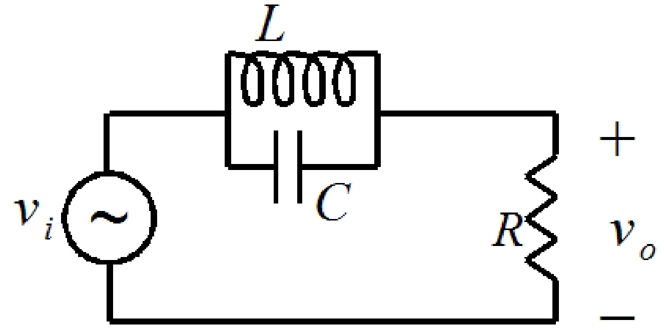
Sistemas Lineales 1

Examen de julio de 2014

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1



Se considera el sistema de la figura.

(a) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$, observando que resulta ser de orden 2, tanto en el denominador como en el numerador.

(b) Simplificar la expresión de $H(j\omega)$ sabiendo que se cumplen las relaciones $\omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{R}{L}$ y deducir detalladamente los Diagramas de bode asintóticos y dibujarlos.

(c) Calcular los límites laterales del $arg(H(j\omega))$ cuando $\omega \to \omega_0^{\pm}$ **e incluir esta información en los Diagramas de Bode, bosquejando los Diagramas reales**.

(d) Hallar la banda exacta de frecuencias $[\omega_1, \omega_2]$ para las cuales el sistema introduce una atenuación mayor a $3db$.

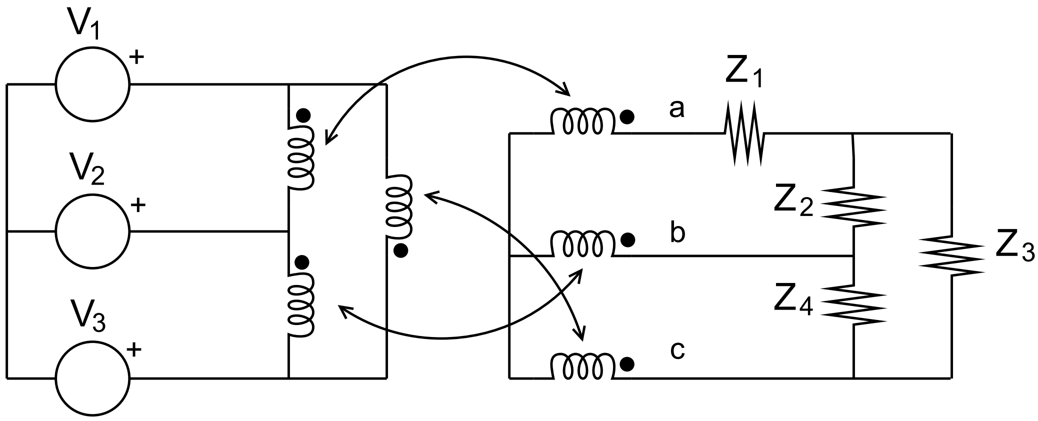
(e) i) Se envía una señal $\tilde{v}_i(t)$, de banda acotada, a través de un canal que introduce un tono intereferente, aditivo. A la salida del canal, se obtiene la señal $v^*(t) = \tilde{v}_i(t) + A\cos(\omega_{int}t$. Sea $\tilde{V}_i(f)$ la Transformada de Fourier de $\tilde{v}_i(t)$. Asumiremos que el soporte de $\tilde{V}_i(f)$ se encuentra en una banda de frecuencias mucho mayores a ω_{int}.

Mostrar que el circuito anterior puede utilizarse como una etapa de acondicionamiento de la señal $v^*(t)$, permitiendo eliminar completamente la interferencia, si se elige un valor adecuado para ω_0. Determinar ese valor.

ii) Para dicho valor de ω_0, calcular la salida en régimen del circuito ante la entrada

$$v^*(t) = 5V\left[\cos(\omega_2 t) + \cos\left(100\omega_2 t - \frac{\pi}{4}\right)\right] + 0{,}5V\cos(\omega_{int}t)$$

Problema 2



En el sistema de la figura, tenemos el sistema de fuentes trifásico:

$$v_1(t) = 220V\sqrt{2}\cos(100\pi t) \quad v_2(t) = 220V\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{2\pi}{3}\right) \quad v_3(t) = 220V\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{4\pi}{3}\right)$$

Los transformadores son ideales y tiene relación de vueltas 1:1.

(a) Si $Z_4 = j200\Omega$ y $Z_2 = 100\Omega$, ¿cuánto deben valer Z_1 y Z_3 para que el sistema de cargas sea equilibrado? (Estos valores se mantendrán en lo que sigue).

(b) Determinar las *tensiones compuestas del lado de la carga*: U_{ab}, U_{bc}, U_{ca}. Dibujar el equivalente monofásico del circuito.

(c) Bosquejar un diagrama fasorial en el que figuren los fasores de tensión de la fuente trifásica, las tensiones de los secundarios y las corrientes I_{Z_1} (corriente por Z_1) e I_{Z_4} (corriente por Z_4).

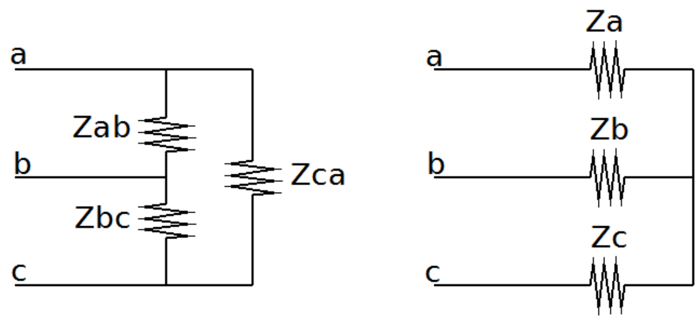
(d) Hallar las expresiones temporales de las corrientes I_{Z_1} e I_{Z_4}.

(e) Calcular las potencias aparente, activa y reactiva consumidas por el conjunto de las cargas.

(f) Compensar la potencia reactiva. Indicar qué componentes colocaría. Calcular su valor y especificar el esquema de conexión.

Sugerencia: Se recuerda que las configuraciones siguientes están relacionada por las expresiones:

$$Z_a = \frac{Z_{ab}Z_{ca}}{Z_{ab}+Z_{bc}+Z_{ca}} \qquad Z_b = \frac{Z_{ab}Z_{bc}}{Z_{ab}+Z_{bc}+Z_{ca}} \qquad Z_c = \frac{Z_{bc}Z_{ca}}{Z_{ab}+Z_{bc}+Z_{ca}}$$



Sistemas Lineales 1

Examen de julio de 2014

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

(a) ¿Cuándo se dice que un sistema no distorsiona?

(b) **Deducir** la condición de no distorsión para una sistema lineal de transferencia $H(f)$.

(c) Se considera un sistema de transmisión de señales en el cual existe un canal principal, que introduce una ganancia K_1 y un retardo t_1, y un canal secundario, debido a la reflexión, de ganancia K_2 y retardo t_2. Para $K_2 \ll K_1$, la transferencia total del sistema puede aproximarse por la expresión

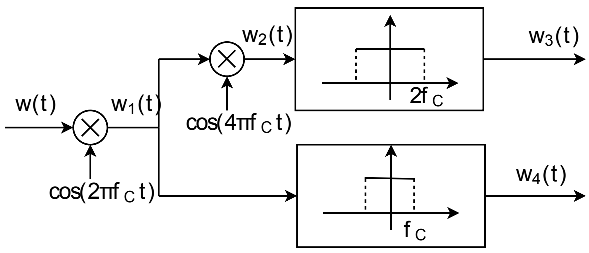
$$H(f) = K_1 e^{-j2\pi f t_1} . \left[1 + \frac{K_2}{K_1} \cos\left(2\pi f(t_2 - t_1)\right)\right]$$

i) Indicar si el sistema distorsiona en amplitud y/o fase.

ii) Es razonable esperar el fenómeno de intermodulación. **JUSTIFICAR**.

Pregunta 2

Considere el sistema de modulación de la figura, cuya entrada es la señal w es banda acotada W. Los filtros pasabajos son ideales, siendo $f_C \geq 2W$.



(a) Bosqueje, justificando, los espectros de las señales w, w_1, w_2, w_3 y w_4.

(b) Si E es la energía de la señal w, hallar las energías de las señales w_3 y w_4.

Pregunta 3

(a) Se considera un elemento lineal funcionando en régimen sinusoidal; a su tensión en bornes y la corriente que lo atraviesa las llamaremos respectivamente $v(t)$ e $i(t)$. **A partir de la definición de potencia media en régimen periódico** (P_m), deducir las siguientes fómulas:

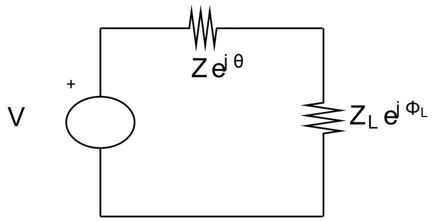
$$P_m = \mathcal{R}e(V\bar{I}) = |V|.|I|.\cos(\varphi)$$

siendo V e I los fasores asociados a la tensión $v(t)$ y a la corriente $i(t)$, en valores eficaces, y φ el argumento de la impedancia asociada al elemento lineal.

(b) Se considera el circuito de la figura, en el que se muestra una fuente sinusoidal, de valor eficaz E_S, conectada a una impedancia $Z_L e^{j\Phi_L} = R_L + jX_L$, ($R_L \geq 0$), a través de una línea modelada como una impedancia $Ze^{j\theta} = R + jX$ ($R > 0$).

i) Hallar la expresión de la potencia media en la carga (P_L), en función de E_S y las impedancias.

ii) Si la carga tiene módulo variable y fase constante, determinar cuál es el valor del módulo que maximiza P_R, en función de los parámetros del sistema.



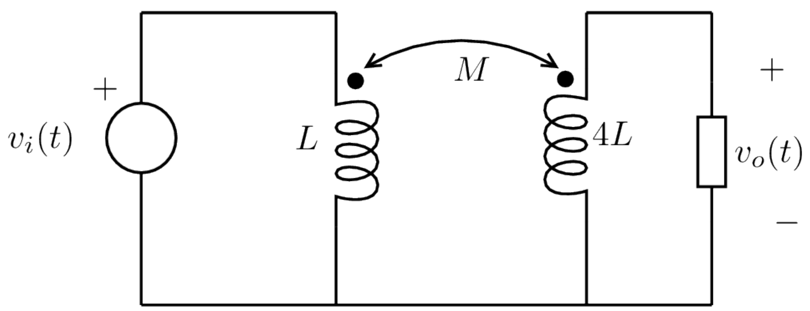
Pregunta 4

Se considera el transformador <u>**perfecto**</u> de la figura. El primario está alimentado por una fuente sinusoidal y en el secundario se ha conectado una impedancia Z.

(a) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal en tensión $H_T(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$; verificar que no depende de la impedancia conectada al secundario.

(b) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal en corriente $H_I(j\omega) = \frac{I_Z(j\omega)}{I_F(j\omega)}$, siendo I_Z el fasor de corriente por la carga del secundario e I_F la corriente entregada al primario.

(c) Si $Im(Z) = 0$, hallar la relación de fase entre el fasor de tensión de la fuente y el fasor de la corriente entregada por la fuente.



Solución

Problema 1

(a) Por divisor de tensión

$$H(\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{(j\omega)^2 + \frac{1}{LC}}{(j\omega)^2) + \frac{(j\omega)}{RC} + \frac{1}{LC}}$$

(b) Para $\omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{R}{L}$,

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + \omega_0^2}{(j\omega)^2) + \omega_0(j\omega) + \omega_0^2}$$

Observamos que el numerador tiene dos raíces imaginarias puras, conjugadas, $\pm j\omega_0$, en tanto el denominador tiene raíces complejas conjugadas, de módulo ω_0 y factor de amortiguamiento $\zeta = \frac{1}{2}$. Para encontrar los Diagramas de Bode asintóticos, hacemos un análisis por bandas:

- $$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \approx 1 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| & \approx & 0db \\ arg(H(j\omega) & \approx & 0\ rad \end{cases}$$

- $$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \approx 1 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| & \approx & 0db \\ arg(H(j\omega) & \approx & 0\ rad \end{cases}$$

Veamos qué pasa en la frecuencia crítica:

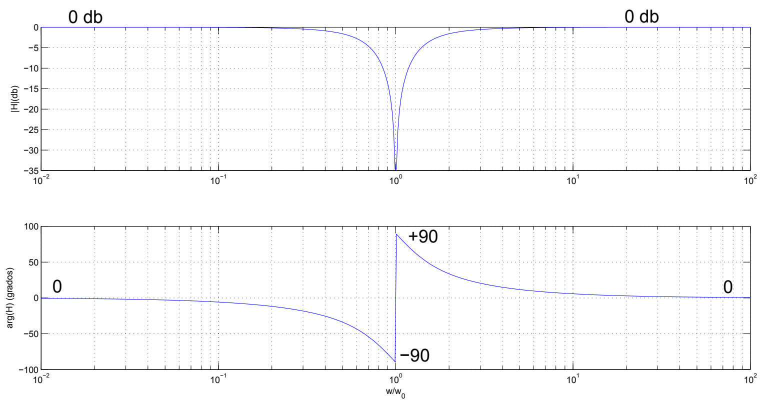
$$H(j\omega_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega_0)| & \approx & -\infty \\ arg(H(j\omega) & \approx & no\ existe \end{cases}$$

(c) Calculemos los límites laterales del argumento, en ω_0:

$$\lim_{\omega \to \omega_0^+} arg(H(j\omega)) = \lim_{\omega \to \omega_0^+} \left[arg((j\omega)^2 + \omega_0)) - arg((j\omega)^2\omega_0(j\omega) + \omega_0^2)\right] = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\omega \to \omega_0^-} arg(H(j\omega)) = \lim_{\omega \to \omega_0^-} \left[arg((j\omega)^2 + \omega_0)) - arg((j\omega)^2\omega_0(j\omega) + \omega_0^2)\right] = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

La siguiente figura muestra los Diagramas de Bode exactos, mostrando los límites calculados. (El circuito implementa un filtro *notch*; googlearlo!!)



(d) Como el módulo de la transferencia tiende a 0 en la frecuencia crítica, existirán dos frecuencias, que llamaremos ω_1 y ω_2, tales que

$$|H(j\omega_1)| = |H(j\omega_1)| = -3db = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dentro de esa banda, la atenuación que introduce el sistema, es decir, el módulo de la transferencia, será mayor a $3db$. Operando, encontramos esas frecuencias:

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \; (y\ su\ opuesta)$$

$$\omega_2 = \omega_0 \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \; (y\ su\ opuesta)$$

(e) i) La estructura espectral de la señal v^* se conforma con la estructura espectral de v_i más dos Deltas de Dirac en las frecuencias del tono puro interferente $\pm f_{int} = \pm\frac{\omega_{int}}{2\pi}$. Eligiendo $\omega_0 = \omega_{int}$, el circuito eliminará la señal interferente. El espectro de v_i prácticamente no se alterará, ya que está en una banda de frecuencias mucho mayores a la frecuencia interferente.

ii) Sabemos que para una entrada sinusoidal pura $A\cos(\omega_C t)$, la respectiva respuesta en régimen que entrega el circuito lineal será

$$|H(j\omega_C)|A\cos\left(\omega_C t + arg(H(j\omega_C))\right)$$

Para la entrada $v^*(t)$ dada, y aplicando linealidad, obtenemos la respuesta en régimen

$$v^*(t) = 5V\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\omega_2 t + \frac{\pi}{4}) + \cos\left(100\omega_2 t - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Problema 2

(a) Aplicando la sugerencia, tenemos que

$$Z_1 + \frac{Z_2Z_3}{Z_2+Z_3+Z_4} = \frac{Z_2Z_4}{Z_2+Z_3+Z_4} = \frac{Z_3Z_4}{Z_2+Z_3+Z_4}$$

De la segunda igualdad, obtenemos $Z_3 = Z_2 = 100\Omega$. De la otra

$$Z_1 = \frac{Z_2(Z_4-Z_3)}{Z_2+Z_3+Z_4} \Rightarrow Z_1 = (25+j75)\Omega$$

Entonces, la impedancia equivalente por fase resultante es

$$Z_{eq} = \frac{Z_3Z_4}{Z_2+Z_3+Z_4} = \frac{100.j200}{200+j200}\Omega = \frac{j100}{1+j}\Omega = 50j(1-j) = 50(1+j)\Omega = 50\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\Omega$$

Con estas impedancias y las tensiones de los secundarios podemos armar el equivalente monfásico del sistema!!!

(b) Denotemos por V'_a, V'_b y V'_c las tensiones de los secundarios, relativas a las líneas a, b y c respectivamente. Entonces, sabemos que, por ejemplo, $U_{ab} = V'_a - V'_b$. Por otro lado, al ser la relación de transformación unitaria, las tensiones de los secundarios coinciden con las de los primarios. Éstas, a su vez, son las tensiones compuestas a la salida de la fuente trifásica:

$$V'_1 = U_{12} \quad V'_2 = U_{23} \quad V'_3 = U_{31}$$

Calculemos $U_{12} = V_1 - V_2$. Sabemos que

$$V_1 = Ve^{j0} \quad V_2 = Ve^{j\frac{2\pi}{3}} \quad V_3 = Ve^{j\frac{4\pi}{3}}$$

con $V = 220$ Volts eficaces. Haciendo un diagrama fasorial, observamos que estos tres fasores conforman un triángulo isósceles, de ángulo mayor igual a 120^o. Esto resulta en

$$V'_1 = U_{12} = V\sqrt{3}e^{-j\frac{\pi}{6}} \quad V'_2 = U_{23} = V\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{2}} \quad V'_3 = U_{31} = V\sqrt{3}e^{j\frac{7\pi}{6}}$$

El retraso de 30^o surge de la secuencia en que están los fasores de la fuente trifásica. Entonces, si planteamos gráficamente la expresión $U_{ab} = V'_a - V'_b$, obtenemos un triángulo similar al anterior, de donde

$$U_{ab} = 3Ve^{-j\frac{\pi}{3}} \quad U_{bc} = 3V3e^{j\frac{\pi}{6}} \quad U_{ca} = 3Ve^{j\pi}$$

El siguiente diagrama fasorial resume las cuentas anteriores. Se incluyen también las corrientes de la parte que viene.

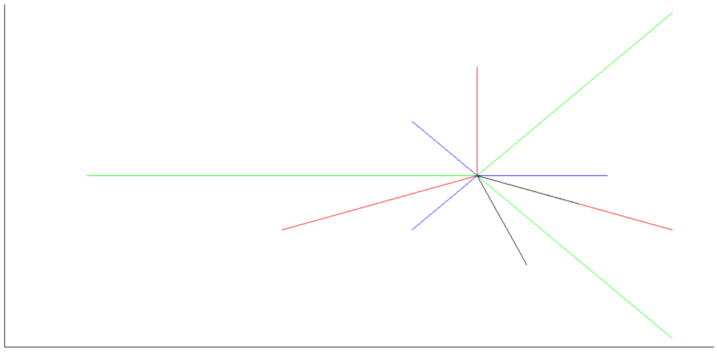


Figura 1: Diagrama fasorial: tensiones de las fuentes en azul, tensiones de lo secundarios en rojo, tensiones compuestas en verde, corrientes en negro.

(c) Para calcular la corriente I_{Z_1} usamos el equivalente monofásico. Directamente, obtenemos que

$$I'_{Z_1} = \frac{V'_1}{Z_{eq}} = \frac{U_{12}}{Z_{eq}}$$

Esta corriente se encuentra retrasada 45 grados respecto de U_{12}. Por otro lado, en el circuito original observamos que I_{Z_4} es la corriente por una impedancia con tensión en bornes U_{bc}. Entonces

$$I_{Z_4} = \frac{U_{bc}}{Z_4}$$

Este fasor es perpendicular a U_{bc}, retrasado 90 grados; resulta colineal con U_{12}.

(d) Las respectivas expresiones temporales son las siguientes

$$i_{Z_1} = \sqrt{2}|I_{Z_1}|.\cos\left(100\pi t + arg(I_{Z_1})\right) =$$

$$i_{Z_4} = \sqrt{2}|I_{Z_4}|.\cos\left(100\pi t + arg(I_{Z_4})\right) =$$

(e) Las potencias consumidas a la fuente trifásica podemos calcularlas del lado de las cargas, ya que los transformadores ideales no consumen. Entonces

$$\begin{aligned} S_T &= 3V_1'I_1' \\ P_T &= 3|I_1'|^2.re(Z_{eq}) \\ Q_T &= 3|I_1'|^2.im(Z_{eq}) \end{aligned}$$

(f) Observamos que la carga es inductiva. La compensación de la reactiva puede hacerse de varias maneras, puede podemos colocar una estrella o un triángulo de condensadores idénticos, en paralelo con el primario o con el secundario. Por ejemplo, si pusiéramos una estrella de condensadores en el secundario, el cálculo de los mismos sería el siguiente, hecho a partir del equivalente monofásico:

$$Q_C = |U_{12}|^2 C\omega = \frac{Q_T}{3} \Rightarrow C = \frac{Q_T}{3\omega|U_{12}|^2}$$