Sistemas Lineales 1 - Examen Practico - 25/7/08

Nota Importante: Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente.

Sea prolijo y explique y detalle bien todos sus pasos. Exprese sus resultados exactamente en el formato pedido. Recuerde, que a través de esta evaluación usted debe demostrar sus conocimientos en la materia. Tenga presente que si algo no es claro para el evaluador, usted podría perder los puntos correspondientes a la pregunta.

Realice problemas diferentes en hojas diferentes.

Problema 1

a) Sean dados $\omega_0 > 0$, $0 < \zeta < 1$, y $q > 0$. Halle las distribuciones $T_g, T_l \in \mathcal{D}'_+$ (y asociadas a g y l respectivamente) solución de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} &T_g'' + 2\omega_0\zeta T_g' + \omega_0^2 T_g = \omega_0^2 \delta \ , \\ &T_l = q T_g' \ . \end{aligned}$$

Exprese $g(t)$ y $l(t)$ claramente y solo en términos de t, ω_0, ζ, y q.

Nota: Puede ser útil recordar que la solución general de una ec. diferencial homogénea de segundo orden con coeficientes constantes y cuyo polinomio característico tiene raíces $a \pm jb$ es $c_1 e^{at} \sin(bt) + c_2 e^{at} \cos(bt)$.

b) Considere el circuito de la figura donde se verifica que $\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ y $\frac{1}{2}\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \zeta$.

(i) Escriba una ecuación diferencial, que describa el comportamiento del circuito, y que relacione i_L con i_i.

(ii) Dado que la salida de nuestro sistema es v_0, y que se verifica que $v_0(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$, use (la parte **(i)** y) la solución de la parte **(a)** para escribir la respuesta al impulso, h, de este nuestro sistema (con entrada i_i y salida v_0). Exprese $h(t)$ claramente y solo en términos de t, ω_0, ζ, y L.

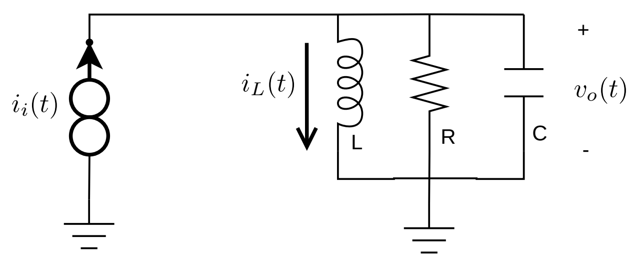


Figura 1: circuito del problema 1

c) Halle la función $H = \mathcal{F}\{h\}$. Exprese $H(f)$ claramente y solo en términos de f, ω_0, ζ, y R.

Nota: Observe que la función $h(t)$ se puede escribir como combinación lineal de funciones de la forma $Y(t)e^{-zt}$ con $Re(z) > 0$, y la transformada de esta función es sencilla.

d) Sea $I_0 > 0$ dado y $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Sea ahora $i_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, una función periodica, de periodo T_0, definida via

$$i_i(t) = \begin{cases} 0 \ , & -\frac{T_0}{2} \le t < 0 \\ I_0 \ , & 0 \le t < \frac{T_0}{2} \end{cases} \ .$$

Halle la serie de Fourier, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(i_i) e^{jk\omega_0 t}$, asociada a i_i. Exprese los coeficientes de Fourier, $c_k(i_i)$, claramente y solo en términos de k y I_0.

e) Para la función excitación i_i de la parte **(d)** halle la serie de Fourier, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(v_0)e^{jk\omega_0 t}$, asociada a la respuesta en régimen, v_0, del sistema bajo consideración (de la parte **(b)**). Exprese los coeficientes de Fourier, $c_k(v_0)$, claramente y solo en términos de k, ζ, y (RI_0).

f) Para la respuesta en régimen, v_0, de la parte **(e)**:

(i) Calcule la tension media de salida,

$$V_{0,m} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} v_0(t)dt \ .$$

(ii) Usando la parte **(e)**, y sus conocimientos teoricos de series de Fourier, escriba una expresión para la tension eficaz de salida,

$$V_{0,\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T_0}\int_{T_0} v_0^2(t)dt}$$

solo en términos de ζ, y (RI_0).

(iii) Asuma que $\zeta = \frac{1}{10}$. Calcule $\frac{V_{0,\text{eff}}}{(RI_0)}$ aproximadamente usando la parte **(ii)**. Para esta aproximación solo considere los $c_k(v_0)$ con $k \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

Problema 2

Se considera el circuito de la figura, en que la fuente dependiente tiene un voltaje αV_o, con $0 \leqslant \alpha < 1$.

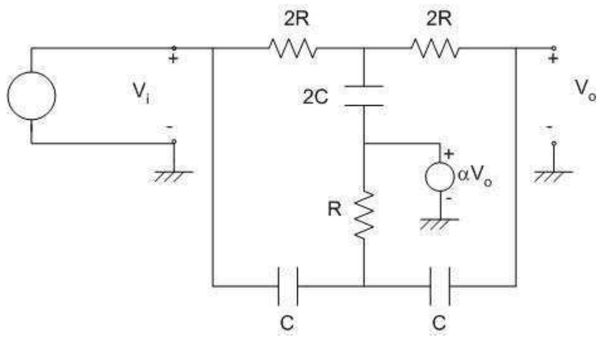


Figura 2: circuito del problema 2

Llamando $\omega_0 = \frac{1}{RC}$:

1. Calcular la transferencia $H(j\omega) = V_o/V_i$.
2. Hallar la condición que debe cumplir α para que el denominador de la transferencia tenga raíces complejas.
3. Cumpliéndose dicha condición, dibujar el diagrama de Bode de módulo y argumento de $H(j\omega)$.
4. Si $\alpha = \frac{5}{8}$, calcular las pulsaciones ω_1 y ω_2 de caída de $3dB$.
5. Se desea usar el circuito para filtrar la frecuencia de la red (50Hz) en un amplificador de audio. Si se tomar $R = 5M\Omega$, calcular C.

Sistemas Lineales 1 - Examen Teórico - 25/7/08

Nota Importante: Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

Recordando que la transformada de Fourier de un pulso es una función de tipo *sinc*, calcular:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\alpha x)}{x}\, dx$$

con $\alpha > 0$ y mostrar que el resultado no depende de dicho parámetro.

Pregunta 2

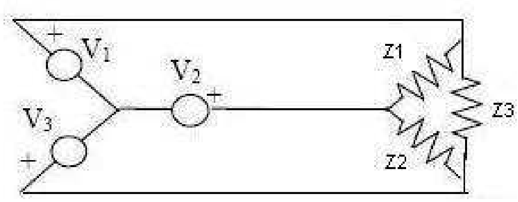
Se sabe que, si tanto g como $t.g(t)$ son funciones transformables, se verifica que $\frac{d}{df}\mathcal{F}\{g(t)\}(f) = \mathcal{F}\{(-j2\pi t)g(t)\}(f)$. A partir de la definición de transformada de Fourier para distribuciones:

$$< \mathcal{F}[T], \varphi > = < T, \mathcal{F}[\varphi] > \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

probar que "derivar en el tiempo equivale a multiplicar en frecuencia".

Pregunta 3

Consideremos el sistema trifásico de la figura, donde el sistema de fuentes es equilibrado y perfecto y las cargas son idénticas $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z$.



a) Mostrar que la potencia instantánea total entregada por el sistema de fuentes es constante.

b) ¿Cambia algo si se duplica el valor de Z_1 sin modificar los de Z_2 y Z_3?

Pregunta 4

Consideremos la siguiente transferencia en régimen de primer orden $H(j\omega) = \frac{j\omega + a}{j\omega + ka}$ con k y a reales positivos y $k > 1$. Mostrar que existe una frecuencia ω_0 (y hallar el valor exacto de la misma) a la cual el diagrama de Bode de módulo real y el asintótico coinciden. Bosqueje ambos diagramas.

Sistemas Lineales 1 - Soluciones Examen Final

Problema 1.-

a)

$$g(t) = Y(t)\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\zeta^2}}\, e^{-\omega_0\zeta\, t}\sin(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\, t)\ .$$

$$l(t) = Y(t)q\, \frac{\omega_0^2}{\sqrt{1-\zeta^2}}\, e^{-\omega_0\zeta\, t}\big(\sqrt{1-\zeta^2}\cos(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\, t) - \zeta\sin(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\, t)\big)\ .$$

b)

(i)

$$\ddot{i}_L(t) + 2\omega_0\zeta\, \dot{i}_L(t) + \omega_0^2\, i_L(t) = \omega_0^2\, i_i(t)\ .$$

(ii)

$$h(t) = Y(t)L\, \frac{\omega_0^2}{\sqrt{1-\zeta^2}}\, e^{-\omega_0\zeta\, t}\big(\sqrt{1-\zeta^2}\cos(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\, t) - \zeta\sin(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\, t)\big)\ .$$

c) Usando el hecho que para $z \in \mathbb{C}$, $\Re\{z\} > 0$, se verifica

$$\mathcal{F}\{Y(t)\, e^{-z\, t}\}(f) = \frac{1}{(z + j2\pi f)}\ ,\ f \in \mathbb{R}\ ,$$

resulta que

$$H(f) = \mathcal{F}\{h\}(f) = R\, \frac{2\omega_0\zeta\, (j2\pi f)}{((j2\pi f)^2 + 2\omega_0\zeta\, (j2\pi f) + \omega_0^2)}\ .$$

d)

$$c_k(i_i) = \frac{I_0}{2} \times \begin{cases} 1 & ,\quad k = 0 \\ \frac{1}{j\pi k}(1 - (-1)^k) & ,\quad k \neq 0 \end{cases}\ .$$

e)

$$c_k(v_0) = H(k\frac{\omega_0}{2\pi})\, c_k(i_i)\ ,\ k \in \mathbb{Z}\ .$$

Entonces, $c_0(v_0) = 0$, y

$$c_k(v_0) = \frac{(RI_0)}{2\pi}\, \frac{2\zeta}{((jk)^2 + 2\zeta\, (jk) + 1)}\, (1 - (-1)^k)\ ,\ k \in \mathbb{Z}\ ,\ k \neq 0\ .$$

f)

(i)

$$V_{0,\mathrm{m}} = c_0(v_0) = 0 \ .$$

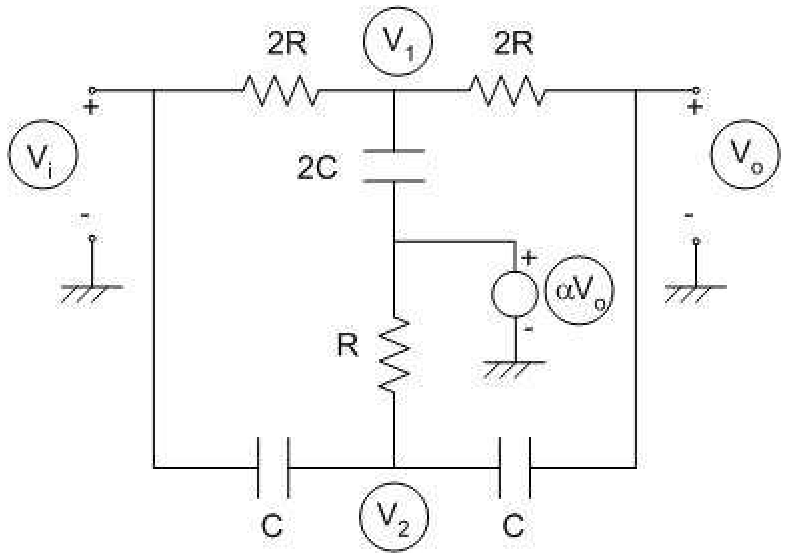
(ii)

$$V_{0,\mathrm{eff}} = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(v_0)|^2} = \frac{(RI_0)}{\pi}\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(2\zeta)^2}{((1-(2k+1)^2)^2+(2\zeta(2k+1))^2)}} \ .$$

(iii) Asumiendo $\zeta = \frac{1}{10}$, y solo considerando los $c_n(v_0)$ con $n \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, obtenemos

$$\frac{V_{0,\mathrm{eff}}}{(RI_0)} \approx \frac{1}{\pi}\sqrt{2\big(1+\frac{(2\zeta)^2}{(64+9(2\zeta)^2)}\big)} \approx \frac{\sqrt{2}}{\pi} \ .$$

1)



Nudo V_1 $\quad \dfrac{V_i - V_1}{2R} = 2C\omega j(V_1 - \alpha V_o) + \dfrac{V_1 - V_o}{2R}$

Nudo V_2 $\quad C\omega j(V_i - V_2) = \dfrac{V_2 - \alpha V_o}{R} + C\omega j(V_2 - V_o)$

Nudo V_o $\quad \dfrac{V_1 - V_o}{2R} = C\omega j(V_o - V_2)$

$$\begin{cases} V_i - V_1 = 4RC\omega jV_1 - 4RC\omega j\alpha V_o + V_1 - V_o \\ RC\omega jV_i - RC\omega jV_2 = V_2 - \alpha V_o + RC\omega jV_2 - RC\omega jV_o \\ V_1 - V_o = 2RC\omega jV_o - 2RC\omega jV_2 \end{cases}$$

Llamando $RC\omega j = x$

$$\begin{cases} V_i + (1+4\alpha x)V_o = 2(1+2x)V_1 \qquad \Rightarrow \qquad V_1 = \dfrac{V_i}{2(2x+1)} + \dfrac{4\alpha x+1}{2(2x+1)}V_o \\ xV_i + (\alpha + x)V_o = (1+2x)V_2 \qquad \Rightarrow \qquad V_2 = \dfrac{xV_i}{2x+1} + \dfrac{x+\alpha}{2x+1} \\ (1+2x)V_o = V_1 + 2xV_2 \end{cases}$$

Sustituyendo V_1 y V_2 en la tercera, queda una relación entre V_i y V_o, de la que se despeja:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{4x^2+1}{4x^2+8(1-\alpha)x+1}$$

Volviendo a $x = RC\omega j$

$$H(j\omega) = \frac{\frac{4(j\omega)^2}{\omega_o^2}+1}{\frac{4(j\omega)^2}{\omega_o^2}+8(1-\alpha)\frac{j\omega}{\omega_o}+1} = \frac{\omega_o^2-4\omega^2}{\omega_o^2-4\omega^2+8(1-\alpha)\omega_o j\omega}$$

2)

Raíces del denominador complejas: $64(1-\alpha)^2-16<0 \Rightarrow (1-\alpha)^2 < \frac{1}{4}$

Como $1-\alpha>0$ $\quad 1-\alpha<\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha>\frac{1}{2}$

3)

Tanto para ω_o muy pequeño como muy grande $H(j\omega_o) \approx 1 = 0db$

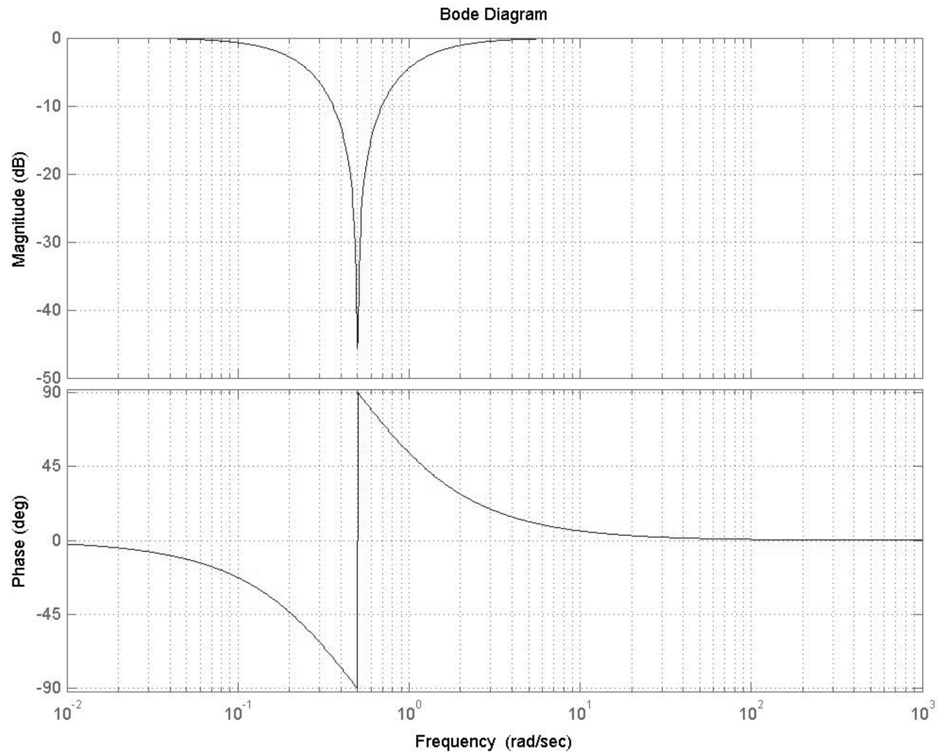
En $\omega = \frac{\omega_o}{2}$, $H(j\omega)$ tiene un cero

En cuanto a la fase, en ambos extremos es 0.

En el cero de $H(j\omega)$, nos acercamos por izquierda y derecha:

$$\omega \to \frac{\omega_o}{2}^{-} \Rightarrow H \approx \frac{1}{1+j\infty} \approx -0j \qquad Arg(H) \approx -\frac{\pi}{2}$$

$$\omega \to \frac{\omega_o}{2}^{+} \Rightarrow H = \frac{1}{1-j\infty} \approx 0j \qquad Arg(H) \approx \frac{\pi}{2}$$



(Para el diagrama se tomó $\omega_o = 1 \quad \alpha = \frac{1}{2}$)

4)

$$\alpha = \frac{5}{8} \quad H(j\omega) = \frac{1}{1+\dfrac{j3\omega_o\omega}{\omega_o^2 - 4\omega^2}}$$

Caída 3 db:

$$\frac{3\omega_o\omega}{\omega_o^2 - 4\omega^2} = \pm 1 \qquad\qquad \pm 3\omega_o\omega = \omega_o^2 - 4\omega^2$$

Sea $\dfrac{\omega}{\omega_o} = x \Rightarrow 4x^2 \pm 3x - 1 = 0 \Rightarrow$ Las soluciones para x pueden ser: -1, ¼, -¼, 1

Las válidas son ¼ y 1. $\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \dfrac{\omega_0}{4} \\ \omega_2 = \omega_o \end{array} \right.$

5)

$$\frac{f_o}{2} = 50Hz \quad f_o = 100 \quad \omega_o = 2\pi 100 = \frac{1}{RC}$$

$$C = \frac{1}{2x100\pi R} = \frac{10^{-6}}{2x100\pi x5} = \frac{1000}{\pi} x10^{-12} = 318\,pF$$