Sistemas Lineales 1

Examen Julio del 2006

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

(a) Sea el circuito de la Figura 1 trabajando en régimen sinusoidal.

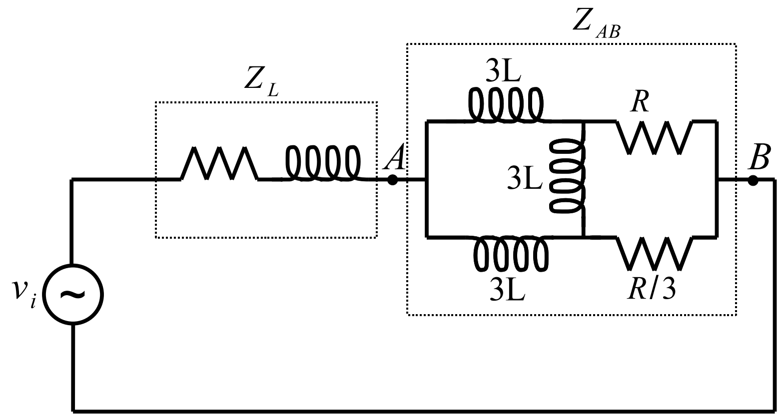


Figura 1:

I) Hallar al impedancia equivalente entra A y B (Z_{AB}). Si $R = 100\Omega$, $L = 50mHy$ y $\omega = 100\pi\, rad/s$, verificar que $Z_{AB} = (25{,}4 + j25{,}4)\Omega$.

II) Sabiendo además que $V_i = 500e^{j0}V$ (fasor eficaz), $Z_L = (1 + j2)\Omega$, calcular los fasores I (corriente entregada por las fuentes), V_{ZL} (caída en bornes de Z_L) y V_{ZAB} (caída en bornes de Z_{AB}). Ubicarlos en un diagrama fasorial junto al fasor de la fuente.

III) Calcular las potencias activas consumidas por Z_L y por Z_{AB}. También calcular la potencia activa suministrada por la fuente y verificar explícitamente el balance de potencias.

(b) Se considera el sistema de distribución de energía eléctrica de la Figura 2, cuyos elementos constitutivos allí se indican. El objetivo de este tipo de instalaciones es suministrar potencia a un sistema de cargas de manera eficiente, minimizando las pérdidas en las líneas de transmisión.

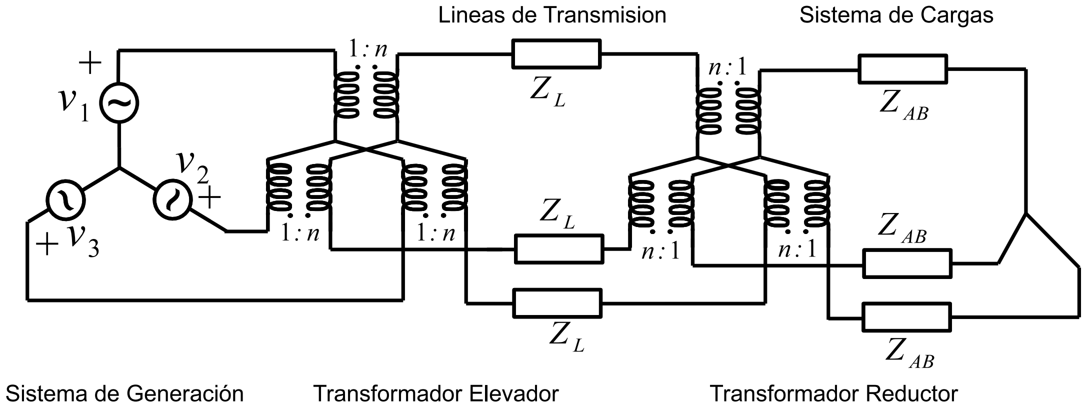


Figura 2: Sistema de Distribución

- $V_1 = 500e^{j0}V$, $V_2 = 500e^{j\frac{2\pi}{3}}V$, $V_3 = 500e^{j\frac{4\pi}{3}}V$ fasores eficaces.
- Transformadores **ideales** con $n = 10$

I) Hallar el equivalente monofásico de la instalación, visto desde el primario del transformador elevador, **explicando claramente.**

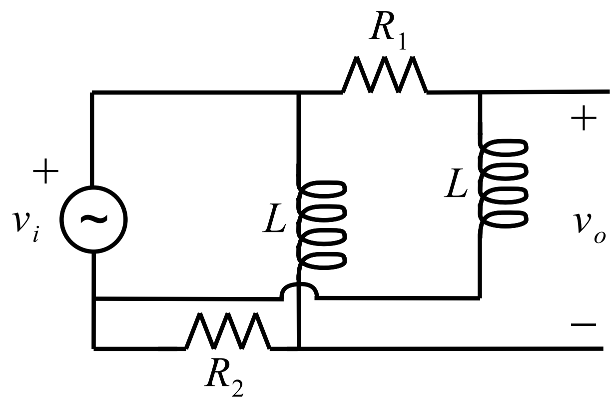
II) Calcular las respectivas potencias trifásicas consumidas por las líneas (P_{Z_L}) y el sistema de cargas (P_{ZAB}).

III) Observando que P_{Z_L} permite modelar las pérdidas Joule en las líneas de transmisión, comparar la performance de este sistema de distribución frente a uno idéntico pero sin transformadores.

IV) ¿Piensa que una compensación local de potencia reactiva (a nivel de sistema de cargas) en el sistema de la Figura 2 mejoraría la eficiencia del sistema? **Justificar.**

Problema 2

(a) En el circuito de la Figura 3 hallar la transferencia $H(j\omega) = \dfrac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$.



$$R_1 = 100R$$
$$R_2 = R$$
$$\omega_0 = \frac{R}{L}$$

Figura 3:

(b) Realizar los diagramas asintóticos de Bode de $H(j\omega)$.

- I) Explicar detalladamente la construcción.
- II) A partir del Diagrama asintótico, hallar gráficamente la frecuencia a la cual el sistema atenúa lo máximo posible (**Justificar**).
- III) De forma analítica. hallar la máxima atenuación **real** en decibeles (justificar las aproximaciones razonables realizadas).

(c) Calcular la frecuencia a la cual $V_i(t)$ y $V_o(t)$ están en cuadratura.

(d)
- I) Para la frecuencia de la parte c) realizar un diagrama fasorial en el que aparezcan V_i y la caída de voltaje en la resistencia R_2.
- II) Ubicar gráficamente en dicho diagrama el fasor V_o (lo más a escala posible).
- III) Hallar gráficamente en dicho diagrama las caídas de voltaje en los restantes elementos del circuito.

Nota: justificar la ubicación de cada fasor, verificar que los ángulos sean coherentes.

(e)
- I) Hallar aproximadamente el rango de frecuencias para las cuales el sistema distorsiona en amplitud más de $1\,dB$
- II) Exprese el ancho del rango calculado en octavas.
- III) Sean f_1 y f_2 los extremos del rango calculado en e)i), hallar $v_o(t)$ para las entradas:
  - $v_1(t) = 1V\cos(2\pi f_1 t)$
  - $v_2(t) = 1V\cos(2\pi f_2 t)$

Sistemas Lineales 1

Examen Julio del 2006

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

Los siguientes sistemas están dados por su relación entrada salida, tanto en frecuencia como en el tiempo. $e(t)$ denota la entrada y $s(t)$ la salida, ambas en el tiempo. $E(f)$ y $S(f)$ denotan las mismas señales en frecuencia.

- Sistema 1: $s(t) = sinc(Kt) * e(t)$
- Sistema 2: $S(f) = [3 + \sin(f)] \cdot E(f)$
- Sistema 3: $s'(t) + K\,s(t) = e(t)$

(a) Si se desea implementar un filtro pasa-bajos, ¿cuál (o cuáles) de los sistemas es el más conveniente?

(b) Si se trabaja con señales de banda acotada, ¿cuál (o cuáles) de los sistemas son adecuados si se busca evitar la distorsión en módulo?

(c) ¿Qué sistema utilizaría si busca evitar la distorsión en fase?

JUSTIFICA CLARAMENTE CADA UNA DE SUS RESPUESTAS

Pregunta 2

Se considera la transferencia en régimen sinusoidal:

$$H(j\omega) = \frac{K\,\omega_1(j\omega - \omega_1)}{(j\omega)^2 + 100\omega_1(j\omega) + 10^4\omega_1^2} \quad K = 1000$$

Tenemos las siguientes señales de entrada: $e_1(t) = 2\cos\left(\omega\, t - \frac{\pi}{6}\right)$, $e_2(t) = 100\cos(\omega\, t)$ y las señales de salida en régimen: $r_1(t) \approx 20\cos\left(\omega\, t - \frac{\pi}{6}\right)$, $r_2(t) \approx 100\sin(\omega\, t)$, $r_3(t) \approx -100\sin(\omega\, t)$.
Indicar las posibles parejas entrada-salida. **JUSTIFICAR**.

Pregunta 3

Se arma un circuito como el indicado en la Figura 4. De los bloques componentes del circuito se conocen las potencias activas y reactivas consumidas. El bloque 2 es inductivo y el 3 es capacitivo.

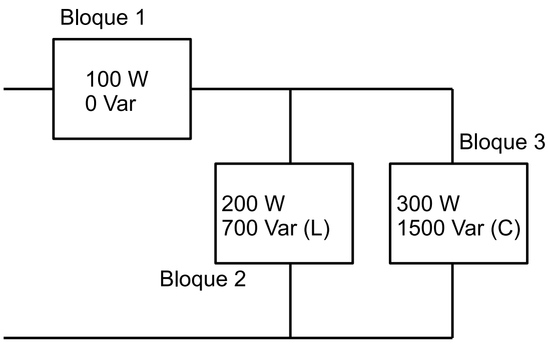


Figura 4:

(a) Hallar la potencia aparente de cada bloque, expresada en VA.

Para el conjunto, hallar:

(b) Potencia activa, reactiva y aparente entregadas por las fuentes y el correspondiente factor de potencia.

(c) Dibujar el correspondiente triángulo de potencias.

Pregunta 4

(a) Sea $g(t)$ una función periódica de periodo $T = \dfrac{1}{f_0}$ y $P_T(t)$ el pulso de altura 1 y ancho T centrado en el origen. Definamos $g_T(t) = g(t).P_T(t)$. Expresar el coeficiente de Fourier de $g(t)$, $c_n(g)$, en función de la transformada de Fourier de $g_T(t)$.

(b) A partir de **la definición** de la Transformada de Fourier de distribuciones ($\langle \mathcal{F}[U(t)](f), \varphi(f) \rangle = \langle U(t), \mathcal{F}[\varphi(f)](t) \rangle$), probar la identidad:

$$\mathcal{F}\left[e^{j2\pi f_0 t}\right](f) = \delta(f - f_0)$$

(Probar todas las propiedades y explicitar todas las definiciones que utiliza)

(c) Hallar la transformada de Fourier $\mathcal{F}[g(t)](f)$ de la función $g(t) = \cos(\omega_0 t)$

(d) Mostrar que $\mathcal{F}[\cos(2\pi f_0 t) .P_T(t)] = \dfrac{T}{2}[sinc(T(f - f_0)) + sinc(T(f + f_0))]$.

Solución

Problema 1

(a) I) Notando que las inductancias se encuentran en triángulo, podemos trasfigurarlas a sus equivalentes en estrella, como se muestra en la Figura 5, obteniendo:

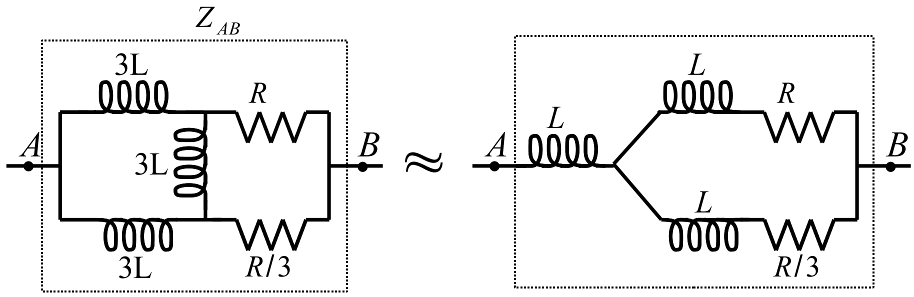


Figura 5:

Luego,

$$Z_{AB} = Lj\omega + (R + Lj\omega) \| \left(\frac{R}{3} + Lj\omega \right) = \frac{9(Lj\omega)^2 + 8RL(j\omega) + R^2}{4R + 6Lj\omega}$$

Teniendo en cuenta que $R = 100\Omega$, $L = 50mHy$ y $\omega = 100\pi \, rad/s$ obtenemos:

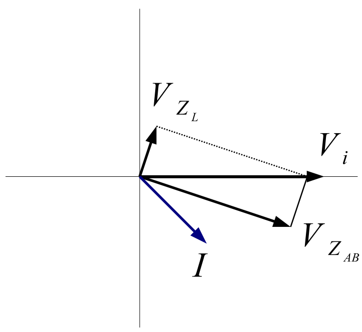
$$\boxed{Z_{AB} = (25{,}4 + j25{,}4)\Omega}$$

II) Dado $V_i = 500V\angle 0^o$ y $Z_L = (1 + 2j)\Omega$, tenemos:

$$I = \frac{V_i}{Z_L + Z_{AB}} \Rightarrow \boxed{I = (9{,}11 - j9{,}44)A} \quad (1)$$

$$V_{Z_L} = Z_L \, I \Rightarrow \boxed{V_{Z_L} = (28{,}01 + j8{,}77)V} \quad (2)$$

$$V_{Z_{AB}} = Z_{AB} \, I \Rightarrow \boxed{V_{Z_{AB}} = (471{,}9 - j8{,}7)V} \quad (3)$$



III) Para el valor de corriente calculado en la parte anterior, tenemos:

$$P_{Z_L} = Re\{Z_L\} |I|^2 \Rightarrow \boxed{P_{Z_L} = 172{,}3W} \quad (4)$$

$$P_{Z_{AB}} = Re\{Z_{AB}\} |I|^2 \Rightarrow \boxed{P_{Z_{AB}} = 4383W} \quad (5)$$

$$P_{V_i} = Re\{V_i \, I^*\} \Rightarrow \boxed{P_{V_i} = 4555{,}3W} \quad (6)$$

Como se puede verificar, $P_{V_i} = P_{Z_L} + P_{Z_{AB}}$.

(b) I) Pasando las impedancias a los primarios de los transformadores elevadores; las impedancias de las cargas, en primera instancia se multiplican por n^2, y luego se dividen por la misma cantidad, (pues el transformador elevador y el reductor tienen relación de vueltas inversas).Las impedancias de las líneas únicamente las pasamos al primario por lo que se dividen entre n^2. El equivalente monofásico se muestra en la Figura 6.

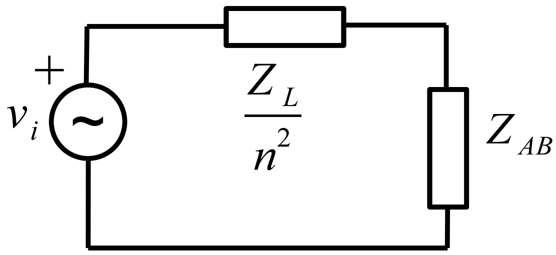


Figura 6: Equivalente monofásico

II) Trabajando con el equivalente monofásico, calculamos las corrientes de línea, I, y repetimos los cálculos de la parte a) recordando que tenemos 3 fases:

$$P_{Z_L} = 3Re\left\{\frac{Z_L}{n^2}\right\}|I'|^2 \;\Rightarrow\; \boxed{P_{Z_L\,tri} = 5,71W} \tag{7}$$

$$P_{Z_{AB}} = 3Re\{Z_{AB}\}|I'|^2 \;\Rightarrow\; \boxed{P_{Z_{AB}\,tri} = 14{,}73kW} \tag{8}$$

III) Un indicador de la eficiencia del sistema de distribución, puede ser:

$$\eta = \frac{P_{Z_{AB}tri}}{P_{Z_L tri} + P_{Z_{AB}tri}} \times 100$$

En el caso del sistema con transformadores, tenemos $\eta = 99{,}9\,\%$, mientras que en el sistema sin los transformadores tendremos $\eta = 96\,\%$. Como se puede observar, la utilización de los transformadores permite reducir considerablemente la potencia disipada en las líneas aumentando las eficiencia del sistema.

IV) Una compensación local de la potencia reactiva, seguro va a contribuir al aumento de la eficiencia. Al aumentar el factor de potencia se disminuye la corriente manteniendo el valor de la potencia media, por lo tanto las perdidas en las líneas serán menores (pues dependen de $|I|^2$)

Problema 2

(a) Observando el circuito, vemos que se puede re-dibujar como se muestra en la Figura 7, donde la tensión se salida está dada por $V_0 = V_A - V_B$.

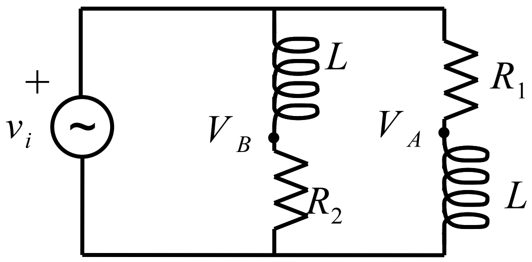


Figura 7:

Las tensiones en A y B, las calculamos a partir de los divisores respectivos:

$$V_A = V_i \frac{Lj\omega}{R_1 + Lj\omega} \tag{9}$$

$$V_B = V_i \frac{R_2}{R_2 + Lj\omega}$$

Utilizando que $R_2/L = \omega_0$ y $R_1/L = 100\omega_0$ obtenemos:

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 - 100\omega_0^2}{(j\omega + \omega_0)(j\omega + 100\omega_0)}} \tag{10}$$

(b) I) Realizamos el diagrama de bode asintótico, estudiando la transferencia aproximada para los distintos valores de ω. La transferencia presenta ceros en $\pm 10\omega_0$ y polos en ω_0 y $100\omega_0$

- Para $\omega \ll \omega_0$,

$$H(j\omega) \approx -1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx 0\,dB \\ Arg(H(j\omega)) \approx \pi \end{cases}$$

- Para $\omega_0 \ll \omega \ll 10\omega_0$,

$$H(j\omega) \approx \frac{-100\omega_0}{j\omega} \;\Rightarrow\; \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx 20\log(100\omega_0) - 20\log(\omega)\, dB \\ Arg(H(j\omega)) \approx \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Para $10\omega_0 \ll \omega \ll 100\omega_0$,

$$H(j\omega) \approx \frac{j\omega}{100\omega_0} \;\Rightarrow\; \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx -20\log(100\omega_0) + 20\log(\omega)\, dB \\ Arg(H(j\omega)) \approx \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Para $100\omega_0 \ll \omega$,

$$H(j\omega) \approx 1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx 0\, dB \\ Arg(H(j\omega)) \approx 0 \end{cases}$$

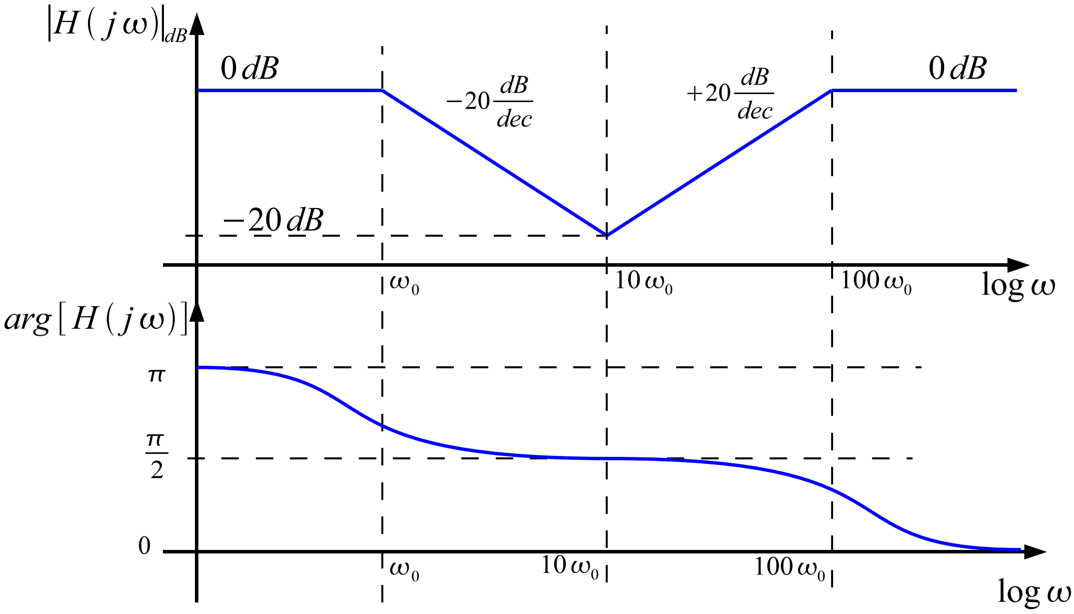


Figura 8: Diagrama de Bode

II) Si observamos el Diagrama de Bode asintótico dado en la Figura 8, podemos observar que la máxima atenuación se produce para $\omega = 10\omega_0$, donde la atenuación vale $-20\, dB$. *Obs: Las singularidades de la transferencia, están separadas al menos una década entre si, por lo que la aproximación asintótica nos da un valor razonable para la frecuencia de máxima atenuación.*

III) Si calculamos la atenuación **real** para dicha frecuencia, obtenemos:

$$|H(j10\omega_0)| = \left|\frac{(j10\omega_0)^2 - 100\omega_0^2}{(j10\omega - \omega_0)(j10\omega_0 - 100\omega_0)}\right| = \frac{200}{\sqrt{10^2+1^2}\sqrt{10^2+100^2}} \approx \frac{2}{10} \approx -14\,dB$$

Utilizamos el diagrama de bode real mostrado en la Figura 9 (obtenido utilizando matlab) para verificar los datos y observar el comportamiento real.

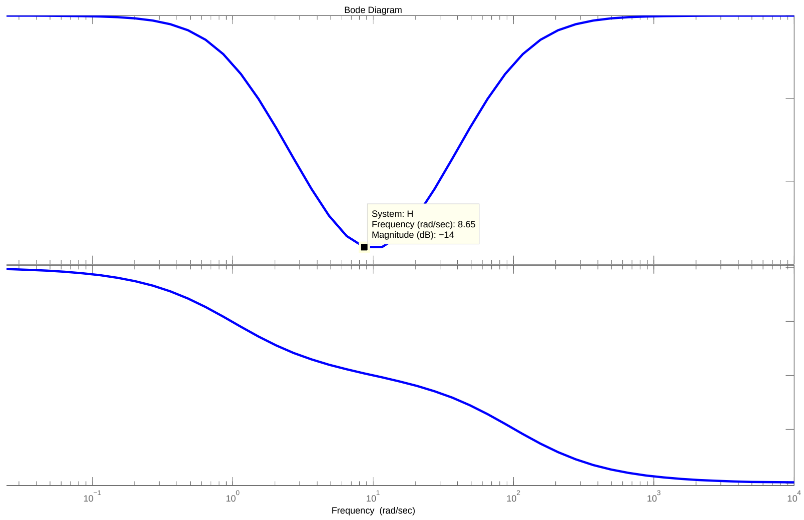


Figura 9: Diagrama de Bode real

(c) La entrada y la salida, estarán en cuadratura, para la frecuencia ω^* tal que $H(j\omega^*) = j\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.
Si observamos la transferencia hallada en (10), podemos ver que:

$$H(j10\omega_0) \approx \frac{-2}{j10} \;\Rightarrow\; \text{para dicha frecuencia } \boxed{V_0 = \frac{j2V_i}{10}}$$

(d) Para la frecuencia de la parte anterior, queremos observar la caída de voltaje en la resistencia R_2 en función de V_i. Por un lado sabemos:

$$V_{R_2} = V_i\frac{R_2}{R_2 + j\omega} = V_i\frac{\omega_0}{\omega_0 + j\omega}$$

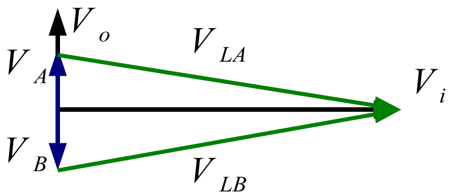
Si evaluamos en la frecuencia de la parte anterior, $(\omega = 10\omega_0)$ tenemos:

$$V_{R_2} = V_i\frac{1}{1+j10} \approx \frac{V_i}{j10} = \frac{-V_0}{2}$$

Por otro lado podemos calcular la tensión V_A para $\omega = 10\omega_0$, evaluando la expresión obtenida en (9) obteniendo:

$$V_A = V_i\frac{j\omega}{100\omega_0 + j\omega} \approx V_i\frac{j}{10} = \frac{V_0}{2}$$

En la figura se muestra un diagrama fasorial con las tensiones en los distintos componentes del circuito.



(e)

I) Utilizando que la diferencia entre el bode real y el asintótico, es aproximadamente $1\,dB$ una octava antes del polo y una octava después. Podemos calcular la banda a la cual el sistema distorsiona en amplitud más de $1dB$ como: $\left[\frac{\omega_0}{2}, 200\omega_0\right]$

II) El ancho del rango calculado anteriormente lo podemos expresar en octavas como $\log_2\left(\frac{100\omega_0}{\omega_0/2}\right) \approx 8{,}64$

III) Si la entrada vale $v_1(t) = 1V\cos(\omega_0/2\,t)$ la salida será de la forma:

$$s_1(t) = 1V\,|H(j\omega_0/2)|\cos\left(\frac{\omega_0}{2}\,t + arg(H(j\omega_0/2))\right)$$

Evaluando la transferencia hallada en (10) tenemos:

$$s_1(t) = 0{,}89V\cos\left(\frac{\omega_0}{2}\,t + 153^{\circ}\right)$$

Razonando de forma análoga para la entrada $v_2(t) = 1V\cos(200\omega_0\,t)$ obtenemos:

$$s_2(t) = 0{,}89V\cos(200\omega_0\,t + 27^{\circ})$$

Como se puede verificar, la atenuación a dichas frecuencias es de aproximadamente $1\,dB$