Sistemas Lineales 1

Examen Julio del 2004

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, renúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

(a) Se considera el circuito de la figura 1. Hallar la transferencia $H(j\omega)\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$.

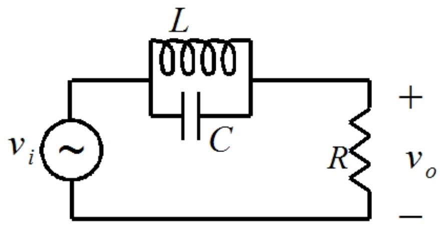


Figura 1:

(b) I) Sabiendo que se cumplen las relaciones $\omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{R}{L}$, realizar los Diagramas asintóticos de Bode de $H(j\omega)$. **Justificar los pasos realizados para su construcción**

II) Calcular los límites laterales de $arg[H(j\omega)]$ cuando $\omega \to \omega_o^{\pm}$ e **incluir esta información en los Diagramas asintóticos, bosquejando los Diagramas reales.**

(c) Hallar el intervalo exacto de frecuencias $[\omega_1, \omega_2]$ donde la distorsión de amplitud es en módulo mayor o igual a $3dB$ respecto al valor para $\omega = \infty$.

(d) Se desea procesar una señal de banda acotada $v_i(t)$. Por problemas del sistema, a la señal se le adiciona un tono interferente, obteniéndose una señal ruidosa de la forma $v_i^*(t) = v_i(t) + A\cos(\omega_{int}t)$. Supondremos que el soporte de $V_i(f) = \mathcal{F}[v_i(t)]$ se encuentra sobre una banda de frecuencias mucho mayores a ω_{int}.

I) Mostrar que el circuito de la Figura 1 puede utilizarse como una etapa de acondicionamiento de la señal $v_i^*(t)$, pudiendo eliminar completamente la interferencia si se elige un valor adecuado para ω_0.

II) Para dicho valor de ω_0, calcular la salida en régimen ante una entrada de la forma:

$$v_i^*(t) = 1V\left[\cos(\omega_2 t) + \cos\left(100\omega_2 t - \frac{\pi}{4}\right)\right] + 0,5V\ \cos(\omega_{int}t)$$

Problema 2

(a) I) En el circuito de la Figura 2 hallar la impedancia equivalente Z_{eq}.

II) Simplificar la expresión para el caso en que el transformador sea perfecto.

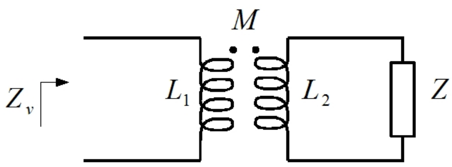


Figura 2:

DE AQUÍ EN MÁS SE TRABAJARA CON TRANSFORMADORES PERFECTOS ($L_1,\ L_2,\ M$).

(b) I) En el circuito de la Figura 3, calcular el condensador C en función de la frecuencia angular de trabajo y los parámetros del transformador, para que la impedancia equivalente Z_{eq} sea colineal con Z.

II) Demostrar que en este caso el transformador junto en el condensador se comporta como un transformador ideal, a la frecuencia de trabajo; calcular el equivalente a la relación de vueltas.

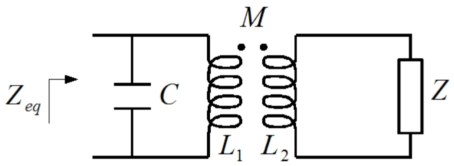


Figura 3:

(c) En el circuito de la Figura 4

I) compensar la potencia reactiva entregada por la fuente mediante elementos Z_r en paralelo con los primarios de los transformadores; decir que elementos ubicaría; justificar por qué y calcular su valor.

Para los siguientes valores:

$$R = 70\Omega \quad L_1 = 516Hy \quad L_2 = 1Hy \quad \omega = 100\pi \tfrac{rad}{s}$$

$$v_1(t) = 7070\,V\cos(\omega t) \quad v_2(t) = 7070\,V\cos\left(\omega t + \tfrac{2\pi}{3}\right) \quad v_3(t) = 7070\,V\cos\left(\omega t + \tfrac{4\pi}{3}\right)$$

II) Dibujar un diagrama fasorial en el que aparezcan las tensiones de las fuentes, las corrientes de fase I_1, I_2 e I_3.

III) Ubicar cualitativamente a las corrientes por el primario de los transformadores en dicho diagrama fasorial, **justifique.**

IV) Hallar la expresión temporal de $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $i_3(t)$.

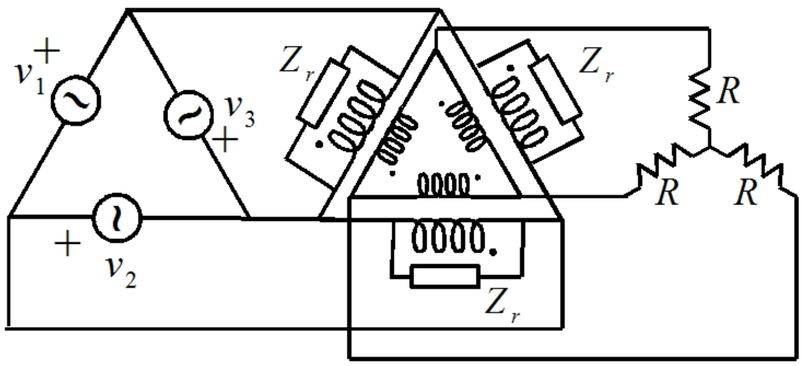


Figura 4:

Sistemas Lineales 1

Examen Julio del 2004

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

(a) ¿Cuándo se dice que un sistema no presenta distorsión?

(b) **Deducir** la condición en frecuencia de no distorsión para un sistema lineal de transferencia $H(f)$.

(c) Se considera un sistema de propagación de señales en el cual existe un canal principal, que introduce una ganancia K_1 y un retardo t_1, y un canal secundario, debida a la reflexión, de ganancia K_2 y retardo t_2. Para $\frac{K_1}{K_2} \ll 1$, la transferencia total del sistema resulta ser aproximadamente:

$$H(f) \approx K_1 e^{-j2\pi f t_1} \cdot \left[1 + \frac{K_1}{K_2}\ \cos\left(2\pi f(t_2 - t_1)\right)\right]$$

I) Indicar si el sistema distorsiona en amplitud y/o fase.

II) Es razonable esperar el fenómeno de intermodulación. **JUSTIFICAR.**

Pregunta 2

(a) Se considere un elemento lineal funcionando en régimen sinusoidal e su tensión en bornes y la corriente que la atraviesa las llamaremos respectivamente $v(t)$ e $i(t)$. **A partir de la definición de potencia medie en régimen sinusoidal** P_m, deducir las fórmulas $P_m = Re(V.\bar{I}) = |V|.|I|.\cos(\varphi)$, siendo V e I los fasores asociados a la tensión $v(t)$ y la corriente $i(t)$ en valores eficaces y φ el argumento de la impedancia asociada al elemento lineal.

(b) Cosideremos el circuito de la Figura 5 en el que se muestra una fuente sinusoidal conectada con una carga a través de una línea. Hallar la expresión de la potencia media en la carga P_R en función de E_s,$Z_L\angle\phi_L = R_L + jX_L$ y $Z\angle\theta = R + jX$. Si sólo se considera que varía el módulo de la carga, manteniendo constante su fase, encontrar Z_L que maximiza P_R (relacionar la respuesta con el módulo de la impedancia de línea).

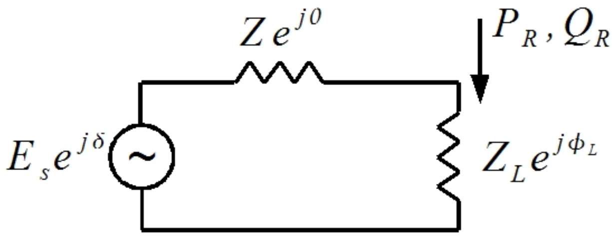


Figura 5:

Pregunta 3

Se considera un pulso de ancho T y altura A centrado en el origen, como se muestra en la Figura 6.

(a) Deducir la convolución $p_T(t) * p_T(t)$ y graficarla.

(b) Hallar $G(f)$, la TdF del pulso $p_T(t)$.

(c) Calcular la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} G(f)\, df$.

(d) Calcular **de al menos dos maneras diferentes,** la integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G^2(f)\, df$$

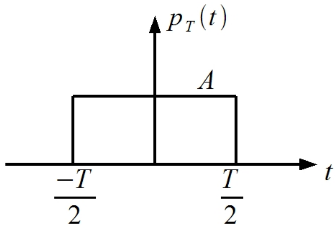


Figura 6:

Pregunta 4

(a) Deducir la expresión general de la derivada de la distribución asociada a la función localmente integrable que presenta un salto en el origen.

(b) Definir el cambio de variable en distribuciones, explicando por qué se define de esa manera.

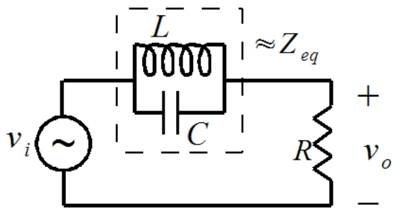
(c) Sea $T(t)$ la distribución asociada a la función localmente integrable $Y(-t)$, siendo $Y(t)$ la función escalón. Probar que $T'(t) = -\delta(t)$. (Sugerencia: observar que $Y(t) + Y(-t) = 1$).

(d) Sean $g_1(t)$ y $g_2(t)$ dos funciones de clase C^1 que cumplen que $g_1(0) = g_2(0)$ y satisfacen la ecuación diferencial $g_i''(t) + \omega^2.g_i(t) = 0$, con $\omega > 0$. Mostrar que la distribución $S(t)$ asociada a la función $Y(t).g_1(t) + Y(-t).g_2(-t)$ verifica la identidad $S''(t) + \omega^2.S(t) = c\delta(t)$, hallando el valor adecuado de c.

Solución

Problema 1

(a)



Planteando un divisor de tensión, obtenemos:

$$v_o = v_i \frac{R}{R+Z_{eq}} \text{ donde } Z_{eq} = \frac{\frac{L}{C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + \frac{1}{LC}}{(j\omega)^2 + \frac{j\omega}{RC} + \frac{1}{LC}}} \qquad (1)$$

(b) Sabiendo que se cumplen las relaciones, $\omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{R}{L}$, podemos reescribir la transferencia hallada en (1) como:

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + \omega_0^2}{(j\omega)^2 + j\omega\,\omega_0 + \omega_0^2} \qquad (2)$$

Podemos observar que la transferencia presenta ceros complejos conjugados con $\zeta = 0,\ \omega_n = \omega_0$ y polos también complejos conjugados con $\zeta = 0,5,\ \omega_n = \omega_0$.

Observemos el comportamiento de la transferencia para valores *muy chicos* y *muy grandes* de ω:

- Para $\omega \ll \omega_0$

$$H(j\omega) \approx 1 \ \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx 0\,dB \\ \\ arg(H(j\omega)) \approx 0 \end{cases}$$

- Para $\omega_0 \ll \omega$

$$H(j\omega) \approx 1 \ \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx 0\,dB \\ \\ arg(H(j\omega)) \approx 0 \end{cases}$$

Observemos que para $\omega = \omega_0$, el numerados de la transferencia se anula, $H(j\omega_0) = 0 \ \Rightarrow |H(j\omega_0)|_{dB} = -\infty$. Por otro lado, el argumento presenta una discontinuidad en ω_0, para saber como varia la fase para las frecuencias cercanas a ω_0, estudiamos lo limites laterales del $arg(H(j\omega))$.

$$\lim_{\omega\to\omega_0^+} = \lim_{\omega\to\omega_0^+} \left[arg(\omega_0^2 - \omega^2) - arg((j\omega)^2 + \omega_0(j\omega) + \omega_0^2)\right]$$

Como

$$\omega_0^2 - \omega^2 \to 0^- \ \Rightarrow \ arg(\omega_0^2 - \omega^2) \to \pi$$
$$(j\omega)^2 + \omega_0(j\omega) + \omega_0^2 \to j\omega\omega_0 \ \Rightarrow \ arg((j\omega)^2 + \omega_0(j\omega) + \omega_0^2) \to \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\omega\to\omega_0^+} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

De forma análoga, calculamos:

$$\lim_{\omega\to\omega_0^-} = \lim_{\omega\to\omega_0^-} \left[arg(\omega_0^2 - \omega^2) - arg((j\omega)^2 + \omega_0(j\omega) + \omega_0^2)\right] = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

(c) Para $\omega \to \infty$, el modulo de la transferencia tiende a $0dB$. Buscamos el rango de frecuencias para las cuales la distorsión en amplitud, es mayor o igual a $3dB$, respecto al valor para $\omega \to \infty$, es decir ω_1, ω_2 tal que $|h(j\omega_1)|_{dB} = |h(j\omega_2)|_{dB} = -3dB$. Buscamos entonces las raíces de $|H(j\omega')| = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$|H(j\omega')| = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \Rightarrow \ |H(j\omega')|^2 = \frac{\left(\omega_0^2 - \omega'^2\right)^2}{\left(\omega_0^2 - \omega'^2\right)^2 + \omega_0^2\omega'^2} = \frac{1}{2}$$

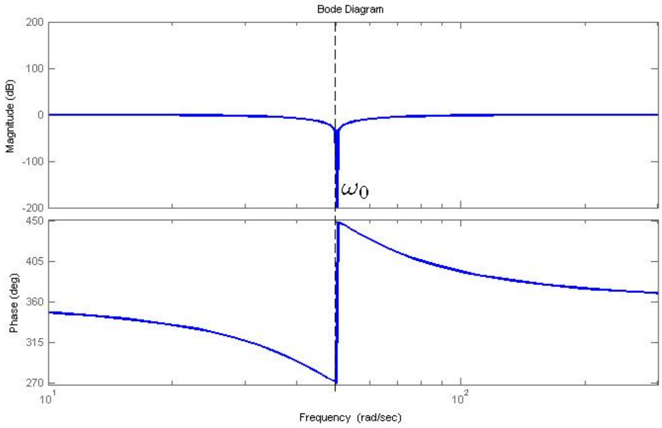


Figura 7: Diagrama de bode

$$\Rightarrow \left(\omega_0^2 - \omega'^2\right)^2 = \omega_0^2\omega'^2 \Rightarrow \omega'^4 - 3\omega_0^2\omega'^2 + \omega_0^4 = 0 \Rightarrow \omega'^2 = \frac{3\omega_0^2 \pm \sqrt{9\omega_0^4 - 4\omega_0^4}}{2}$$

$$\Rightarrow \omega' = \begin{cases} \omega_0\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{2}} & \Rightarrow \boxed{\omega_1 = \omega_0\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}}} \\ \omega_0\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{2}} & \Rightarrow \boxed{\omega_2 = \omega_0\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}}} \end{cases}$$

(d) I) Sabemos que el sistema en régimen, responderá a la entrada $v_i^*(t) = v_i(t) + A\cos(\omega_{int}t)$ como:

$$v_o(t) = \bar{\mathcal{F}}[H(j\omega)V_i(j\omega)] + A \cdot |H(j\omega_{int})| \cos\left(\omega_{int}t + arg(H(j\omega_{int}))\right) \quad (3)$$

Sabemos que el circuito propuesto en el comienzo del ejercicio, verifica $H(j\omega_0) = 0$, recordemos que el valor de ω_0 se puede fijar convenientemente con los componentes adecuados[a]. Si elegimos $\omega_0 = \omega_{int}$, anulamos el segundo termino de la ecuación (3), **eliminando los efectos producidos por la interferencia**. Analicemos ahora el primer termino, sabemos que $V_i(j\omega)$ tiene soporte acotado, para frecuencias mucho mayores que $\omega_{inte} = \omega_0$; para $\omega \gg \omega_0$, el sistema tiene una respuesta plana con $H(j\omega) \approx 1$. Tenemos entonces:

$$v_o(t) = \bar{\mathcal{F}}[H(j\omega)V_i(j\omega)] \approx \bar{\mathcal{F}}[V_i(j\omega)] = v_i(t)$$

Hemos demostrado entonces, que el sistema acondiciona la entrada, eliminando la interferencia.

II) Ahora a la entrada tenemos una superposición de tonos, sumados al factor de interferencia.

$$v_i(t) = 1V\left[\cos(\omega_2 t) + \cos\left(100\omega_2 t - \frac{\pi}{4}\right)\right] + 0,5V\cos(\omega_{int}t)$$

La salida será la suma de la respuesta a cada tono. Como:

$$H(j\omega_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\angle\frac{\pi}{4},\ H(j100\omega_2) \approx 1\angle 0,\ H(j\omega_{int}) = 0$$

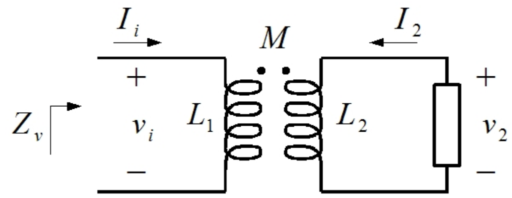
La respuesta será:

$$\boxed{v_o(t) = 1V\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(100\omega_2 t - \frac{\pi}{4}\right)\right]} \quad (4)$$

[a] es decir, los valores adecuados de R, C y L

Problema 2

(a) I)



Planteando las ecuaciones para el transformador, obtenemos:

$$v_i = L_1 j\omega I_i + M j\omega I_2 \tag{5}$$
$$v_2 = L_2 j\omega I_2 + M j\omega I_i \tag{6}$$

Por otro lado, en el secundario se cumple $v_2 = -Z\, I_2$ y despejando I_2 de (6) obtenemos:

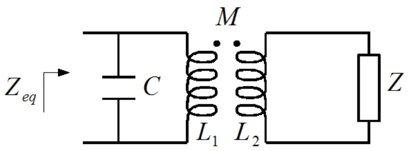
$$I_2 = -\frac{M j\omega I_i}{Z + L_2 j\omega} \;\Rightarrow\; v_i = \left[L_1 j\omega - \frac{(M j\omega)^2}{Z + L_2 j\omega}\right] I_i$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_v = \frac{L_1 j\omega Z + (L_1 L_2 - M^2)(j\omega)^2}{Z + L_2 j\omega}} \tag{7}$$

II) Si el transformador es perfecto, se verifica $L_1 L_2 = M^2$, y la impedancia calculada en (7) se puede reescribir como:

$$\boxed{Z_v = \frac{L_1 j\omega Z}{Z + L_2 j\omega}} \tag{8}$$

(b) I)



La impedancia equivalente, será $Z_{eq} = Z_v \| \frac{1}{j\omega C}$, o trabajando con admitancias, $Y_{eq} = j\omega C + Y_v$ donde $Y_v = \frac{1}{Z_v}$.

$$Y_{eq} = j\omega C + \frac{Z + L_2 j\omega}{L_1 j\omega Z} \;\Rightarrow\; Z_{eq} = \frac{L_1 j\omega Z}{Z\,(L_1 C (j\omega)^2 + 1) + L_2 j\omega}$$

Si $L_1 C (j\omega)^2 + 1 = 0$ entonces:

$$Z_{eq} = \left(\frac{L_1}{L_2}\right) Z \;\Rightarrow\; Z_{eq} \text{ colineal con } Z \text{ como se pretende.}$$

$$L_1 C (j\omega)^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{C = \frac{1}{L_1 \omega^2}}$$

II) Manteniendo la notación usada en la parte a, planteamos el nudo en el primario:

$$I^* = v_i\, C j\omega + I_i \;\Rightarrow I_i = I^* - v_i\, C j\omega$$

Recordando las ecuaciones para el transformador planteadas en la parte a, obtenemos:

$$v_i = L_1 j\omega (I^* - v_i C j\omega) + M j\omega I_2 \tag{9}$$
$$v_2 = L_2 j\omega I_2 + M j\omega (I^* - v_i C j\omega) \tag{10}$$

Recordando que $M = \sqrt{L_1 L_2}$ y $C j\omega = -\frac{1}{L_1 j\omega}$ y utilizando (9) y (10) tenemos:

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{I_1^* = -\sqrt{\dfrac{L_2}{L_1}} I_2} \\ \\ \boxed{V_1 \sqrt{\dfrac{L_2}{L_1}} = V_2} \end{cases} \tag{11}$$

Si observamos los resultados mostrados en (11), podemos concluir que, a la frecuencia de trabajo, el circuito se comporta como un transformador ideal con relación de vueltas equivalente a $n = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$.

(c) I) En primer lugar, transferimos las carga de estrella a triángulo, con resistencias de valor $3R$. Luego, si observamos cuidadosamente, podemos ver que el circuito que ve cada fase es el que se representa en la figura 8.

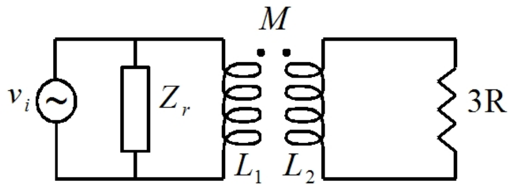
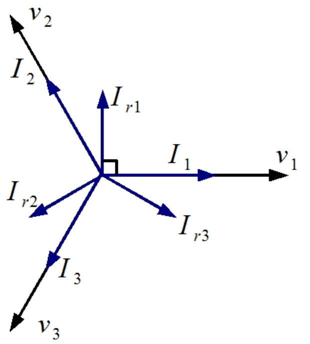


Figura 8: circuito por fase

Análogamente que para la parte b del ejercicio, si elegimos Z_r como un condensador de valor $\tilde{C} = \frac{1}{L_1\omega^2}$, la impedancia vista por la fuente será $Z_v = \left(\frac{L_1}{L_2}\right) 3R$, por lo cual no hay potencia reactiva entregada por las fuentes.

$$\tilde{C} = \frac{1}{L_1\omega^2} \text{ como } L_1 = 516Hy,\ \omega = 100\pi \frac{rad}{s} \Rightarrow \boxed{\tilde{C} = 19nF}$$

II) Utilizando la parte anterior, podemos escribir $I_i = \frac{v_i}{Z_v}$ $i = 1,2,3$ y $I_{ri} = v_i \cdot \tilde{C}j\omega$ $i = 1,2,3$. Luego utilizando $|v_i| = 7070V$ y el valor de $\tilde{C}$ calculado antes, obtenemos los fasores de corriente buscados.

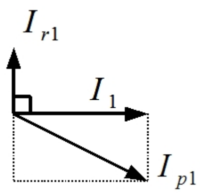


$$\begin{cases} I_1 = 46mA\angle 0 \\ I_2 = 46mA\angle 120^o \\ I_3 = 46mA\angle 240^o \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} I_{r1} = 31mA\angle 90 \\ I_{r2} = 31mA\angle 210^o \\ I_{r3} = 31mA\angle 330^o \end{cases} \tag{13}$$

III)

Para cada fase, planteamos el nudo en el primario del transformador, obteniendo $I_i = I_{ri} + I_{p_i}$ donde I_{p_i} es la corriente por el primario del transformador. Podemos escribir fácilmente la corriente por las bobinas del primario como $I_{p_i} = I_i - I_{ri}$.



IV) Podemos calcular fácilmente las expresiones temporales para las corrientes I_{ri} utilizando los fasores obtenidos en (13).

$$\boxed{\begin{aligned} i_{r1}(t) &= \sqrt{2}31mA\cos(\omega t + 90^o) \\ i_{r2}(t) &= \sqrt{2}31mA\cos(\omega t + 210^o) \\ i_{r3}(t) &= \sqrt{2}31mA\cos(\omega t + 330^o) \end{aligned}}$$