Sistemas Lineales 1

Examen de julio de 2011

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

(a) Dados los circuitos de la figura 1:

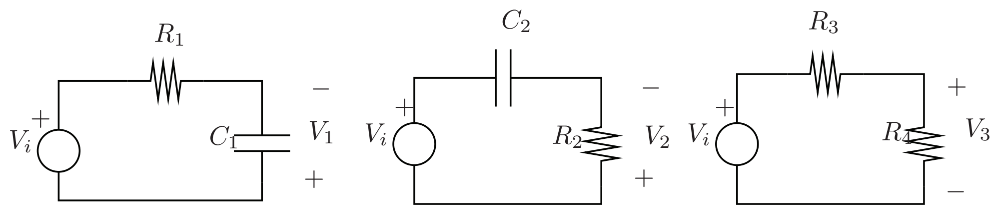


Figura 1:

I) Calcular las funciones de transferencia en régimen sinusoidal,

$$H_1(j\omega) = \frac{V_1}{V_i}, \quad H_2(j\omega) = \frac{V_2}{V_i} \quad \text{y} \quad H_3(j\omega) = \frac{V_3}{V_i}$$

II) Realizar los Diagramas de Bode asintóticos y bosquejar los reales para cada una de las funciones de transferencia antes calculadas.

(b) Utilizando los circuitos de la parte anterior, obtener a partir de $v_i(t) = \sqrt{2}\,220V\,\sin(\omega_0 t)$ donde $\omega_0 = 100\pi$, un sistema de tensiones v_a, v_b y v_c equilibrado y perfecto. Determinar en cada bloque qué circuito colocaría y la relación que deben cumplir R_1, C_1, R_2, C_2, R_3 y R_4. **[Fundamente sus decisiones y respuestas]**

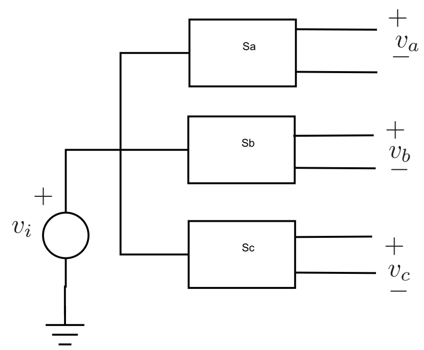


Figura 2:

El sistema anterior, se utiliza mediante fuentes dependientes, para alimentar un sistema de cargas trifásicas como se muestra en la figura 3.

(c) Asumiendo $v_i(t)$ como en las partes anteriores, $R = 100\Omega$ y $L = 100Hy$,

I) Determinar las tensiones en bornes de las resistencias. Expresarlas en función en tiempo

II) Realizar un diagrama fasorial que contenga: V_i, V_a, V_b, V_c, los fasores asociados a las caídas en las resistencias ($VR_{\{a,b,c\}}$) y las corrientes de linea.

III) Indicar qué elemento colocaría para compensar la potencia reactiva consumida por las cargas, de qué valor y realice un esquema donde se ilustre la conexión de los mismos.

(d) Si modificamos la frecuencia de trabajo, ¿el sistema de fuentes v_a, v_b, v_c continua siendo equilibrado y perfecto? **[Fundamente su respuesta]**

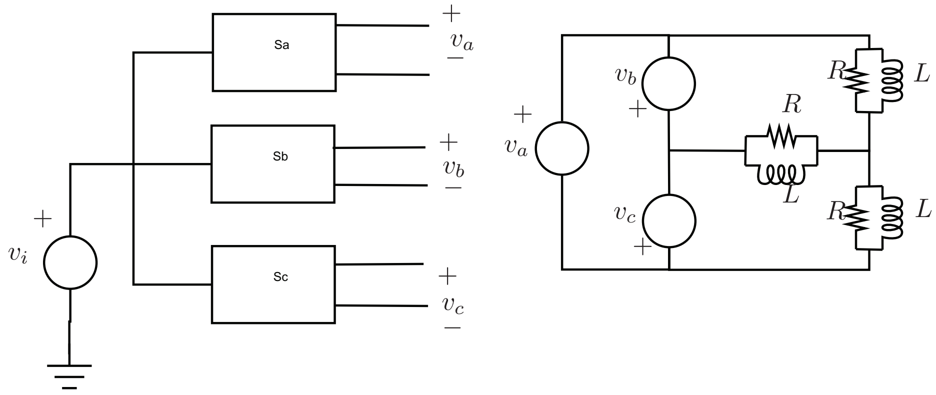


Figura 3:

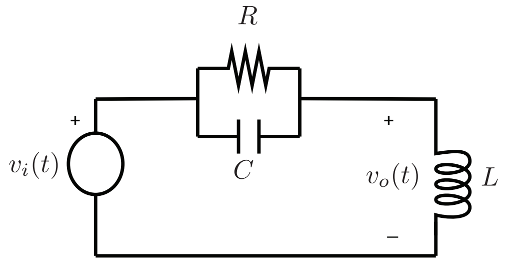


Figura 4: Circuito del problema 2

Problema 2

Sea el circuito de la figura 4, donde las bobinas forman un transformador perfecto.

a) Hallar la transferencia en régimen $H(j\omega) = \dfrac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$. Escriba su resultado en función de $\omega_0 = \dfrac{1}{RC} = \dfrac{R}{L}$

b) Dibujar los correspondientes Diagramas de Bode asintóticos de amplitud y fase.

c) I) Hallar la **<u>única</u>** frecuencia $\omega_1 > 0$ tal que si la entrada es $v_i(t) = A\sin(\omega_1 t)$ la salida en régimen es una sinusoide de la misma amplitud.

   II) Hallar las frecuencias ω_2 y ω_3 ($0 < \omega_2 < \omega_3$) a las cuales el sistema tiene una ganancia de $3db$.

   III) Bosquejar el diagrama de Bode real de módulo.

d) Hallar la salida en régimen para las siguientes entradas:

   I) $v_i(t) = A$, II) $v_i(t) = A\cos(\omega_1 t)$, III) $v_i(t) = A\sin(\omega_2 t)$,
   IV) $v_i(t) = A\cos(\omega_3 t) + B\sin(\omega_3 t)$,

   donde A y B son constantes positivas y las frecuencias angulares ω_i son las calculadas en la parte anterior.

e) Sabiendo que la respuesta al impulso del sistema en consideración es

$$h(t) = \delta(t) - Y(t).\frac{2\omega_0}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\omega_0}{2}t}.\sin\left(\frac{\sqrt{3}\omega_0}{2}t\right)$$

   I) Hallar la salida $v_o(t)$ cuando la entrada es $v_i(t) = A.Y(t)$.

   II) ¿Cómo se relaciona este resultado con lo hecho en la parte anterior?

Sistemas Lineales 1

Examen de julio de 2011

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

Se consideran las siguientes transferencias en régimen sinusoidal, con ω_0, ω_1 y ω_n positivos:

$$H_1(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + \omega_0}, H_2(j\omega) = -\frac{\omega_1}{j\omega + \omega_1}, H_3(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 0{,}6\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

a) ¿Alguna (o algunas) de ellas es capaz de responder en régimen, ante una entrada sinusoidal de ampltud A, con una señal de amplitud mayor a A? (indicar cuál o cuáles).

b) ¿Alguna (o algunas) de ellas es capaz de responder en régimen con una señal de valor medio nulo ante una entrada periódica de tipo diente de sierra? (indicar cuál o cuáles).

c) ¿Alguna (o algunas) de ellas es capaz de responder en régimen, ante una entrada sinusoidal, con una señal que presenta un retraso de fase de 72^o respecto de la entrada? (indicar cuál o cuáles).

JUSTIFICAR.

Pregunta 2

Se tiene una carga lineal, que en régimen sinusoidal presenta una impedancia $Z(j\omega)$. Se sabe que a $50Hz$, alimentada con $230V$ eficaces, consume $500W$ de potencia activa y $220VAR$ de reactiva, con un $\cos(\varphi)$ inductivo. Hallar un modelo serie de dicha impedancia, indicando los valores de las componentes respectivas.

Pregunta 3

Se considera el sistema que se muestra en la figura 5. Se verifican las siguientes relaciones:

- $y(t) = x(t) * \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{\pi t}$.
- $z(t) = y(t).\,[\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)]$.
- $u(t)$ es la salida de un filtro pasa altos ideal, de frecuencia de corte f_3, con entrada $z(t)$.
- $v(t) = u(t).\cos(2\pi f_2 t)$.
- $w(t) = v(t) * \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{\pi t}$.
- $f_0 \leq f_1 < f_2$, $f_1 + f_0 < f_3 < f_2 - f_0$

Dibujar los espectros de amplitud de las señales $y(t)$, $z(t)$, $u(t)$, $v(t)$ y $w(t)$ para la entrada $x(t) = \delta(t)$. **Explicar claramente**.

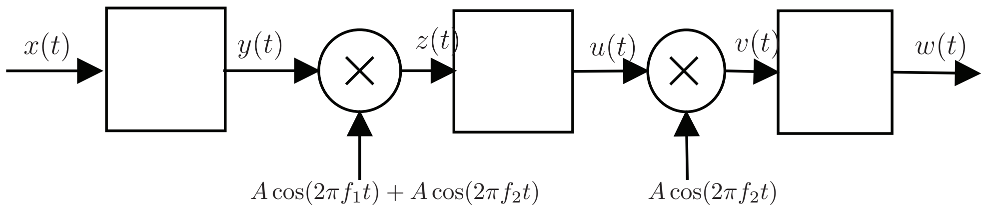


Figura 5: Sistema de la Pregunta 3.

Pregunta 4

Un circuito dado tiene la siguiente relación diferencial entre la entrada $v_i(t)$ y la salida $v_o(t)$:

$$\ddot{v}_o + \omega_0\, \dot{v}_o + \omega_0^2\, v_o = \ddot{v}_i + \omega_0\, \dot{v}_i$$

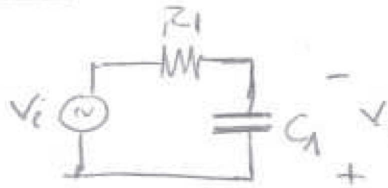
Hallar la respuesta al impulso del circuito.

Solución Examen de Julio 2011

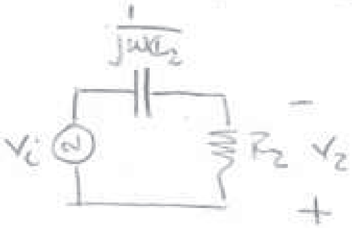
Sistemas Lineales 1

Problema 1:

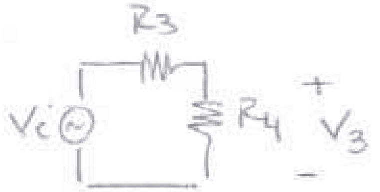
(a) i-



$-v_1 = v_i \dfrac{1/j\omega C_1}{R_1 + 1/j\omega C_1} \Rightarrow H_1(j\omega) = -\dfrac{\omega_1}{j\omega + \omega_1}$ Donde $\boxed{\omega_1 = 1/R_1C_1}$



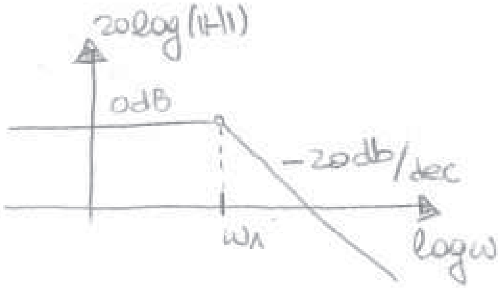
$\Rightarrow -v_2 = v_i \dfrac{R_2}{R_2 + 1/j\omega C_2} \Rightarrow H_2(j\omega) = -\dfrac{j\omega}{j\omega + \omega_2}$ Donde $\boxed{\omega_2 = 1/R_2C_2}$

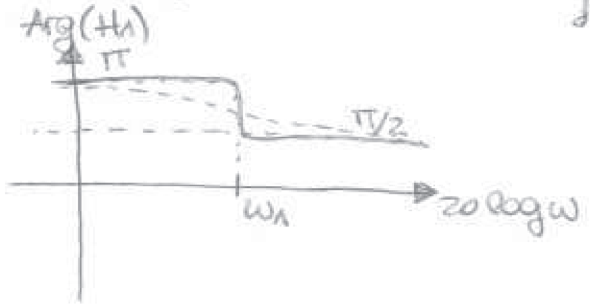


$\Rightarrow v_3 = v_i \dfrac{R_4}{R_3 + R_4} \Rightarrow H_3(j\omega) = \dfrac{R_4}{R_3 + R_4}$

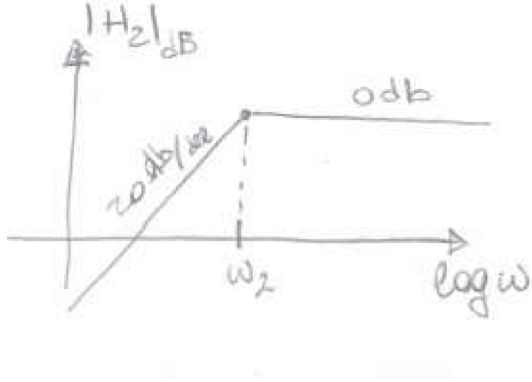
ii-

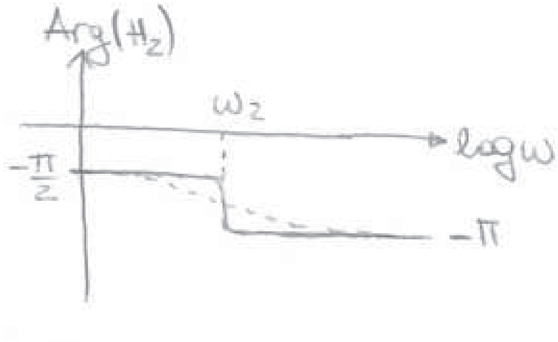
- $H_1(j\omega) = -\dfrac{\omega_1}{j\omega + \omega_1}$ con $\omega_1 = 1/R_1C_1 \Rightarrow \begin{cases} \omega \ll \omega_1;\ H_1(j\omega) \simeq -1 \\ \omega \gg \omega_1;\ H_1(j\omega) \simeq -\dfrac{\omega_1}{j\omega} \end{cases}$



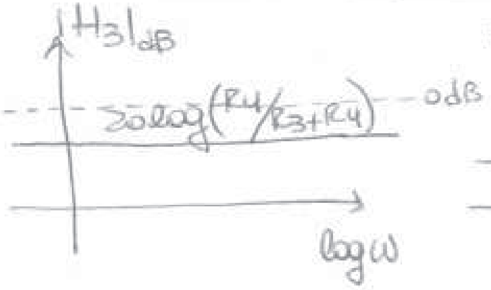


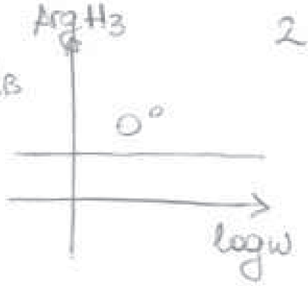
- $H_2(j\omega) = -\dfrac{j\omega}{j\omega + \omega_2}$ con $\omega_2 = 1/R_2C_2 \Rightarrow \begin{cases} H_2(j\omega) \simeq -\dfrac{j\omega}{\omega_2} \text{ si } \omega \ll \omega_2 \\ H_2(j\omega) \simeq -1 \text{ si } \omega \gg \omega_2 \end{cases}$





- $H_3(j\omega) = \dfrac{R_4}{R_3+R_4}$





(b) Utilizando los circuitos de la parte (a), deseamos generar un sistema de tensiones equilibrado y perfecto.

Para ello, buscamos que $V_B = V_A \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}}$, $V_C = V_A e^{j2\cdot\frac{2\pi}{3}}$.

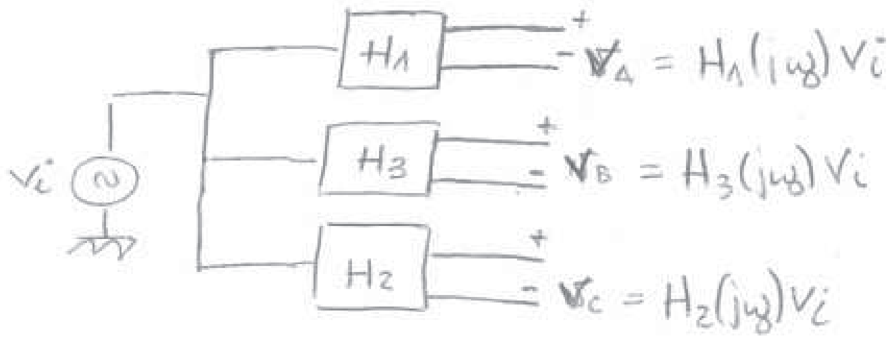
En otras palabras, buscamos que todas las tensiones tengan igual módulo y que difieran en 120° en fase entre sí.-

Observando H_1, vemos que puede generar adelantos de fase entre 90° y 180° $\Rightarrow$ podemos utilizarlo para obtener una tensión "ADELANTADA" 120° a v_i.

Por otro lado, si observamos los Diagramas de H_2, observamos que puede ser utilizado para generar un atraso en fase entre 90° y 180° $\rightarrow$ podemos utilizarlo para obtener una tensión "ATRASADA" 120° con respecto a v_i.

FINALMENTE, debemos ser cuidadosos a la hora de fijar R_1, C_1, R_2 y C_2 de modo que la atenuación introducida por H_1 coincida con la de H_2. Luego, utilizamos H_3 para obtener una señal en fase con v_i y con la atenuación adecuada.

El ESQUEMA DE CONEXIÓN SERÁ:



1- Buscamos $\mathrm{Arg}(H_1(j\omega_0)) = 120° \Rightarrow \mathrm{Arg}\left[-\frac{\omega_1}{j\omega_0+\omega_1}\right] = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow$

$\pi - \mathrm{Arctg}\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right) = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{\omega_0}{\omega_1} = tg(\pi/3) = \sqrt{3} \Rightarrow \omega_1 = 1/R_1C_1 = \omega_0/\sqrt{3}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{R_1C_1} = \frac{100\pi}{\sqrt{3}}}$ CONDICIÓN 1.

2- Buscamos $\mathrm{Arg}(H_2)\Big|_{\omega=\omega_0} = -120° \Rightarrow \mathrm{Arg}\left[-\frac{j\omega_0}{j\omega_0+\omega_2}\right] = -\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow -\pi/2 - \mathrm{Arctg}\left(\omega_0/\omega_2\right) = -\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{\omega_0}{\omega_2} = tg(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$

$\Rightarrow \omega_2 = \omega_0\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{R_2C_2} = 100\pi\sqrt{3}}$ Condición 2.

3- Por último debemos asegurarnos que V_A, V_B y V_C tienen igual módulo.

- $|V_A|^2 = |V_i|^2 |H_1(j\omega_0)|^2 = |V_i|^2 \cdot \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2+\omega_0^2} = |V_i|^2 \frac{\omega_0^2/3}{\omega_0^2/3+\omega_0^2}$

$\Rightarrow |V_A|^2 = |V_i|^2 \frac{1}{1+3} = |V_i|^2/4$ ✓

$|V_A| = |V_B|$ Directamente de las cond. 1 y 2

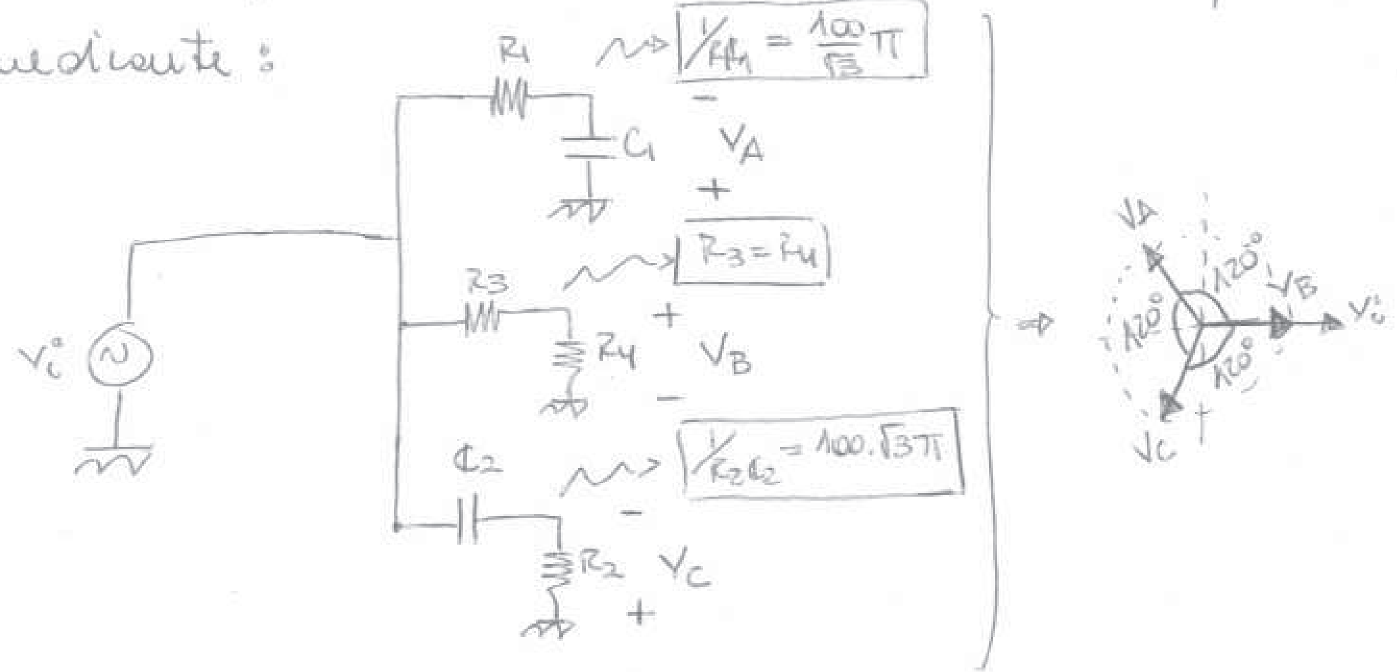
- $|V_B|^2 = |V_i|^2 |H_2(j\omega_0)|^2 = |V_i|^2 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2+3\omega_0^2} = |V_i|^2/4$ ✓

- $|V_C|^2 = |V_i|^2 \, |H_3(j\omega_0)|^2 = |V_i|^2 \left| \frac{R_4}{R_4+R_3} \right|^2$

$\Rightarrow$ imponemos $|V_C|^2 = |V_A|^2 = |V_B|^2 \iff \left| \frac{R_4}{R_4+R_3} \right|^2 = \frac{1}{4}$

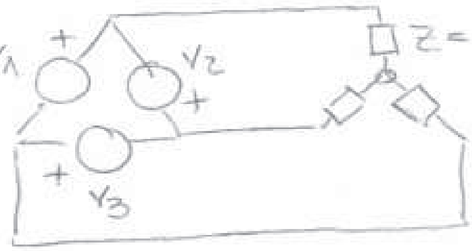
$\Rightarrow \frac{R_4}{R_4+R_3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{R_3 = R_4}$ Condición 3

En resumen, obtenemos el sistema de tensiones equilibrado mediante:



(c) Utilizando el esquema propuesto en la parte anterior, tenemos que
$$\begin{cases} v_b = \sqrt{2}\cdot 220\,\frac{1}{2}\,\sin(\omega_0 t) \\ v_C = \sqrt{2}\,220\,\frac{1}{2}\,\sin(\omega_0 t - 2\pi/3) \\ v_A = \sqrt{2}\,220\,1/2\,\sin(\omega_0 t + 2\pi/3) \end{cases}$$

Llamando $v_1 = v_b$, $v_2 = v_a$, $v_3 = v_c$ podemos escribir el circuito de la figura 3 como:

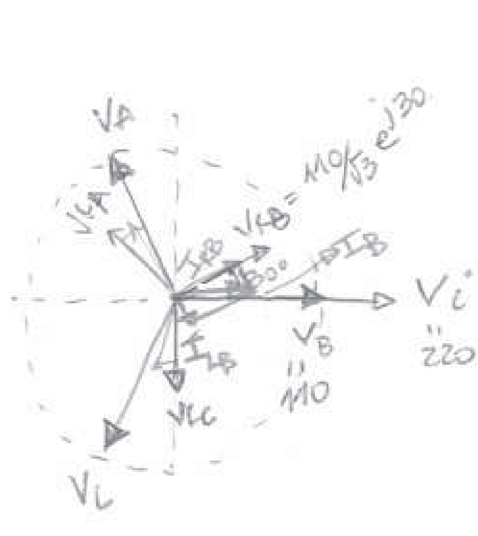


con $V_1 = 110V$
$V_2 = 110V \angle 120°$
$V_3 = 110V \angle 240°$

i- LAS TENSIONES EN BORNES DE LAS RESISTENCIAS SON:

$$V_{R_i} = V_i/\sqrt{3}\; e^{j30°} \;:\; i = 1,2,3 \Rightarrow \begin{cases} v_{R_1}(t) = \sqrt{2}\,\frac{110V}{\sqrt{3}}\sin(\omega_0 t + 30°) \\ v_{R_2}(t) = \sqrt{2}\cdot\frac{110}{\sqrt{3}}\sin(\omega_0 t + 150°) \\ v_{R_3}(t) = \sqrt{2}\,\frac{110}{\sqrt{3}}\sin(\omega_0 t + 270°) \end{cases}$$

ii-

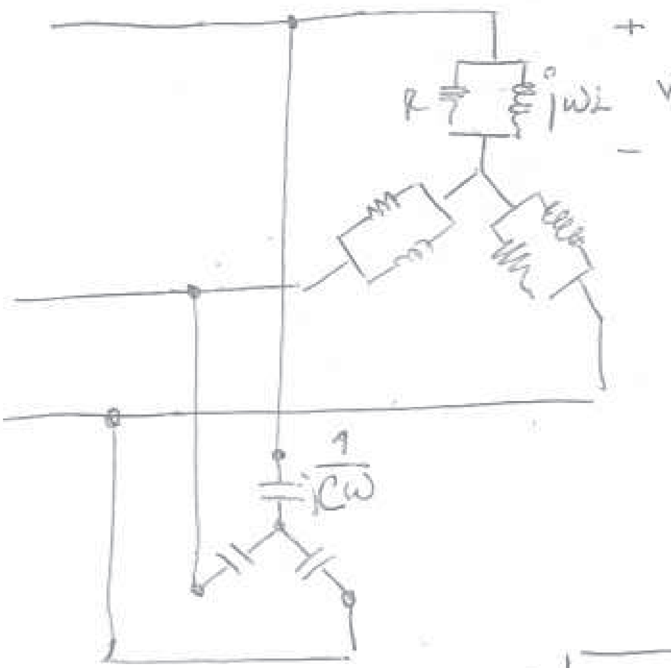


$$|I_R| = |V_{R_i}/R| = \frac{110}{\sqrt{3}\,100} = 0{,}64A$$

$$|I_L| = |V_{R_i}/j\omega L| = \frac{110}{\sqrt{3}.100.100\pi} = 2{,}02mA$$

$$I_i = V_{R_i}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}\right) = I_{R_i} + I_{L_i}$$

iii- Para compensar la potencia Reactiva consumida, colocamos Condensadores en paralelo con las cargas como se muestra en la Figura:



Buscamos que

$$|Q_C| = |Q_L| \quad (Q_T = Q_C + Q_L = 0)$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\frac{|V|^2}{\omega_0 L} = \omega_0 C |V|^2}$$

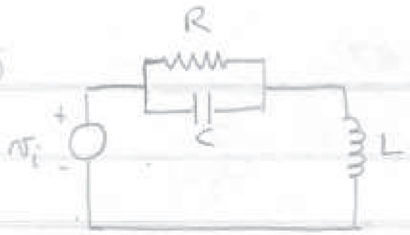
$$\Downarrow$$

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = \frac{1}{(100\pi)^2 100} = 101{,}3\,mF$$

$$\Rightarrow \boxed{C = 101{,}3\,mF}$$

(d) Si modificamos la Frecuencia de Trabajo, la Respuesta de H_1 y H_2 cambiará, para Frecuencias Distintas de ω_0 NO obtendremos un sistema de Tensiones Equilibrado y perfecto.

1)



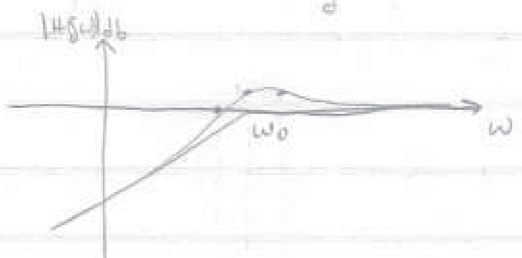
$$\frac{Lj\omega}{Lj\omega + \frac{R}{RCj\omega+1}} = \frac{L/R\; j\omega(RCj\omega+1)}{LC(j\omega)^2 + \frac{L}{R}j\omega + 1}$$

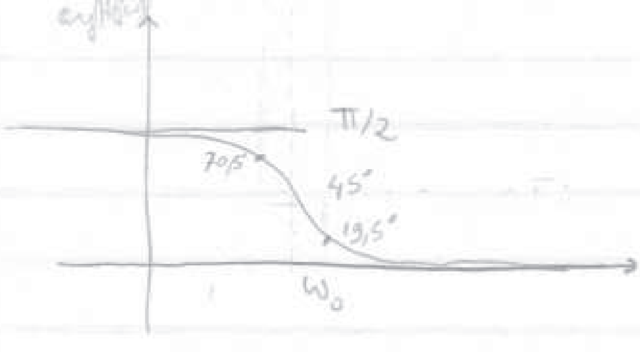
$$\frac{R}{L} = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\omega_0} \qquad H(j\omega) = \frac{\frac{j\omega}{\omega_0}\left(\frac{j\omega}{\omega_0}+1\right)}{\frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2} + \frac{j\omega}{\omega_0} + 1}$$

2) $\omega << \omega_0 \qquad H(j\omega) \approx \frac{j\omega}{\omega_0}$ → 20 db/dec ; → $\frac{\pi}{2}$

$\omega >> \omega_0 \qquad H(j\omega) \approx 1$ → 0 db ; → 0 o 2π

$H(j\omega_0) = \frac{j(1+j)}{j} = 1+j$ → $\pi/4$; → $\sqrt{2}$ → +3db





3) a) $|H(j\omega_1)|^2 = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2(x^2+1) = (1-x^2)^2 + x^2}{d}$

$x_1 = \dfrac{\omega_1}{\omega_0}$ $\quad \cancel{x^4} + x^2 = 1 + \cancel{x^4} - 2x^2 + \cancel{x^2}$

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\omega_1 = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{2}}}$

$\frac{1}{2}$ octava por debajo de ω_0

b) $|H(j\omega_2)|^2 = 2$?

$\Rightarrow x^2(x^2+1) = 2\left((1-x^2)^2 + x^2\right)$

$\Rightarrow x^4 + x^2 = 2 + 2x^4 - 4x^2 + 2x^2$

$\Rightarrow x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \omega_2 = \omega_0$ (como ya habíamos visto en la parte anterior).

$\omega_3 = \sqrt{2}\,\omega_0$ $\quad \frac{1}{2}$ octava por encima

c) ver diagrama

4. a) $H(j0) = 0 \Rightarrow$ la salida será nula

$v_0(t) = 0$

b) $v_0(t) = A \cos(\omega_1 t + 70{,}5^\circ)$

$\arg(H(j\omega_1)) = \pi/2 + \operatorname{atg}\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \operatorname{atg}\dfrac{1/\sqrt{2}}{1 - 1/2}$

$= \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{atg}\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \operatorname{atg}\sqrt{2} \approx 70{,}5^\circ$

c) $v_0(t) = \sqrt{2}\, A \operatorname{sen}\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$

d) $\underset{\parallel}{\arg\left(H(j\omega_3)\right)} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{artg}\sqrt{2} - \left(\pi - \operatorname{atg}\sqrt{2}\right)$

$$= -\frac{\pi}{2} + 2\operatorname{atg}\sqrt{2} \approx 19{,}5^\circ$$

$H(j\omega_3) = \dfrac{j\sqrt{2}\,(j\sqrt{2}+1)}{(1-2) + j\sqrt{2}}$ $\qquad v_0(t) = \sqrt{2}\left(A \cos(\omega_3 t + 19{,}5^\circ) + B \operatorname{sen}(\omega_3 t + 19{,}5^\circ)\right)$

e) $H\left(j\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0\right) = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\, j\left(j\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)}{\left(1 - \frac{3}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} j}$

$$\left|H\left(j\tfrac{\sqrt{3}}{2}\omega_0\right)\right| = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2}}{\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{21}{13}} \rightsquigarrow 2{,}2 \text{ db}$$

$$\arg\left(H\left(j\tfrac{\sqrt{3}}{2}\omega_0\right)\right) = \pi/2 + \operatorname{atg}\frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{atg}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1/4} = \frac{\pi}{2} + \operatorname{atg}\frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{atg} 2\sqrt{3}$$

$$= 57^\circ$$

$v_0(t) = \sqrt{\frac{21}{13}}\, A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t + 57^\circ\right)$

f) $v_0(t) \approx \dfrac{A}{10} \cos\left(\dfrac{\omega_0}{10} t + \dfrac{\pi}{2}\right)$

5) $v_o(t) = A\Upsilon(t) * h(t) = A\Upsilon(t)\left[1 - \int_0^t \frac{2\omega_0}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\omega_0}{2}u} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}\omega_0}{2}u\right) du\right]$

$$\int_0^t \frac{2\omega_0}{\sqrt{3}} \frac{e^{-\frac{\omega_0}{2}(1-j\sqrt{3})u} - e^{-\frac{\omega_0}{2}(1+j\sqrt{3})u}}{2j} du$$

$$= \frac{\omega_0}{j\sqrt{3}}\left[\frac{e^{-\frac{\omega_0}{2}(1-j\sqrt{3})u}}{-\frac{\omega_0}{2}(1-j\sqrt{3})} - \frac{e^{-\frac{\omega_0}{2}(1+j\sqrt{3})u}}{-\frac{\omega_0}{2}(1+j\sqrt{3})}\right]\Bigg|_0^t$$

$$= \frac{-2}{j\sqrt{3}\cdot 4}\left((1+j\sqrt{3})e^{-\frac{\omega_0}{2}(1-j\sqrt{3})u} - (1-j\sqrt{3})e^{-\frac{\omega_0}{2}(1+j\sqrt{3})u}\right)\Bigg|_0^t$$

$$= \frac{-1}{2j\sqrt{3}} e^{-\frac{\omega_0}{2}u}\left(e^{+j\frac{\omega_0\sqrt{3}}{2}u} - e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 u} + j\sqrt{3}\left(e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 u} + e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 u}\right)\right)\Bigg|_0^t$$

$$= -e^{-\frac{\omega_0}{2}u}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\frac{\omega_0\sqrt{3}}{2}u + \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 u\right)\Bigg|_0^t$$

$$= 1 - e^{-\frac{\omega_0 t}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\frac{\omega_0\sqrt{3}}{2}t + \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right)$$

$$v_o(t) = A e^{-\frac{\omega_0 t}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\frac{\omega_0\sqrt{3}}{2}t + \cos\frac{\omega_0\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$v_o(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ consistente con parte 4.a