la potencia instantánea trifásica como la suma de las potencias instantáneas de cada fuente.

a) Mostrar que si el sistema alimenta una carga equilibrada, entonces la potencia instantánea trifásica es constante.

b) Deducir, para el caso de una carga equilibrada, la fórmula $P = \sqrt{3}|U_{12}|.|I_1|.\cos(\varphi)$, siendo P la potencia activa trifásica, U_{12} el fasor de la tensión compuesta entre las líneas 1 y 2, en valores eficaces, I_1 el fasor de la corriente por la línea 1, en valores eficaces, y $\cos(\varphi)$ el factor de potencia de la carga.

(Recordar que $cos(a)cos(b) = \frac{1}{2}.[cos(a+b) + cos(a-b)]$)

Pregunta 4

Para una señal periódica $g(t)$, real y de valor medio nulo , de periodo τ, se define la *distorsión armónica* de la siguiente forma:

$$DA(g) = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{+\infty} |c_n(g)|^2}}{V_1}$$

siendo $\{c_n(g)\}$ los coeficientes de Fourier de la señal y V_1 el valor eficaz del primer armónico de $g(t)$.

a) Probar la identidad:

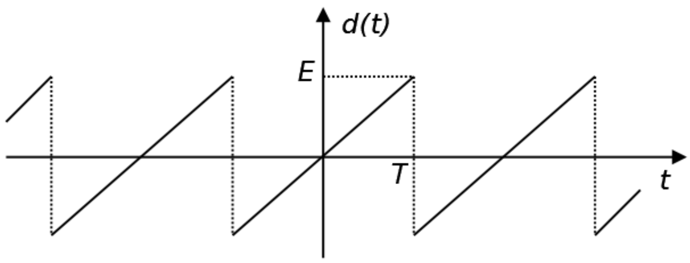
$$DA(g) = \sqrt{\frac{1}{4\tau|c_1(g)|^2}\int_0^\tau |g(t)|^2 - \frac{1}{2}}$$

b) Hallar la distorsión armónica para:

i) una sinusoide pura;

ii) para un diente de sierra de periodo τ y valor medio nulo de la figura, sabiendo que su potencia media vale $\frac{E^2}{3}$ y que los coeficientes de Fourier de su derivada segunda como distribución valen:

$$c_n(T''_g) = -\frac{Ejn\omega}{\tau} \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{\tau}$$



Solución

Problema 1

(a) Escribamos las ecuaciones del transformador. Denotemos por L_1 y L_2 a las bobinas del primario y del secundario respectivamente y, consecuentemente, las tensiones V_1 y V_2 y las corrientes I_1 e I_2. Sea M la mutua del trasformador. Entonces:

$$\begin{cases} V_1 &= L_1 j\omega I_1 + Mj\omega.I_2 \\ V_2 &= L_2 j\omega I_2 1 + Mj\omega.I_1 \end{cases}$$

Como el transformador es perfecto, se cumple que $\sqrt{L_1 L_2} = M$. Entonces:

$$\begin{cases} V_1 &= \sqrt{L_1}.\left[\sqrt{L_1} j\omega I_1 + \sqrt{L_2} j\omega.I_2\right] \\ \\ V_2 &= \sqrt{L_2}.\left[\sqrt{L_2} j\omega I_2 + \sqrt{L_1} j\omega.I_1\right] \end{cases}$$

Planteando el cociente, obtenemos:

$$\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{n_1}{n_2}$$

donde hemos usado que las inductancias son proporcionales al cuadrado del número de espiras en las bobinas. En conclusión, la ganancia en tensión de un transformador perfecto es constante, independiente de la frecuencia de trabajo, e independiente también del valor de la corriente I_2, es decir, independiente de la carga del secundario.

(b) Consideremos la malla de la fuente. Sea $I(j\omega)$ la corriente que entrega la fuente:

$$V_i(j\omega) = \left[R + \frac{1}{Cj\omega} + Lj\omega\right].I(j\omega) + V_1(j\omega)$$

siendo $V_1(j\omega)$ la tensión del primario del trafo perfecto. Para ver cuánto vale la tensión del secundario, planteamos las ecuaciones del transformador, para el cual sabemos que $M = L_1 = L_2 = L$:

$$\begin{cases} V_1 &= Lj\omega I_1 + Lj\omega.I_2 \\ V_2 &= Lj\omega I_2 1 + Lj\omega.I_1 \end{cases}$$

Como $I_2 = 0$, pues no hay carga en el secundario, entonces $V_1 = Lj\omega.I_1 = Lj\omega.I$. La hipótesis de $I_2 = 0$ es fundamental para poder calcular la transferencia pedida, ya que si no se cumpliera, la corriente I_2 sería una nueva entrada del circuito, junto con V_i.

Entonces, la ecuación de la malla de la fuente resulta en:

$$V_i(j\omega) = \left[R + \frac{1}{Cj\omega} + 2Lj\omega\right].I(j\omega)$$

De donde

$$I(j\omega) = \frac{V_i(j\omega)}{R + \frac{1}{Cj\omega} + 2Lj\omega} = \frac{Cj\omega}{RCj\omega + 1 + 2LC(j\omega)^2}.V_i(j\omega)$$

y

$$V_1(j\omega) = \frac{LC(j\omega)^2}{RCj\omega + 1 + 2LC(j\omega)^2}.V_i(j\omega)$$

Por la parte anterior, $V_0(j\omega) = V_2(j\omega) = V_1(j\omega)$, y llegamos a la transferencia:

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{LC(j\omega)^2}{1 + RCj\omega + 2LC(j\omega)^2}}$$

Trabajando un poco sobre la expresión de H, llegamos a

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{LC}{2LC}.\frac{(j\omega)^2}{\frac{1}{2LC} + \frac{R}{L}(j\omega) + (j\omega)^2} = \frac{1}{2}.\frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^2 + \frac{\omega_0}{2}(j\omega) + \omega_0^2}}$$

(c) Observando que $H(j\omega)$ es una transferencia real racional propia, para deducir los Diagramas de Bode adintóticos identificamos primero las frecuencias críticas del numerador y el denominador. En el numerador tenermos una raíz nula doble, en tanto en el denominador sabemos que hay dos raíces, por lo que debemos ver si son reales o complejas conjugadas. Hallándolas directamente u observando que la expresión del denominador conlleva una frecuencia natural $\omega_n = \omega_0$ y un factor de amortiguamiento $0 < \zeta = 1/4 < 1$, verificamos que hay un par de raíces complejas conjugadas. Hacemos un análisis asintótico por bandas:

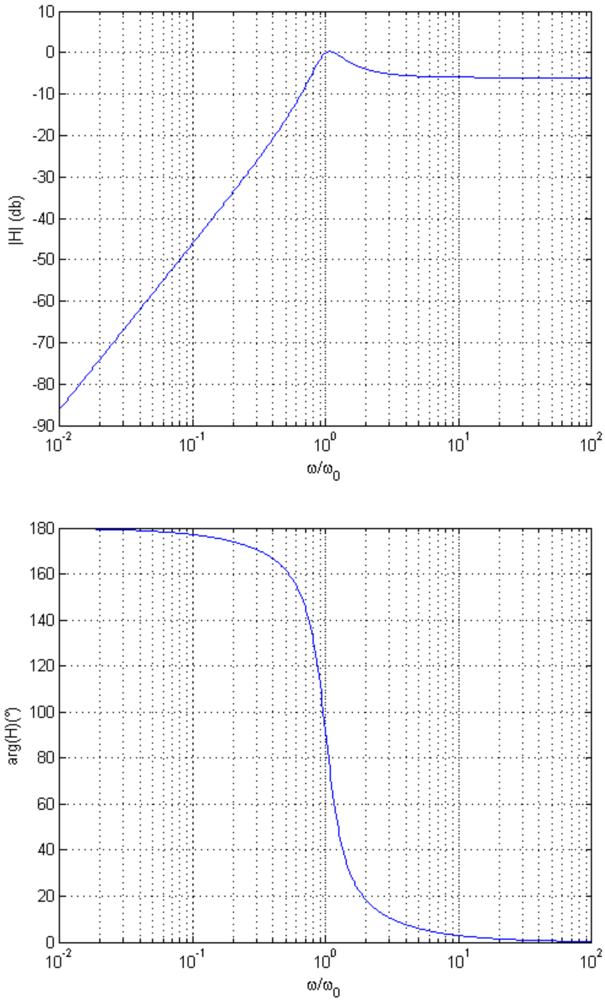
- $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow$

$$H(j\omega) \approx \frac{1}{2}.\frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2} = -\frac{\omega^2}{2}\omega_0^2 = \begin{cases} |H(j\omega)| & \approx \left[\log\left(\frac{1}{2\omega_0^2} + 40\log\omega\right]\right. db \\ arg(H(j\omega)) & \approx \pm\pi \end{cases}$$

- $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow$

$$H(j\omega) \approx \frac{1}{2}.\frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^2} = \frac{1}{2} = \begin{cases} |H(j\omega)| & \approx \log\frac{1}{2}\, db \approx -6db \\ arg(H(j\omega)) & \approx 0\ (\pm 2\pi) \end{cases}$$

A continuación se muestran los Diagramas de Bode asintóticos. Su construcción se completa con la información del valor real en la frecuencia crítica que se calcula en la parte siguiente.



(d)

$$H(j\omega_0) = \frac{1}{2}.\frac{(j\omega_0)^2}{(j\omega_0)^2 + \frac{\omega_0}{2}(j\omega_0) + \omega_0^2} = \frac{1}{2}.\frac{-1}{-1+\frac{j}{2}+1} = -\frac{1}{j} = j \begin{cases} |H(j\omega_0)| & \approx 0db \\ arg(H(j\omega_0)) & = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(e) De acuerdo al Diagrama de Bode de módulo, van a existir dos frecuencias positivas para las cuales se alcanza la ganancia deseada, una mayor y otra menor a ω_0. Pongamos una frecuencia incógnita $\omega_1 = \alpha.\omega_0$:

$$|H(j\omega_1)| = -3db \Rightarrow |H(j\omega_1)|^2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.\frac{|j\alpha.\omega_0|^4}{\left|(j\alpha.\omega_0)^2 + \frac{\omega_0}{2}(j\alpha.\omega_0) + \omega_0^2\right|^2} = \frac{1}{4}.\frac{|j\alpha.\omega_0|^4}{\left[(1-\alpha^2)\omega_0^2\right]^2 + \left[\frac{\alpha}{2}\omega_0^2\right]^2}$$

Entonces

$$2(1-\alpha^2)^2 + 2\left[\frac{\alpha}{2}\right]^2 = \alpha^4 \Rightarrow 2\alpha^4 - 4\alpha^2 + 2 + \frac{\alpha^2}{2} = \alpha^4 \Rightarrow \alpha^4 - \frac{7}{2}\alpha^2 + 2 = 0$$

Obtenemos una ecuación bicuadrada, con dos raíces positivas para α^2 (observar los signos de los coeficientes):

$$\alpha^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 8}\right] = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{4} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 & = & \sqrt{\frac{7+\sqrt{17}}{4}} \approx 1,67 \Rightarrow \omega_1 \approx 1,67\omega_0 \\ \alpha_2 & = & \sqrt{\frac{7-\sqrt{17}}{4}} \approx 0,85 \Rightarrow \omega_1 \approx 0,85\omega_0 \end{cases}$$

El resultado es consistente con lo previsto.

(f) Para hallar las respuestas en régimen pedidas, usamos la expresión básica para la respuesta en régimen de un sistema lineal ante una entrada sinusoidal pura. Si la entrada es $v_i(t) = A.\cos(\omega_i t + \varphi_i)$, la respuesta en régimen es

$$v_o(t) = A.\,|H(j\omega_i|\,.\cos(\omega_i t + \varphi_i + arg\,[H(j\omega_i)])$$

Enonces, aplicamos esta expresión para cada entrada.

i) De la parte d),

$$v_{o_1}(t) = A_1.\,|H(j\omega_0|\,.\cos\Big(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} + arg\,[H(j\omega_0)]\Big) = 2A_1.\cos(\omega_0 t + \pi) = -2.v_1(t)$$

ii) Como estamos trabajando a una década por encima de la frecuencia crítica, podemos usar los valores asintóticos:

$$v_{o_2}(t) = A_2.\,|H(j10\omega_0|\,.\cos(10\omega_0 t + arg\,[H(j10\omega_0)]) \approx \frac{A_2}{2}.\cos(10\omega_0 t)$$

Si usáramos los valores exactos, obtendríamos:

$$v_{o_2}(t) \approx 0,5044.A_2.\cos(10\omega_0 t + 3^o)$$

iii)

$$v_{o_3}(t) = A_3.\,|H(j\omega_0/2|\,.\cos\Big(\frac{\omega_0}{2}t + \frac{\pi}{2} + arg\,[H(j\omega_0/2)]\Big) \approx \frac{A_3}{2}.\cos\Big(\frac{\omega_0}{2}t + 90^o + 162^o\Big)$$

Problema 2

(a) Para modelar la carga trifásica cn tres cargas idénticas, tenemos que decidir si vamos a hacer un modelo en estrella o en triángulo. Esta elección no es crítica y requiere simplemente que luego se trabaje de forma consistente. Considerando que en el circuito los secundarios de los transformadores dan directamente la tensión compuesta que ve la carga, usaremos un modelo en triángulo.Además, tenemos que elegir cómo modelar cada carga del triángulo. Usaremos para la carga un modelo paralelo ($Z = R||Lj\omega$). Si bien esto lo expresa la letra, debe quedar claro que en principio es una elección arbitraria.

Con base en el Método de los dos vatímetros, sabemos que la potencia total trifásica consumida por la carga es $P_T = W_1 + W_2 = 1800W$, por lo que cada carga consume $P = 600W$. Como ya dijimos, la tensión en bornes de la carga (en triángulo) es la de los secundarios de los transformadores. Hallemos estas tensiones. Al estar el sistema equilibrado, las tensiones del primario tienen el mismo módulo y están desfasadas 120^o entre sí. Como la fuente trifásica entrega una tensión compuesta de $10392V$ eficaces, el módulo de la tensión del primario $|V_P|$ será $\sqrt{3}$ menor, prácticamente igual a $6000V$ eficaces. Por lo tanto, en los secundarios, obtenemos una tensión de valor eficaz $|V_S|$ igual a $6000 * n_2/n_1 \approx 230V$. Con el modelo en triángulo, y con $Z = R||Lj\omega$, tenemos que R disipa toda la activa, por lo que:

$$P = 600W = \frac{|V_S|^2}{R} \Rightarrow R = \frac{|V_S|^2}{P} \approx 88\Omega$$

Con el factor de potencia podemos sacar la potencia reactiva, ya que

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{|S|} \Rightarrow |S| = \frac{P}{\cos(\varphi)} = 750VA$$

De la identidad $|S|^2 = P^2 + Q^2$ obtenemos que la potencia reactiva vale

$$Q = \sqrt{|S|^2 - P^2} = 450VAR$$

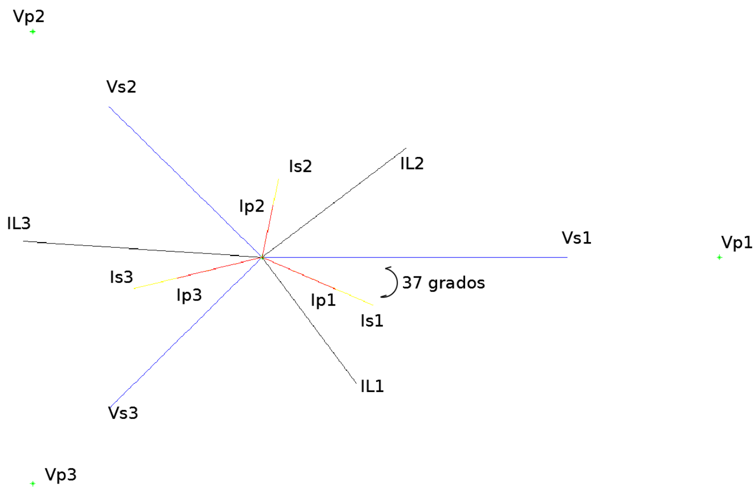
La reactiva es positiva, ya que el factor de potencia es inductivo. Toda la reactiva la consume la inductancia, por lo que

$$Q = 450VAR = \frac{|V_S|^2}{L\omega} \Rightarrow L = \frac{|V_S|^2}{Q\omega} \approx 0,37Hy$$

El argumento Φ de Z podemos calcularlo directamente de la proporción reactiva/activa:

$$tan(\Phi) = \frac{Q}{P} \Rightarrow \Phi = atan\left(\frac{Q}{P}\right) \approx 37^o$$

(b) Dibujamos el diagrama fasorial que ingluye corrientes y tensiones del primario, tensiones del secundario y corrientes de línea que entran a la carga. Las proporciones entre ambas lados del trafo no se mantuvieron, para que en el bosquejo se pudiera visualizar bien. Se tuvo en cuenta que las corrientes del primario son, a menos de una constante de proporcionalidad, opuestas a las del secundario, es decir, colineales con las corrientes que circulan por als cargas, por lo que el ángulo entre las tensiones y las corrientes del primario es el de la impedancia de carga. Las corrientes por las líneas salen por diferencia, teniendo un módulo $\sqrt{3}$ veces más grande que las corrientes del secundario, y estando desfasadas 30^o respecto de éstas.



(c) La potencia activa consumida a las fuentes es la misma que la consumida por la carga, ya que los transformadores ideales no consumen nada. Siendo el sistema inductivo, para compensar la reactiva debemos colocar condensadores que entreguen la reactiva necesaria para que la tensión y la corriente de cada fuente sean colineales. Colocamos un triángulo de condensadores en paralelo con la carga. Si lo ponemos del lado de los secundarios, la tensión en bornes de cada condensador será de $230V$ eficaces, lo que requiere un valor de condensador tal que

$$Q_C = -|V_S|^2.C\omega = -Q = -450VAR \Rightarrow C = \frac{450VAR}{(230V)^2\omega} \approx 27\mu F$$

Si pusiéramos los condensadores del lado de los primarios, la tensión en bornes en cada condensador sería de $10392V$ eficaces, por lo que el valor de condensador necesario sería de

$$C = \frac{450VAR}{(10392V)^2\omega} \approx 13nF$$