Sistemas Lineales 1

Examen Julio de 2010

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

Se considera el cicuito de la figura 1, que alimenta un amplificador y un parlante. Para modelar al conjunto amplificador-parlante, se realiza un ensayo y se obtiene la respuesta en frecuencia mostrada en la figura 2 para $Z_p(j\omega) = \dfrac{V_p(j\omega)}{I(j\omega)}$:

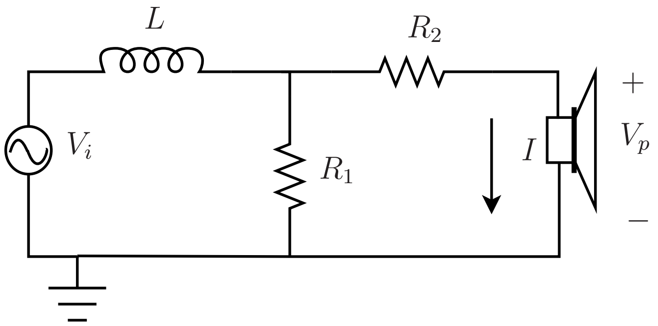


Figura 1: Circuito del Problema 1

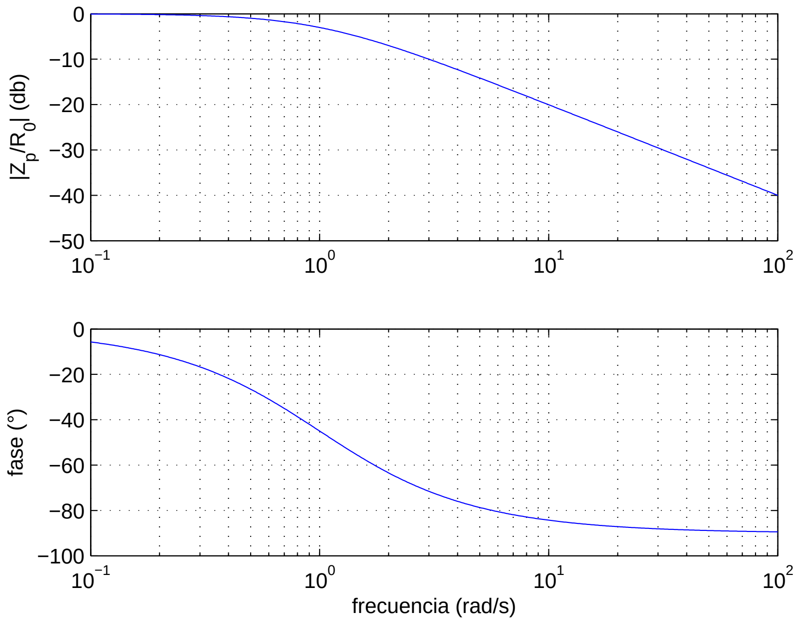
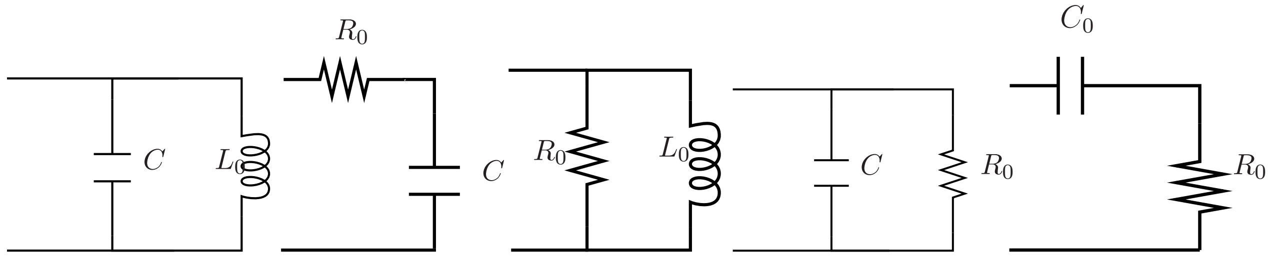


Figura 2: Diagramas de Bode relevados en el ensayo. Las abscisas están normalizadas a alguna frecuencia que no se conoce.

(a) ¿Teniendo en cuenta la respuesta obtenida, cuál de los siguientes esquemas le parece un modelo razonable para el parlante?



(a) modelo 1 (b) modelo 2 (c) modelo 3 (d) modelo 4 (e) modelo 5

Figura 3: Posibles modelos del amplificador-parlante.

DE AHORA EN ADELANTE, SE UTILIZARÁ PARA EL PARLANTE EL MODELO SELECCIONADO EN LA PARTE (a).

(b) Calcular la función de transferencia en régimen $H(j\omega) = \dfrac{V_p(j\omega)}{V_i(j\omega)}$.

(c) Suponiendo que todas las resistencias son iguales y de valor R, y $\frac{R}{L} = \frac{1}{RC}$, demostrar que, definiendo convenientemente una pulsación ω_0, la función de transferencia en régimen del circuito se puede escribir como:

$$H(j\omega) = \frac{1}{2} \times \frac{\omega_0^2}{(j\omega)^2 + 2\omega_0(j\omega) + \omega_0^2}$$

(d) Realizar los diagramas de Bode asintóticos y bosqueje el diagrama real de módulo. **Justifique las distintas aproximaciones que haga**.

(e) I) Calcular la ganancia del circuito a las frecuencias $\frac{\omega_0}{10}$, ω_0 y $10\omega_0$

II) Calcular la distancia entre el Bode real y el asintótico para las frecuencias antes mencionadas.

III) ¿Existe alguna frecuencia para la cual la V_p y V_i se encuentren en contra fase? [**Justifique**]

IV) ¿Existe alguna frecuencia para la cual la V_p y V_i se encuentren en cuadratura? [**Justifique**]

(f) ¿Utilizaría este circuito para reproducir sonidos de baja, media o alta frecuencia? [**Explique claramente su respuesta**]

Problema 2

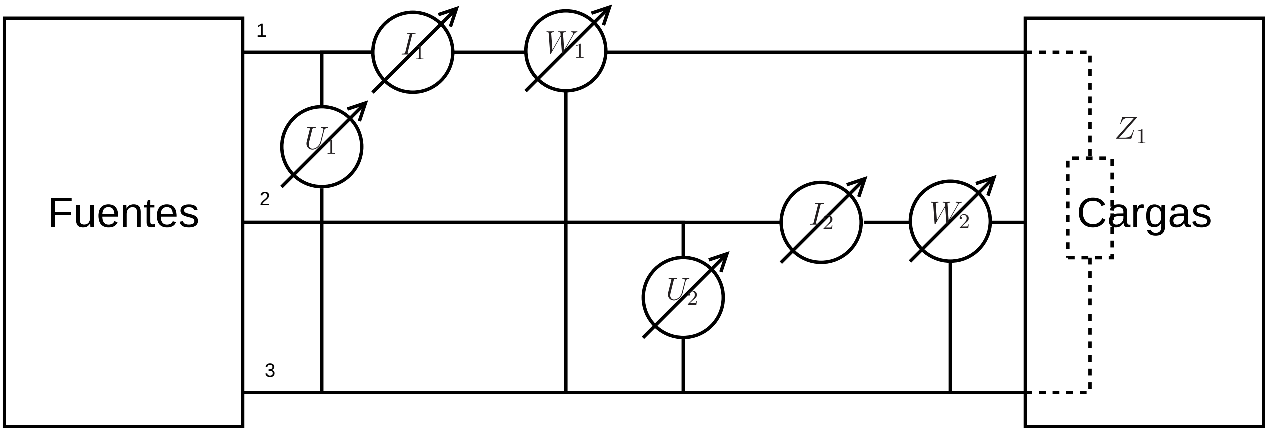


Figura 4: Esquema de conexión del problema 2

El esquema de la figura 4 representa una carga trifásica conectada a un sistema de fuentes sin neutro. De los instrumentos de medida se obtienen los siguientes valores:

$$U_1 = U_2 = 220V \quad I_1 = I_2 = 5A \quad W_1 = 550\,W, W_2 = 1100\,W$$

Las medidas de corriente y voltaje son módulos en valores eficaces; se sabe que en ambas medidas las corrientes están retrasadas 0 o más grados referidas a sus respectivos voltajes.

(a) Calcular las potencias activa, reactiva y aparente totales consumidas al sistema de fuentes.

(b) i) Sabiendo que U_2 está $\pi/3$ radianes adelantado respecto a U_1, hacer un diagrama fasorial que involucre a los fasores U_1, U_2 y los voltajes de línea.

ii) Sabiendo además que la carga es balanceada (carga de todas las fases iguales), hallar un sistema de cargas en triángulo equivalente al sistema del problema.

iii) Escribir dicha carga como el paralelo de una carga puramente imaginaria y otra puramente real.

LAS HIPÓTESIS DE ESTA PARTE SE MANTIENEN DURANTE EL RESTO DEL PROBLEMA

(c) En las condiciones de la parte anterior calcular la expresión temporal de las corrientes por las cargas, tomando U_1 con fase 0.

(d) Compensar el factor de potencia, indicando qué componentes colocaría y cómo los conectaría para que su magnitud sea lo más chica posible.

(e) Realizar un diagrama fasorial vinculando U_1, I_1, la corriente por la carga Z_1 entre las líneas 1 y 3 y el(los) voltaje(s) y la(s) corriente(s) por el(los) elemento(s) de compensación conectado(s) a la línea 1.

(f) Hallar un equivalente en estrella de todo el sistema de cargas incluyendo los elementos de compensación.

Sistemas Lineales 1
Examen Diciembre del 2009

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

Se tiene una onda periódica $g(t)$ de periodo T_0, valor medio nulo y coeficientes de Fourier

$$\begin{cases} c_n(g) & = 0 \text{ si } n \text{ es par} \\ c_n(g) & \text{proporcional a } \frac{1}{n^2} \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Dicha señal se inyecta en un sistema lineal de transferencia en régimen $H(j\omega)$, que tiene un comportamiento de tipo pasabajos de segundo orden, con frecuencia de corte $\omega_C = \frac{4\pi}{T_0}$. Graficar de manera aproximada la salida en régimen, **justificando claramente las aproximaciones realizadas**.

Pregunta 2

Se considera una componente eléctrica funcionando en régimen sinusoidal, con tensión en bornes $v(t) = A_V . \cos(\omega_0 t)$ y corriente $i(t) = A_I . \cos(\omega_0 t + \Phi)$. A partir de la definición de potencia activa de la componente:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T v(t).i(t)dt$$

demostrar la fórmula de cálculo $P = re(V\bar{I})$, siendo V e I los fasores (**en valores eficaces**) asociados respectivamente a la tensión $v(t)$ y la corriente $i(t)$.

Pregunta 3

(a) A partir de la definición de producto convolución, probar que $T(t) * \delta(t-a) = T(t-a)$, para toda $T \in \mathcal{D}'$ y $a \in \mathcal{R}$.

(b) A partir de la definición de producto convolución, probar que $T(t) * \delta'(t) = T'(t)$, para toda $T \in \mathcal{D}'$.

(c) Sean $T \in \mathcal{D}'$ y $a \in \mathcal{R}$. Hallar la distribución $T(t) * \delta'(t-a)$.

Pregunta 4

Se dice que una función $x : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$ es de energía finita si es cuadrático integrable.

(a) Definir la Transformada de Fourier de una función.

(b) Enunciar la Identidad de Parseval para funciones de energía finita.

(c) ¿Cuál es la relación exacta entre la energía de una señal $x(t)$ de banda acotada W y la de la señal $m(t) = x(t).\cos(2\pi f_C t)$, con $f_C \gg W$? Justificar claramente la respuesta. No es necesario demostrar las propiedades o resultados que utiliza, pero sí es imprescindible enunciarlos claramente.

Solución

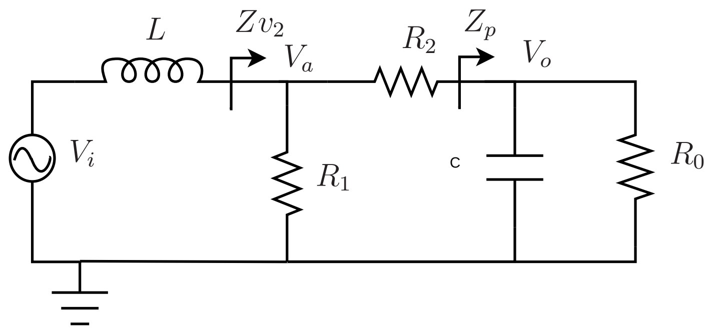
Problema 1

(a) El modelo que se utilizará para el sistema amplificador-parlante, será el modelo 4. Si observamos la relación tensión-corriente para dicho modelo, que corresponde a la impedancia equivalente, tenemos:

$$Z_p(j\omega) = \frac{V_p}{I} = \frac{R_0}{j\omega R_0 C + 1} \tag{1}$$

La relación mostrada en (1) concuerda con los diagramas de Bode obtenidos del ensayo. El resto de los casos tienen diagramas de Bode de módulo que no corresponden (verifíquelo!!!)

(b) En primer lugar, calculamos Z_p y Zv_2 que se indican en la figura.



$$Z_p = \frac{R_0}{j\omega C R_0 + 1}$$

$$Zv_2 = \frac{R_1 R_2 (j\omega C R_0 + 1) + R_1 R_0}{R_0 + (R_1 + R_2)(j\omega C R_0 + 1)}$$

Luego, reconociendo divisores de tensión, tenemos:

$$V_p = V_a \frac{Z_p}{Z_p + R_2} \qquad V_a = V_i \frac{Zv_2}{Zv_2 + j\omega L}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{V_p}{V_i} = H(j\omega) = \frac{Z_p}{Z_p + R_2} \frac{Zv_2}{Zv_2 + j\omega L}}$$

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{R_0 R_1 R_2}{(R_1 + R_2) R_0 R_2 LC (j\omega^2) + [R_0 R_1 R_2^2 C + (R_0 R_2 + R_1 R_2 + R_2^2) L](j\omega) + R_0 R_1 R_2 + R_1 R_2^2}}$$

(c) Considerando $R_0 = R_1 = R_2$ y evaluando la transferencia obtenida en la parte anterior, obtenemos:

$$H(j\omega) = \frac{R}{R(1 + j\omega CR + 1)} \frac{(2 + j\omega CR)R}{j\omega L(2j\omega CR + 3) + R(j\omega CR + 2)} \tag{2}$$

$$\Rightarrow \quad H(j\omega) = \frac{1}{2(j\omega)^2 LC + (j\omega)\left[3\frac{L}{R} + CR\right] + 2} \tag{3}$$

Finalmente si definimos $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$ y por lo tanto $\frac{R}{L} = \frac{1}{RC} = \omega_0$, sustituyendo en (3) obtenemos:

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{1}{2} \times \frac{\omega_0^2}{(j\omega)^2 + 2\omega_0 (j\omega) + \omega_0^2}}$$

(d) Realizamos los diagramas de Bode asintóticos para la transferencia en régimen calculada en la parte anterior. Para ello identificamos las frecuencias críticas (ω_0 en este caso).

- Para $\omega \ll \omega_0$,

$$H(j\omega) \approx \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx -20\log(2)\ dB \\ Arg(H(j\omega)) \approx 0 \end{cases}$$

- Para $\omega_0 \ll \omega$,

$$H(j\omega) \approx \frac{1}{2}\frac{\omega_0^2}{(j\omega)^2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx -20\log(2) - 40\log(\omega)\, dB \\ Arg(H(j\omega)) \approx \pi \text{ o } -\pi \end{cases}$$

Evaluando la transferencia en ω_0, sabemos cual es el argumento:

$$H(j\omega_0) \approx \frac{1}{2}\frac{\omega_0^2}{2j\omega_0^2} \Rightarrow \text{ el argumento es } -\pi$$

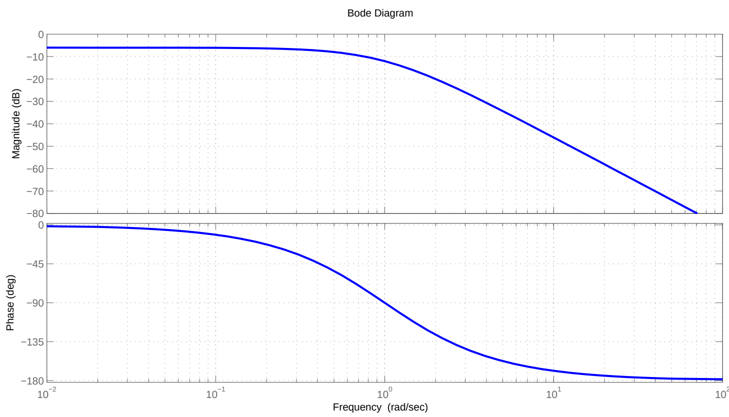


Figura 5: Diagrama de Bode

(e) I) Calculamos la ganancia para las frecuencia pedidas:

- para $\omega = \frac{\omega_0}{10}$,
$$20\log(|H(j\omega)|) = -6{,}1\, dB$$
- para $\omega = \omega_0$,
$$20\log(|H(j\omega)|) = -12{,}04\, dB$$
- para $\omega = 10\omega_0$,
$$20\log(|H(j\omega)|) = -46{,}1\, dB$$

II) La distancia entre el Bode real y el asintótico para las frecuencias estudiadas vale:

- para $\omega = \frac{\omega_0}{10}$,

$$dist(\omega_0/10) = -6{,}1\, dB - (-6dB) = -0{,}1\, dB$$

- para $\omega = \omega_0$,

$$dist(\omega_0) = -12{,}04\, dB - (-6dB) = -6{,}04\, dB$$

- para $\omega = 10\omega_0$,

$$dist(10\omega_0) = -46{,}1\,dB - (-46dB) = -0{,}1\,dB$$

III) Para que la salida esté en contrafase, el sistema debe aportar un desfasaje de $\pm\pi$. Si observamos los diagramas de Bode asintóticos, podemos afirmar que NO existe frecuencia para la cual la entrada y la salida estén en contra fase. Si bien para frecuencias altas el desfasaje tiende a $-\pi$, nunca se alcanza este valor. Puede afirmarse que para altas frecuencias, la salida estará prácticamente en contrafase con la entrada.

IV) Razonando igual que antes, buscamos una frecuencia a la cual el sistema aporte $\pm\frac{\pi}{2}$. Existe (al menos una) frecuencia para la cual la entrada y la salida están en cuadratura. Esto se puede ver observando el diagrama de Bode. Además, podemos demostrar lo anterior, teniendo en cuenta que para bajas frecuencias el desfasaje tiende a cero, para altas frecuencias tiende a $-\pi$ y además es una función continua, por lo tanto, $\exists\ \omega_c$ tal que $\arg(H(j\omega_c)) = -\pi/2$ (ver teorema del valor intermedio). (Si en el proceso de construcción del diagrama de Bode de fase se evaluó la transferencia en ω_0, ya se observa una frecuencia solución de esta parte).

(f) Este circuito es útil para reproducir sonidos de baja frecuencia (en particular frecuencias menores que ω_0), ya que en esa banda presenta una respuesta plana y no introduce distorsión de amplitud, que es la relevante en lo que a audio refiere.

Problema 2

(a) Como la carga no tiene neutro podemos utilizar el teorema de Blondell, por lo cual la potencia total consumida por el sistema de cargas es la suma de W_1 y W_2 $\boxed{P_{tot} = 1650\,W}$.

El teorema de Blondell también vale para las potencias reactiva y aparente, primero hallamos la potencia reactiva medida por unos hipotéticos medidores de potencia aparente y reactiva ubicados en las mismas posiciones que W_1 y W_2. $|S_{1,2}| = |U_{1,2}| * |I_{1,2}| = 1100VA$

Como se deduce del triángulo de potencias (Q_1, W_1, S_1)
$Q_1 = \sqrt{|S_1|^2 - W_1^2} = 952{,}6\,VAR$, $Q_2 = \sqrt{|S_2|^2 - W_2^2} = 0\,VAR$,
$\boxed{\Rightarrow\ Q_{tot} = 952{,}6\,VA}$

$$\boxed{S_{tot} = 1650 + j952{,}6\,VA = 1905\,VA\angle 30^{\text{o}}}$$

(b) i) Para hacer el diagrama fasorial relacionamos los voltajes de línea con U_1 y U_2

$$U_{12} = U_1 - U_2 \tag{4}$$
$$U_{23} = U_2 \tag{5}$$
$$U_{31} = -U_1 \tag{6}$$

Esto nos da el diagrama de la figura 6. Del diagrama fasorial se puede deducir que el sistema de fuentes es perfecto.

ii) Al ser el sistema perfecto y balanceado, cada impedancia consume un tercio de la potencia aparente total:

$$S_{tot} = 3\frac{|U|^2}{\overline{Z}} \Rightarrow Z = 3\frac{|U|^2}{\overline{S_{tot}}} = (66 + 38,11j)\Omega = 76{,}21\angle 30^{\text{o}}\Omega$$

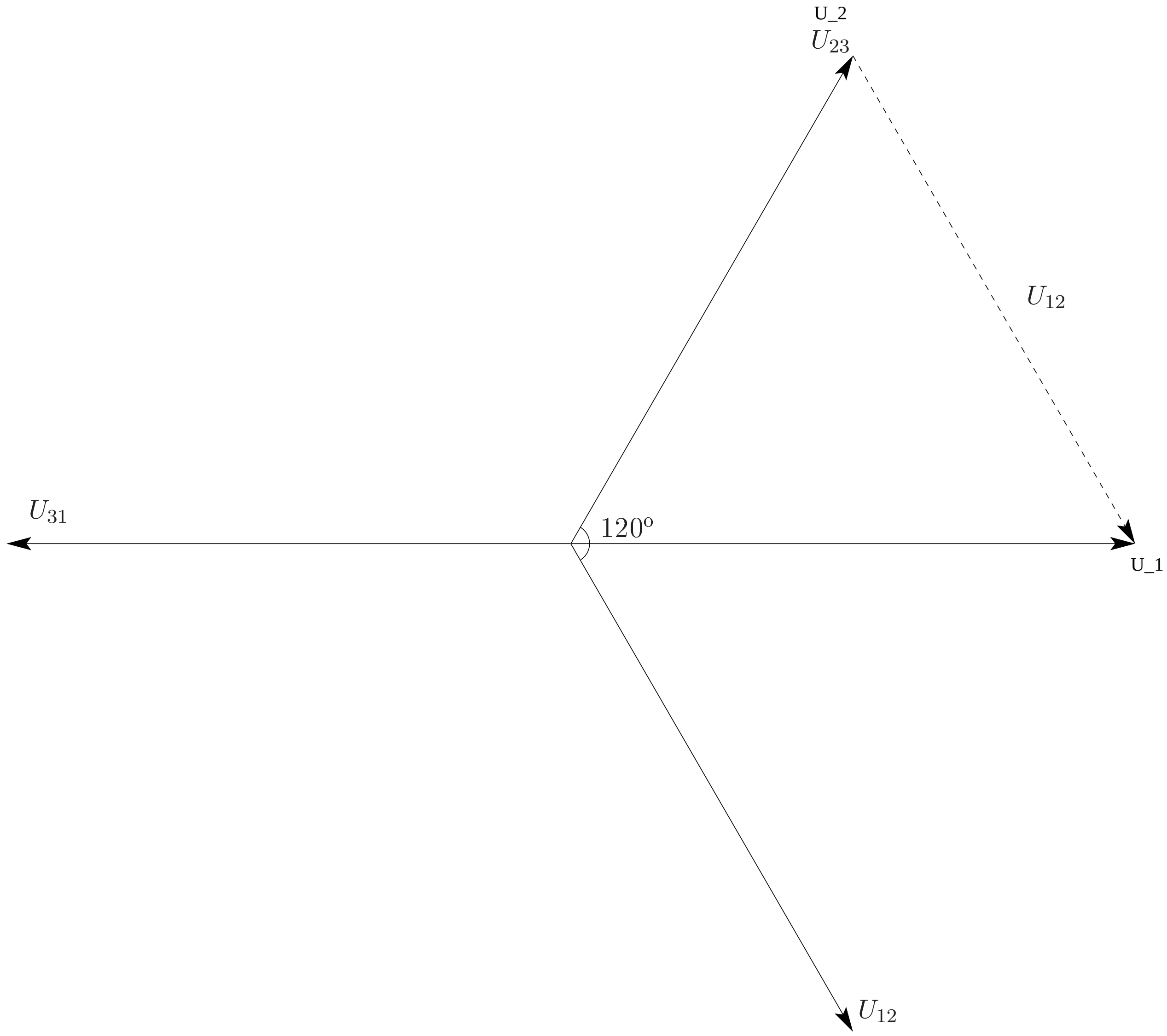


Figura 6: Diagrama fasorial de las fuentes

iii) La carga real consume toda la potencia activa mientras la imaginara toda la reactiva:

$$P_{tot} = 3\frac{|U|^2}{R} \;\Rightarrow R = 3\frac{|U|^2}{P_{tot}} = 88\,\Omega$$

$$Q_{tot} = 3\frac{|U|^2}{X} \;\Rightarrow X = 3\frac{|U|^2}{Q_{tot}} = 152,4\,\Omega$$

(c) La corriente por la carga entre las líneas 1 y 3 es $I_{31} = -U_1/Z = 2{,}887A\angle 150^o$, la expresión temporal es por lo tanto

$$\boxed{i_{31}(t) = 2{,}887 \times \sqrt{2}A\cos\left(100\pi t + \frac{5\pi}{6}\right) = 4{,}083A\cos\left(100\pi t + \frac{5\pi}{6}\right)}$$

Nota: en la letra se omitió el valor de la frecuencia, pero en el examen se aclaró que era $50Hz$

Para las otras corrientes hay que sumarles $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}$ al desfasaje.

(d) Como las cargas son inductivas la compensación tiene que ser con capacitores.

$Q_C = C\omega|V_C|^2$ o sea que para generar la misma reactiva con condensadores más chicos el voltaje en bornes tiene que ser mayor, esto sucede si los condensadores están en triángulo.

$Q_{tot_C} = -Q_{tot} = -3C\omega|U_i|^2$

$\boxed{\Rightarrow\ C = \frac{Q_{tot}}{3\omega|U_i|^2} = 20{,}88\mu F}$

(e) La corriente por la carga Z_1 está retrasada 30º (el argumento de Z) respecto a U_{31}.

Los voltajes en los elementos de compensación conectados a la línea 1 son U_{12} y U_{31} dado que los elementos de compensación están conectados en triángulo.

Las corrientes por los condensadores son perpendiculares a sus voltajes y son tales que sumadas a las corrientes por las impedancias quedan colineales con los voltajes de línea.

La corriente I_1 la podemos determinar de los instrumentos conectados a la línea 1, como el módulo es dato calculamos el argumento.

$$\arg(I_1) = -\arg(S_1) = -\cos^{-1}\left(\frac{W_1}{|S_1|}\right) = -\cos^{-1}\left(\frac{W_1}{|U_1 I_1|}\right)$$

$$= -\cos^{-1}(0{,}5) = -60^{\circ}$$

I_1 está retrasada 60º respecto a U_1 por lo que queda colineal con U_{12}

Esto da por resultado el diagrama de la figura 7

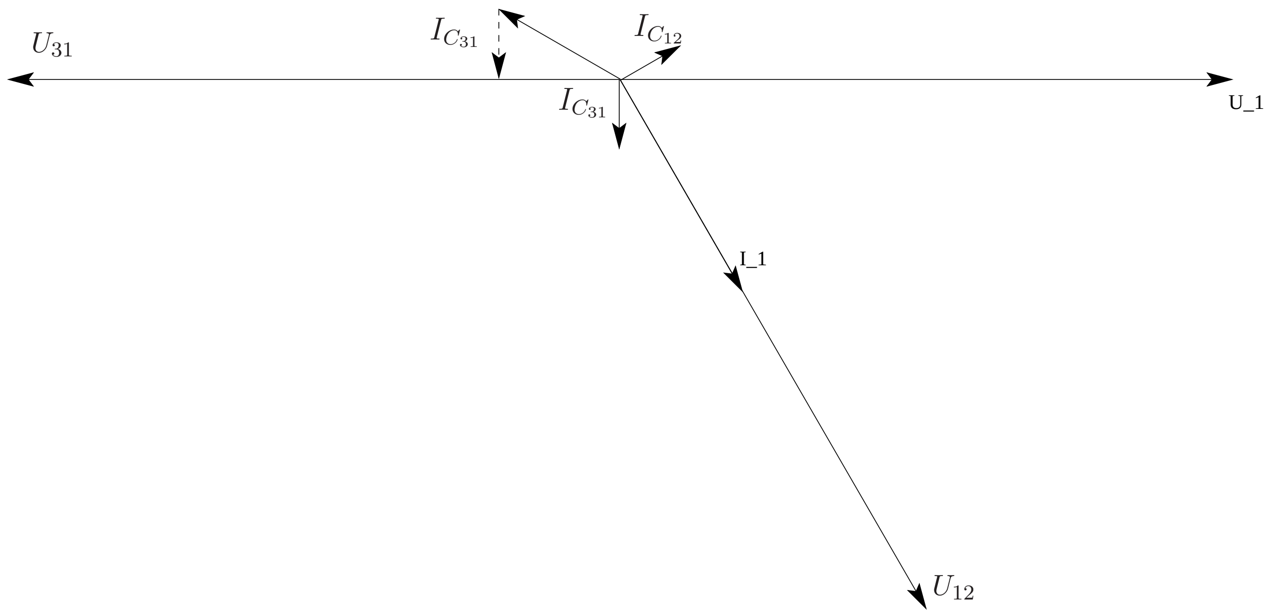


Figura 7: Diagrama fasorial

(f) El equivalente en estrella está conformado por resistencias de valor $R/3 = 29{,}33\Omega$ ya que el condensador en paralelo con la bobina tendrán impedancia infinita (se calculó el condensador para que toda la corriente vaya por la resistencia).