Sistemas Lineales 1

Examen de julio de 2012

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

a. En el circuito de la figura 1 calcular la transferencia $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$

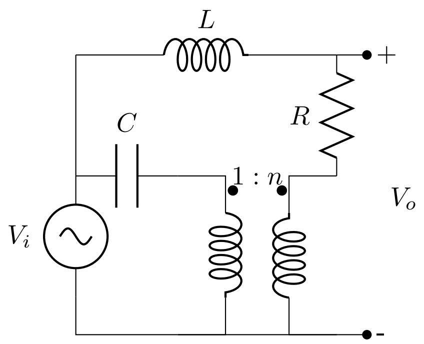

Figura 1: Circuito del Problema 1

b. Sabiendo que $n = 1000$ y que $\frac{1}{LC} = \frac{\omega_0^2}{1000}$, mostrar que existe R tal que:

$$H(j\omega) = 1000\frac{(j\omega)^2 + 0{,}11\omega_0 j\omega + \omega_0^2}{(j\omega)^2 + 110\omega_0 j\omega + 1000\omega_0^2}$$

Determinar R sólo en función de L y ω_0

De aquí en más valen las condiciones de esta parte.

c. I) Realizar los diagramas asintóticos de Bode de $H(j\omega)$.
   II) Bosquejar los diagramas reales.

   Explique la construcción de los diagramas

d. Determine las frecuencias angulares ω para las cuales se cumple que si la entrada es:

$$v_i(t) = \cos(\omega t)$$

la salida en régimen es:

$$v_o(t) = A\sin(\omega t)$$

con $A \in \mathbb{R}$, exprese dichas frecuencias sólo en términos de ω_0 y también calcule los respectivos valores de A

Si realiza aproximaciones, justifíquelas

Problema 2

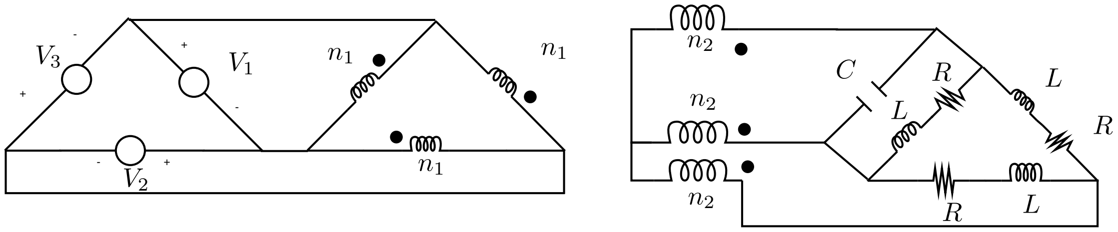

Figura 2: Esquema de la planta del Ejercicio 2.

El ingeniero de una planta destinada a la producción de aceite se encuentra con que su instalación, que puede modelarse con el esquema de la figura 2, **no es equilibrada**. Se rumorea que la empresa de distribución de energía eléctrica penalizará en la factura de pago, si el factor de potencia de la carga es menor a 0.92[a].

Como primera aproximación al problema, el ingeniero decide (por inspección de las cargas) despreciar el condensador C, con lo cual el sistema de cargas queda equilibrado.

Datos del problema:

$\omega = 100\pi rad/s$, $L = 500\mu Hy$, $C = 50\,nF$, $R = 50\Omega$, $n = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
$v_1(t) = 400Vcos(\omega t)$, $v_2(t) = 400Vcos(\omega t + 120^o)$ $v_3(t) = 400Vcos(\omega t + 240^o)$
.

a) En las condiciones de la primera aproximación calcule:

i) Los voltajes en bornes de las cargas: $v_{z1}(t)$, $v_{z2}(t)$ y $v_{z3}(t)$.

ii) Las corrientes por las cargas $i_{z1}(t)$, $i_{z2}(t)$ y $i_{z3}(t)$.

iii) Halle la potencia activa y reactiva total consumida por el sistema de cargas.

iv) Halle el factor de potencia de las cargas.

b) Según la primera aproximación realizada por el ingeniero: ¿la planta será penalizada?

Ahora el ingeniero decide realizar un cálculo exacto, para determinar cuán buena fue su aproximación. Para eso se pide, considerando las cargas no equilibradas (sin despreciar C), calcular:

i) Los voltajes en bornes de las cargas: $v'_{z1}(t)$, $v'_{z2}(t)$ y $v'_{z3}(t)$.

ii) Las corrientes por las cargas $i'_{z1}(t)$, $i'_{z2}(t)$ y $i'_{z3}(t)$.

iii) Halle la potencia activa y reactiva total consumida por el sistema de cargas.

iv) Halle el factor de potencia de las cargas.

c) Según el cálculo real hecho en la parte **b)**. ¿la planta será penalizada?

d) ¿Considera que fue buena la aproximación realzada por el ingeniero? ¿Por qué? ¿En qué cree que se basó el ingeniero para realizar su primera aproximación? Justifique.

[a] Si P_T y Q_T denotan las potencias ativa y reactivas totales consumidas por una carga no equilibrada, el factor de potencia se define como

$$F.P. = \frac{P_T}{\sqrt{P_T^2 + Q_T^2}}$$

Sistemas Lineales 1

Examen de julio de 2012

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

Considerando el *diente de sierra* de valor medio nulo y pendiente unitaria, calcular la suma de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Pregunta 2

a. Demostrar la regla de derivación del producto $\alpha.T$, siendo α una función infinitamente diferenciable y T una distribución cualquiera.

b. Aplicando lo anterior, mostrar que $(Y(t).\cos(t))' = \delta(t) - Y(t).\sin(t)$.

Pregunta 3

En régimen sinusoidal, una fuente de amplitud E alimenta una impedancia Z_L a través de una impedancia de salida Z_S, como se muestra en el circuito de la figura 3. Hallar la $Z_L = R_L + jX_L$ que debe colocarse de manera tal que la potencia disipada en Z_L sea la máxima posible.

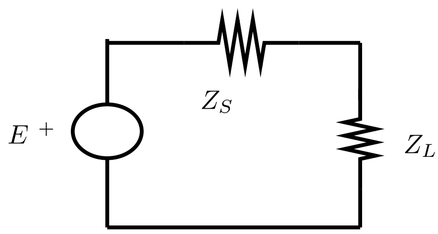

Figura 3: Fuente real alimentando una carga Z_L.

Pregunta 4

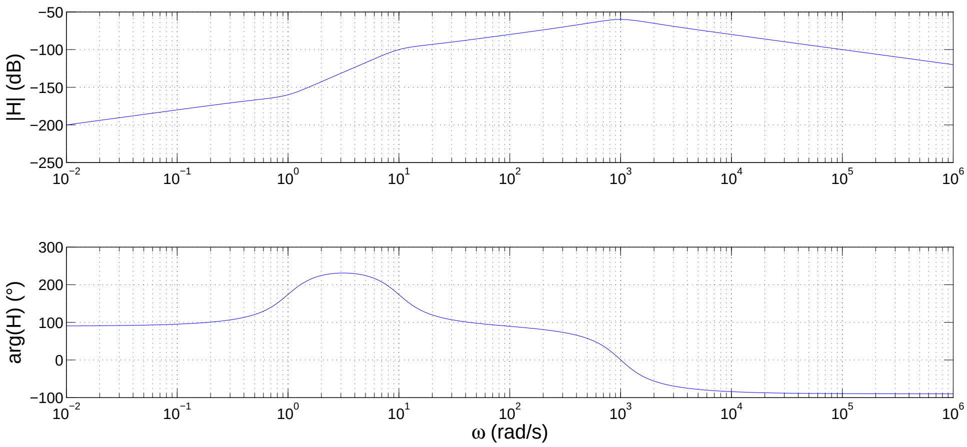

Figura 4: Diagramas de Bode de la transferencia en régimen de sistema.

La figura 4 muestra los Diagramas de Bode reales de la transferencia en régimen sinusoidal de un sistema lineal. Indicar cuál o cuáles de las siguientes transferencias se corresponde con estos Diagramas de Bode.

a.
$$H_1(j\omega) = \frac{-j\omega.\left[(j\omega)^2 + (j\omega) + 1\right]}{\left[(j\omega)^2 + 10(j\omega) + 100\right].\left[(j\omega)^2 + 10^3(j\omega) + 10^6\right]}$$

b.
$$H_2(j\omega) = \frac{j\omega.\left[(j\omega)^2 - (j\omega) + 1\right]}{\left[(j\omega)^2 + 10(j\omega) + 100\right].\left[(j\omega)^2 - 10^3(j\omega) + 10^6\right]}$$

c.
$$H_3(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + (j\omega) + 1}{\left[(j\omega)^2 + 10(j\omega) + 100\right].\left[(j\omega)^2 + 10^3(j\omega) + 10^6\right]}$$

d.
$$H_4(j\omega) = \frac{j\omega.\left[(j\omega)^2 + (j\omega) + 1\right]}{\left[(j\omega)^2 + 10(j\omega) + 100\right].\left[(j\omega)^2 - 10^3(j\omega) - 10^6\right]}$$

e.
$$H_5(j\omega) = \frac{j\omega.\left[-(j\omega)^2 + (j\omega) + 1\right]}{\left[(j\omega)^2 + 10(j\omega) + 100\right].\left[(j\omega)^2 - 10^3(j\omega) + 10^6\right]}$$

f.
$$H_6(j\omega) = \frac{j\omega.\left[(j\omega)^2 + (j\omega) + 1\right]}{\left[(j\omega)^2 + 10(j\omega) + 100\right].\left[(j\omega)^2 + 10^3(j\omega) + 10^6\right]}$$

g.
$$H_7(j\omega) = \frac{j\omega.(j\omega + 0{,}1).\left[(j\omega)^2 - (j\omega) + 1\right]}{\left[(j\omega)^2 + 10(j\omega) + 100\right].\left[(j\omega)^2 - 10^3(j\omega) + 10^6\right]}$$

Solución

Problema 1

a. Igualando la corriente por L con la corriente por R, ambas iguales a I_2 obtenemos:

$$I_2 = \frac{V_i - V_o}{Lj\omega} = \frac{V_o - V_2}{R} \Rightarrow V_2 = V_o \frac{R + Lj\omega}{Lj\omega} - V_i \frac{R}{Lj\omega} \tag{1}$$

La corriente por el primario es:

$$I_1 = (V_i - V_1)Cj\omega \tag{2}$$

Usando estas ecuaciones y las del transformador ideal tenemos:

$$I_1 = -nI_2 \Rightarrow (V_i - V_1)Cj\omega = n\frac{V_2 - V_o}{R} \tag{3}$$

$$nV_1 = V_2 \Rightarrow (V_i - \frac{V_2}{n})Cj\omega = n\frac{V_2 - V_o}{R} \tag{4}$$

$$\Rightarrow nV_i + \frac{n^2 V_o}{RCj\omega} = V_2 \frac{RCj\omega + n^2}{RCj\omega} \tag{5}$$

Sustituyendo V_2 por la expresión obtenida en 1 y operando:

$$V_i \left(n + \frac{RCj\omega + n^2}{LC(j\omega)^2} \right) = V_o \left(\frac{(Lj\omega + R)\left(RCj\omega + n^2\right)}{RLC(j\omega)^2} - \frac{n^2}{RCj\omega} \right) \tag{6}$$

Finalmente:

$$\boxed{H(j\omega) = n \frac{(j\omega)^2 + \frac{R}{nL} j\omega + \frac{n}{LC}}{(j\omega)^2 + \frac{R}{L} j\omega + \frac{n^2}{LC}}}$$

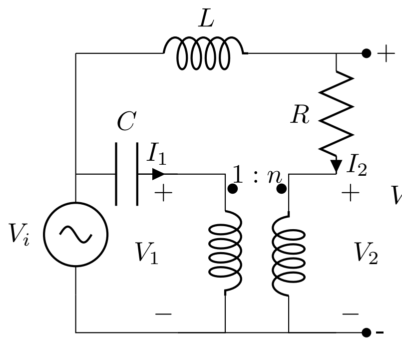

Figura 5: circuito del Ejercicio 1

b. Sustituyendo los valores de n y $\frac{1}{LC}$ tenemos:

$$H(j\omega) = 1000 \frac{(j\omega)^2 + \frac{R}{1000L}\omega_0 j\omega + \omega_0^2}{(j\omega)^2 + \frac{R}{L}\omega_0 j\omega + 1000\omega_0^2}$$

Se tiene que cumplir $\frac{R}{L} = 110\omega_0$ es decir: $\boxed{R = 110\omega_0 L}$

c. I) H tiene dos raíces complejas conjugadas de módulo ω_0 en el numerador, con coeficiente de amortiguamiento sensiblemente chico $\zeta = 0{,}055$.
En el denominador las raíces son reales y valen $-10\omega_0$ y $-100\omega_0$

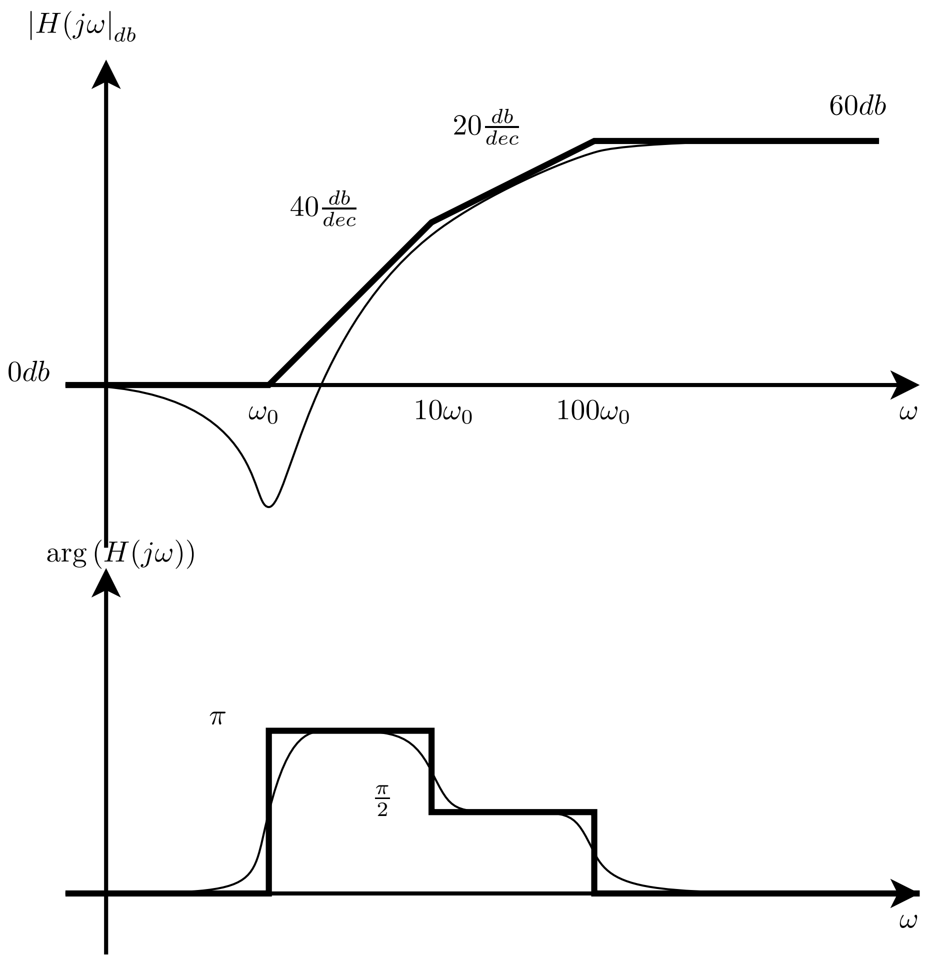

Figura 6: Diagramas de Bode

II) Cómo ζ es muy chico el cambio en la fase es muy empinado en ω_0 y el módulo tiene un pico bastante pronunciado: $H(j\omega_0) \simeq 0{,}11$, o sea $|H(j\omega_0)|_{db} \simeq -20db$, en los otros dos polos la distancia entre el asintótico y el real es de $3db$

d. La salida debe estar desfasada $\pm\frac{pi}{2}$ respecto a la entrada. Observar que A puede tener cualquier signo. En el diagrama de Bode vemos que eso ocurre para $\omega = \omega_0$ y para otra frecuencia que está entre $10\omega_0$ y $100\omega_0$, de hecho se puede decir que está en la media geométrica entre $10\omega_0$ y $100\omega_0$. Por la separación de las raíces (una década) podemos asumir que las dos raíces más grandes no afectan el comportamiento cerca de ω_0 y que la raíz chica no afecta en el rango entre las dos mayores.

En resumen las frecuencias serían $\omega_1 = \omega_0$ y $\omega_2 = 10\sqrt{10}\omega_0$.

Verificamos los resultados evaluando H:

$$\boxed{H(j\omega_0) \simeq 0{,}012 + 0{,}11j \simeq 0{,}11\angle\frac{\pi}{2} - 0{,}035\pi}$$

Es decir que ω_0 es una buena aproximación, el valor de A está dado por el módulo de H, o sea $A = 0{,}11$

$$\boxed{H(j10\sqrt{10}\omega_0) \simeq 1 + 287j \simeq 0{,}11\angle\frac{\pi}{2} - 0{,}0011\pi}$$

En este caso la aproximación es aún mejor $A = 287$.

Problema 2

a)

i) Trabajamos en valores de pico:

$$V_{Z1} = \frac{V_1 - V_2}{n} = 400V < -30^o$$
$$V_{Z2} = \frac{V_2 - V_3}{n} = 400V < 90^o$$
$$V_{Z3} = \frac{V_3 - V_1}{n} = 400V < -150^o$$

Por lo tanto, las expresiones temporales de las tensiones en bornes de la carga quedan como siguen:

$$\boxed{v_{Z1}(t) = 400V cos(\omega t - 30^o)}$$
$$\boxed{v_{Z2}(t) = 400V cos(\omega t + 90^o)}$$
$$\boxed{v_{Z3}(t) = 400V cos(\omega t - 150^o)}$$

ii) Mediante aplicación directa de la ley de Ohm:

$$I_{Z1} = \frac{\frac{V_1 - V_2}{n}}{R + j\omega L} = 8A < -30{,}18^o$$
$$I_{Z2} = \frac{\frac{V_1 - V_2}{n}}{R + j\omega L} = 8A < 90{,}18^o$$
$$I_{Z3} = \frac{\frac{V_1 - V_2}{n}}{R + j\omega L} = 8A < -150, 18^o$$

Por lo tanto, las expresiones temporales de las corrientes por las cargas quedan así:

$$\boxed{i_{Z1}(t) = 8A cos(\omega t - 30{,}18^o)}$$
$$\boxed{i_{Z2}(t) = 8A cos(\omega t + 89{,}82^o)}$$
$$\boxed{i_{Z3}(t) = 8A cos(\omega t - 150{,}18^o)}$$

iii) Calculamos la potencia aparente que consume el sistema de cargas:

$$S_{TOTAL} = 3S_1 = 3\frac{1}{2}V_{Z1}I^*_{Z1} = 4800V.A < 0{,}18^o = (4800 + j15)V.A$$

Por lo tanto, la potencia activa y reactiva total consumidas valen:

$$\boxed{P = 4{,}8kW, Q = 15VAr}$$

iV) El F.P de las cargas queda como sigue:

$$\boxed{F.P = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = 0{,}999995}$$

b) Según la primera aproximaciónr realizada por el ingeniero la planta no será penalizada pues el $F.P$ es mayor a 0.92.

i) Notemos que al incorporar el condensador C en nuestro análisis, lo único que cambiará será la corriente por la rama que contiene a dicho condensador. Por lo tanto, las tensiones en bornes de la cargas son las mismas que las ya calculadas antes.

ii) Por lo ya dicho, sólo debemos calcular la corriente por la rama del condensador y sumarla a la corriente calculada anteriormente. Entonces calculemos dicha corriente:

$$I_C = V_C j\omega C = 6{,}28mA < 60^o$$

Por lo tanto:

$I_1' = 6{,}28mA < 60^o + 8A < -30{,}18^o = 8A < -30{,}135^o$

Entonces:

$$\boxed{i'_{Z1}(t) = 8Acos(\omega t - 30{,}135^o)}$$

iii)

$$S_1 = V_{Z1}I_{Z1}^* = \frac{1}{2}(400V < -30)(8A < 30{,}135) = (1600 + j3{,}77)V.A$$
$$S_2 = 2V_{Z2}I_{Z2}^* = (3200 + j10)V.A$$

Por lo tanto, la potencia activa y reactiva total consumidas valen:

$$\boxed{P = 4800W, Q = 13{,}77VAr}$$

Observación Notemos que la potencia activa permanece incambiada al considerar el condensador. Esto es razonable dado que es sabido que el condensador no consume potencia activa.

iV) El F.P de las cargas queda como sigue:

$$\boxed{F.P = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = 0{,}999995}$$

c) Según el cálculo real realizado por el ingeniero la planta no será penalizada pues el $F.P$ es mayor a 0.92.

d) La aproximación realizada por el ingeniero es muy buena, dado por ambos caminos se llega a la misma conclusión. De hecho, el error relativo en el consumo de reactiva:

$$e(\%) = \frac{Q_{APROX} - Q_{REAL}}{Q_{REAL}}100 = 8{,}93\,\%$$

es menor al 10 %.

Para realizar dicha aproximación, el ingeniero habrá notado que la impedancia asociada al condensador es mucho más grande (en módulo) a la impedeancia asociada a la serie de R y L. Esto es así pues:

$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = 63661{,}977\Omega < -90^o$
$Z_{RL} = R + j\omega L = 50\Omega < 0{,}18^o$

de donde resulta evidente lo ya dicho.