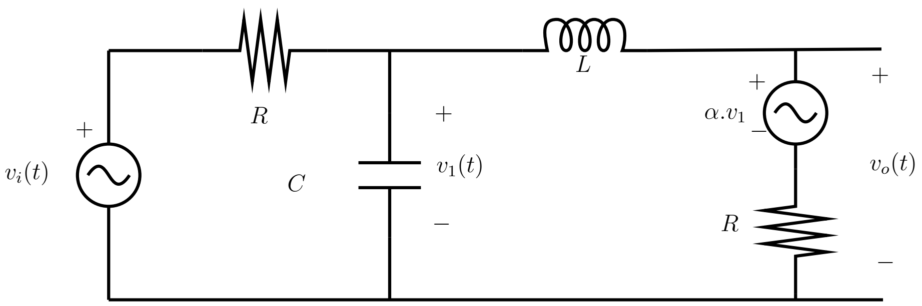
Sistemas Lineales 1

Examen de julio de 2013

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1



Se considera el sistema de la figura.

a) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$, observando que resulta ser real racional estrictamente propia, de orden 2 en el denominador y orden 1 en el numerador.

b) Simplificar la expresión de $H(j\omega)$ para $\alpha = -14$ y

$$\frac{R}{L} = \frac{1}{RC} = \frac{\omega_0}{4} > 0$$

y dibujar los Diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase de $H(j\omega)$, explicando detalladamente el proceso de obtención de los mismos.

c) Hallar $H(j\omega_0)$.

d) Hallar la ganancia en continua del sistema, expresada en db.

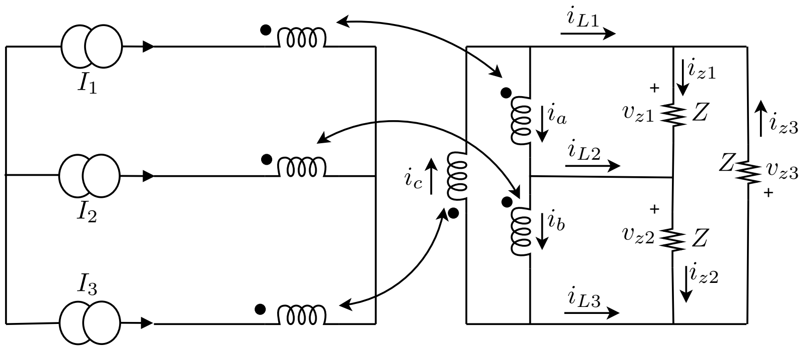
e) Hallar, si existe, una frecuencia de trabajo ω_1 a la cual el sistema presente una ganancia de $0db$.

f) Hallar, si existe, una frecuencia de trabajo a la cual la salida en régimen del sistema esté en contrafase con la entrada.

g) Hallar, si existe, una frecuencia de trabajo ω_3 que cumpla que si la entrada del sistema es $v_i(t) = A\cos(\omega_3 t)$, la salida en régimen del sistema es de la forma $v_o(t) = A.\cos(\omega_3 t + \varphi)$, con φ a determinar.

Justificar las aproximaciones que se realizan.

Problema 2



Se considera el circuito de la figura, en el cual los transformadores son ideales y la impedancia $Z = R + jL\omega$. Se cumple que: $R = \frac{5}{\sqrt{3}}\Omega$, $L = \frac{1}{20\pi}Hy$, $\frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\omega = 100\pi$,

$i_1(t) = 5A\sqrt{2}sen(\omega t)$
$i_2(t) = 5A\sqrt{2}sen(\omega t - 2\pi/3)$
$i_3(t) = 5A\sqrt{2}sen(\omega t + 2\pi/3)$

a) Calcular las corrientes: $i_a(t), i_b(t), i_c(t), i_{L1}(t), i_{L2}(t), i_{L3}(t), i_{Z1}(t), i_{Z2}(t), i_{Z3}(t)$.

b) Calcular: $v_{z1}(t), v_{z2}(t), v_{z3}(t)$.

c) Hallar la reactiva que consume TODO el circuito.

d) Compensar la reactiva consumida por el circuito, colocando elementos en estrella, indicando sus respectivos valores y el esquema de conexión.

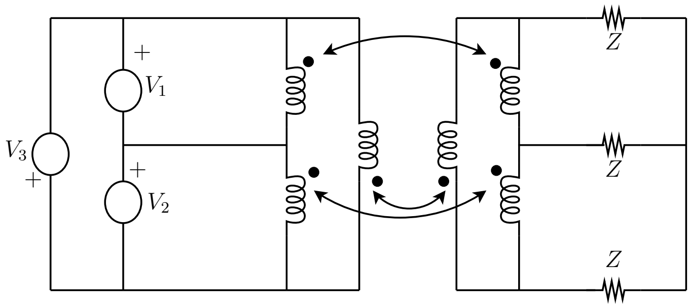
e) Calcula nuevamente las corrientes de la parte a), esta vez para el sistema compensado.

Sistemas Lineales 1

Examen de julio de 2013

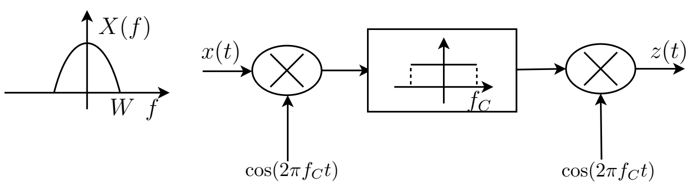
Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

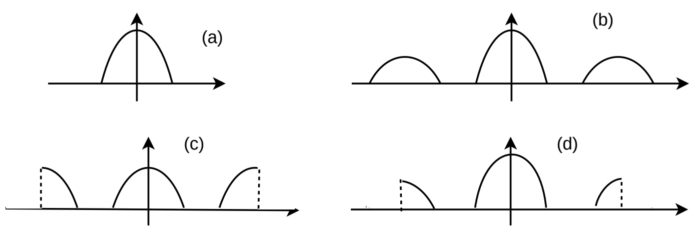


Se considera el circuito trifásico de la figura, donde el sistema de fuentes es equilibrado y perfecto, funcionando a $50Hz$. Los transformadores son ideales, cumpliéndose $n_1/n_2 = 2$. La carga trifásica consiste en tres cargas idénticas de impedancia Z, inductiva. Se pide compensar la potencia reactiva consumida al sistema de fuentes.

Pregunta 2



La figura muestra el espectro de la señal $x(t)$, de banda acotada $W \ll f_C$, y un sistema de modulación que incluye un filtro pasabajos ideal . Indicar cuál de lo siguientes espectros corresponde a la señal $z(t)$. Justificar!!



Pregunta 3

Se considera un sistema lineal de respuesta al impulso $h(t) = Y(t)e^{-t/\tau}$, $\tau > 0$, del cual se sabe también que admite respuesta en régimen.

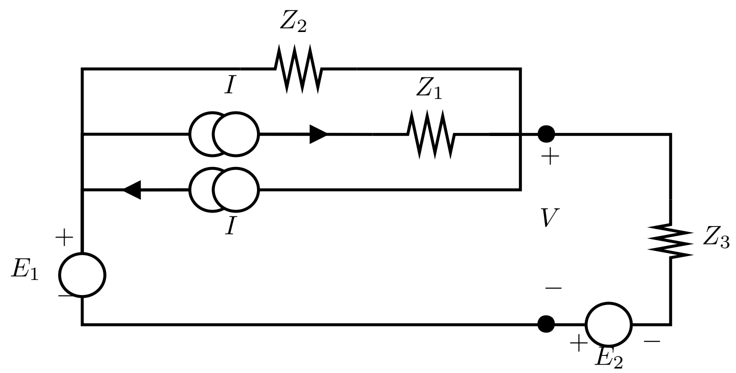
a) Hallar la respuesta del sistema para una entrada $e(t) = Y(t)$.

b) Hallar la Transformada de Fourier de $h(t)$.

c) Hallar la respuesta en régimen para la entrada $e(t) = A\cos\left(2\pi\frac{t}{\tau}\right)$.

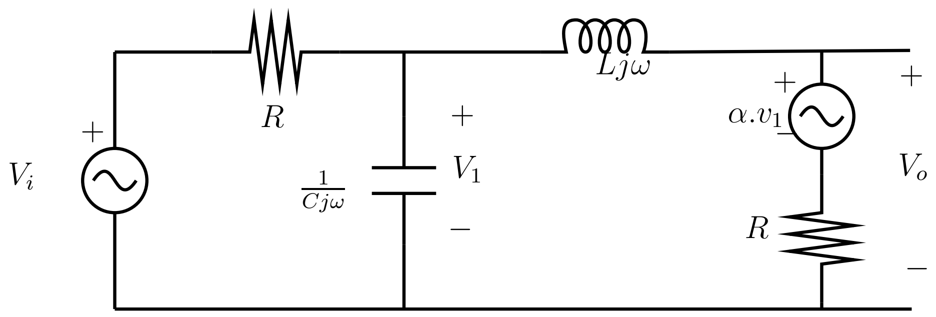
Pregunta 4

En el circuito en fasores de la figura, en el que todas las fuentes son sinusoidales e independientes y están en fase, calcular el fasor $V(j\omega)$.



Solución

Problema 1



a) Consideremos el circuito en fasores de arriba, para una frecuencia de trabajo genérica ω. Apliquemos el método de los nudos. Entonces, podemos plantear la Ley de Kirchoff de corrientes en el nudo central.

$$\frac{V_i - V_1}{R} = V_1 Cj\omega + \frac{V_1 - V_o}{Lj\omega} \Rightarrow V_i Lj\omega = V_1(Lj\omega + RLC(j\omega)^2 + R) - RV_o$$

Por otro lado, planteamos el nudo en V_o

$$\frac{V_1 - V_o}{Lj\omega} = \frac{V_o - \alpha.V_1}{R} \Rightarrow V_1 = \frac{(R + Lj\omega)}{(R + \alpha Lj\omega))} V_o$$

(Observar que en la primera ecuación, podría haber sido más sencillo plantear la corriente por la inductancia como $\frac{V_o - \alpha.V_1}{R}$). Sustituyendo V_1 en la primera ecuación, despejamos el cociente V_o/V_i.

$$H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{(R + \alpha Lj\omega)}{RLC(j\omega)^2 + (R^2C + L)(j\omega) + (2-\alpha)R} = \frac{\alpha L}{RLC} . \frac{\left((j\omega) + \frac{R}{\alpha L}\right)}{(j\omega)^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC}\right)(j\omega) + \frac{2-\alpha}{LC}}$$

b) Para $\alpha = -14$

$$H(j\omega) = \frac{-14}{RC} . \frac{\left((j\omega) - \frac{R}{14L}\right)}{(j\omega)^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC}\right)(j\omega) + \frac{16}{LC}}$$

Para $\frac{R}{L} = \frac{1}{RC} = \frac{\omega_0}{4} > 0$, tenemos que

$$\frac{1}{LC} = \frac{\omega_0^2}{16} \Rightarrow \frac{2-\alpha}{LC} = \frac{16}{LC} = \omega_0^2$$

Entonces

$$H(j\omega) = -\frac{7}{2} . \frac{\omega_0 \left(j\omega - \frac{\omega_0}{56}\right)}{(j\omega)^2 + \left(\frac{\omega_0}{2}\right)(j\omega) + \omega_0^2} = -\frac{7}{2} . \frac{\omega_n \left(j\omega - \frac{\omega_n}{56}\right)}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

con $\omega_n = \omega_0$ y $\zeta = \frac{1}{4}$, por lo que el denominador es de segundo orden, con raíces complejas conjugadas.

Para la construcción de los Diagramas de Bode asintóticos, las frecuencias críticas son: $\frac{\omega_n}{56}$ y ω_n. Realizamos una aproximación por bandas:

- $\omega \ll \frac{\omega_n}{56}$, entonces

$$H(j\omega) \approx -\frac{7}{2} . \frac{\omega_n \left(-\frac{\omega_n}{56}\right)}{\omega_n^2} = \frac{7}{112} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| & \approx & 20\log(\frac{7}{112})\, db \\ arg\, H(j\omega) & \approx & 0^o\ (\pm 2k\pi) \end{cases}$$

- $\frac{\omega_n}{56} \ll \omega \ll \omega_n$, entonces

$$H(j\omega) \approx -\frac{7}{2}.\frac{\omega_n\,(j\omega)}{(\omega_n^2)} = -\frac{7j\omega}{2\omega_n} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| & \approx & 20\log(\frac{7}{2\omega_n}) + 20\log(\omega)\; db \\ arg\; H(j\omega) & \approx & -90^o\;(\pm 2k\pi) \end{cases}$$

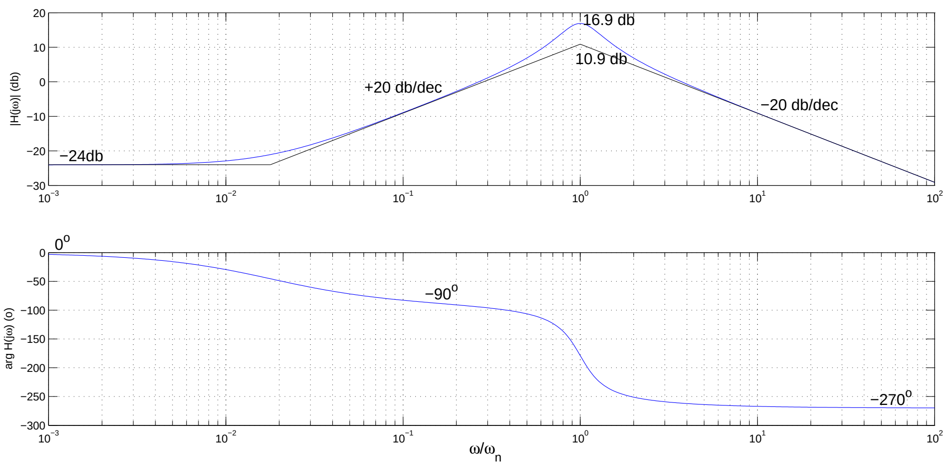
- $\omega \gg \omega_n$, entonces

$$H(j\omega) \approx -\frac{7}{2}.\frac{\omega_n\,(j\omega)}{(j\omega)^2} = -\frac{7\omega_n}{(2j\omega)} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| & \approx & 20\log(\frac{7\omega_n}{2}) - 20\log(\omega)\; db \\ arg\; H(j\omega) & \approx & +90^o\;(\pm 2k\pi) \end{cases}$$

A partir de este análisis, construimos los Diagramas de Bode asintóticos. Debemos determinar si la variación de fase de π radianes en la última transición es con adelanto o atraso de fase. Para ello, calculamos el argumento de H en una frecuencia intermedia. Elegimos $\omega = \omega_n$.

$$H(j\omega_n) = -\frac{7}{2}.\frac{\omega_n\left(j\omega_n - \frac{\omega_n}{56}\right)}{(j\omega_n)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega_n) + \omega_n^2} = -\frac{7}{2}.\frac{\left(j - \frac{1}{56}\right)}{2\zeta j} \Rightarrow arg\; H(j\omega_n) \approx \pm\pi$$

de donde vemos que la fase se retrasa π radianes, lo que es consistente con $\zeta > 0$. La siguiente figura muestra los Diagramas de Bode asintóticos y reales de H.



c) $H(j\omega_0) = 7\angle 1^o$.

d) La ganancia en continua del sistema, corresponde con el valor asintótico en baja frecuencia $H(j0) = \frac{7}{112} \approx -24db$.

e) Si a alguna frecuencia de trabajo ω_1 el sistema presenta una ganancia de $0db$, entonces se debe cumplir que $|H(j\omega_1)| = 1$. Entonces

$$|H(j\omega_1)|^2 = \frac{49}{4}.\frac{\omega_n^2\left(\omega^2 - \frac{\omega_n^2}{56^2}\right)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{49}{4}\omega_n^2\omega^2 - \frac{49\omega_n^4}{112^2} = \omega_n^4 + \omega^4 - 2\omega_n^2\omega^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2 \Rightarrow$$

$$\omega^4 + \omega^2\omega_n^2\left(4\zeta^2 - 2 - \frac{49}{4}\right) + \omega_n^4\left(1 + \frac{49}{112^2}\right) = 0$$

Tenemos entonces una ecuación bicuadrada en ω, que se puede ser escrita así, poniendo $x = (\omega/\omega_n)^2$:

$$x^2 + x\left(4\zeta^2 - 2 - \frac{49}{4}\right) + \left(1 + \frac{49}{112^2}\right) = 0$$

Nos interesan las raíces positivas. De la observación del Diagrama de Bode de módulo, vemos que deben haber dos soluciones, una menor a 1 y otra mayor a 1. Las respectivas raíces resultan ser:

$$x = \begin{cases} 13,9 \\ \\ 0,07 \end{cases} \Rightarrow \omega_1 = \begin{cases} 3,7\omega_n \\ \\ 0,27\omega_n \end{cases}$$

f) De la continuidad del argumento de H y sus valores asintóticos de baja y alta frecuencia se deduce que sí existe. Los cálculos anteriores muestran que será una frecuencia muy cercana a ω_n, la que puede tomarse por una buena aproximación, dada la separación entre las frecuencias críticas, superior a una década.

g) La frecuencia buscada aquí es una de las halladas en la parte e), ya que una ganancia de $0db$ equivale a la igualdad de las amplitudes entre la entrada y la salida. Para la mayor de ellas, el respectivo valor es aproximadamente $\varphi = 98{,}5^o = -261{,}5^o$.

Problema 2

a) Utilizando la relación de transformación resulta que:

$$\boxed{i_a(t) = 5A\sqrt{\frac{2}{3}}sen(\omega t + \pi)} \tag{1}$$

$$\boxed{i_b(t) = 5A\sqrt{\frac{2}{3}}sen(\omega t + \pi/3)} \tag{2}$$

$$\boxed{i_c(t) = 5A\sqrt{\frac{2}{3}}sen(\omega t + 5\pi/3)} \tag{3}$$

Utilizando KCL resulta que:

$$i_{L1} = i_c - i_a \tag{4}$$

$$i_{L2} = i_a - i_b \tag{5}$$

$$i_{L3} = i_b - i_c \tag{6}$$

Entonces:

$$\boxed{i_{L1}(t) = 5A\sqrt{2}sen(\omega t - \pi/6)} \tag{7}$$

$$\boxed{i_{L2}(t) = 5A\sqrt{2}sen(\omega t - 5\pi/6)} \tag{8}$$

$$\boxed{i_{L3}(t) = 5A\sqrt{2}sen(\omega t + \pi/2)} \tag{9}$$

Las corrientes por las cargas sabemos que se obtienen dividiendo las de línea entre $\sqrt{3}$ y sumando 30^o:

$$\boxed{i_{z1}(t) = 5A\sqrt{\frac{2}{3}}sen(\omega t)} \tag{10}$$

$$\boxed{i_{z2}(t) = 5A\sqrt{\frac{2}{3}}sen(\omega t - 2\pi/3)} \tag{11}$$

$$\boxed{i_{z3}(t) = 5A\sqrt{\frac{2}{3}}sen(\omega t + 2\pi/3)} \tag{12}$$

b) Aplicando la ley de Ohm se obtienen las tensiones en las cargas:

$$\boxed{v_{z1}(t) = 5V\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{10}{\sqrt{3}}sen(\omega t + \pi/3)} \quad (13)$$

$$\boxed{v_{z2}(t) = 5V\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{10}{\sqrt{3}}sen(\omega t - \pi/3)} \quad (14)$$

$$\boxed{v_{z3}(t) = 5V\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{10}{\sqrt{3}}sen(\omega t + \pi)} \quad (15)$$

c) La reactiva consumida por todo el circuito es:

$$Q = 3\frac{1}{2}Im(V_{zi}I_{zi}*) = 3\frac{1}{2}Im(5V\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{10}{\sqrt{3}}5A\sqrt{\frac{2}{3}}e^{j\pi/3}) = 125VAR \quad (16)$$

d) Si compensaramos en triángulo los condensadores serían tres veces más chico que los condensadores en estrella, por lo tanto el truco consiste en realizar la compensación en triángulo pero conectar el valor de los condensadores en estrella con valor al triple obtenido.

Anulando la parte imaginaria de la impedancia que quedaría en triángulo obtendríamos que:

$$C = \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} \quad (17)$$

Entonces:

$$C = 477\mu F \quad (18)$$

Pero al conectarlos en estrella tendrían valor:

$$\boxed{C = 1{,}431mF} \quad (19)$$

e) Las corrientes: $i_a(t), i_b(t), i_c(t)$ permanecen incambiadas y por lo tanto también las corrientes $i_{L1}(t), i_{L2}(t), i_{L3}(t)$. Para hallar las corrientes por las cargas $R + j\omega L$ se puede trabajar con los condensadores en triángulo de valor $C/3$. Sabemos que al estar en triángulo quedarán en paralelo con las impedancias Z. Además, las corrientes por el paralelo equivalente son iguales a las corrientes de línea divididas entre $\sqrt{3}$ y agregando un desfasaje de 30º. Para hallar la corriente por las cargas podemos plantear el divisor de corriente obteniendo que:

$$i_{zi} = \frac{1}{1 + (j\omega C/3)Z}i_{Li} \quad (20)$$

Luego sólo resta pasar al tiempo.