Sistemas Lineales 1

Examen de febrero de 2019

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

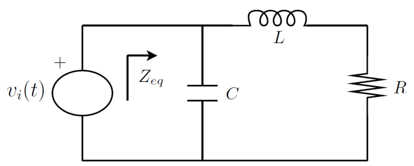


Figura 1

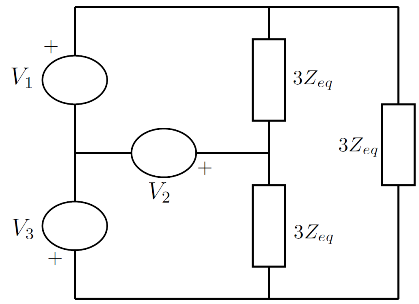


Figura 2

En la figura 1, considerando el circuito en régimen sinusoidal y los siguientes datos:

$$v_i(t) = 220\sqrt{2}V\,\text{sen}(100\pi t - \pi/6) \quad , \quad R = 22\Omega \quad , \quad L = 120mHy \quad , \quad C = 12\mu F$$

(a) i) Halle la impedancia vista por la fuente, $Z_{eq} = R_{eq} + jX_{eq}$, a la frecuencia de trabajo. Halle exprésamente su resistencia R_{eq} y su reactancia X_{eq}. Indique si es capacitiva o inductiva.

ii) Halle el fasor I asociado a la corriente que entrega la fuente de tensión y el fasor I_L de la corriente por la bobina. **Halle el valor eficaz de la corriente que entrega la fuente**.

iii) Realice un diagrama fasorial con I, I_L y V_i (fasor de la fuente de tensión). Incorpore al diagrama anterior los fasores I_C (fasor de la corriente por el condensador), V_R y V_L (fasores de la tensión en bornes de la resistencia y la bobina respectivamente). (No es necesario hallarlos explícitamente, pero el dibujo debe ser coherente con el circuito y las componentes involucradas).

(b) i) Calcule la potencia activa y reactiva entregada por la fuente.

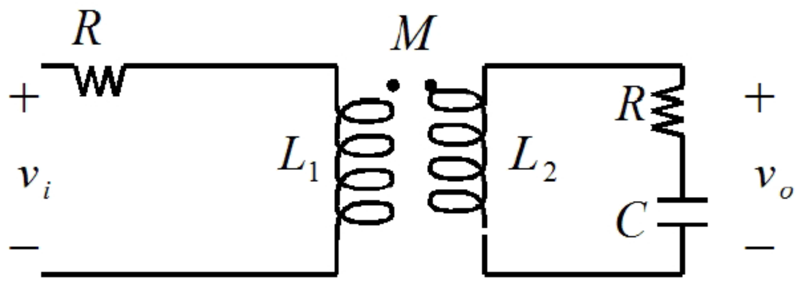
ii) Se pretende compensar la potencia reactiva consumida a la fuente. Indique qué componente colocaría, cómo la conectaría y qué valor tendría que tener para realizar la compensación.

(c) En el circuito trifásico mostrado en la figura 2, halle las **expresiones temporales** de las corrientes de línea $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, sabiendo que.

$$v_1(t) = 220\sqrt{2}V\,\text{sen}(100\pi t - \pi/6) \quad , \quad v_2(t) = 220\sqrt{2}V\,\text{sen}(100\pi t - \pi/6 + 2\pi/3)$$

$$v_3(t) = 220\sqrt{2}V\,\text{sen}(100\pi t - \pi/6 + 4\pi/3) \quad ,$$

Problema 2



(a) i) Calcular la transferencia en régimen $G(j\omega)$ del circuito de la figura, siendo el transfomador perfecto ($M = \sqrt{L_1 L_2}$).

ii) Sabiendo que $L_2 = 9999L_1$ y $L_1 = R^2C$, mostrar que $G(j\omega)$ se puede escribir como

$$G(j\omega) = K.\frac{j\omega(j\omega + \omega_1)}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_2(j\omega) + \omega_2^2}$$

con $\omega_1 = \frac{1}{RC}$, $\omega_2 = \frac{\omega_1}{100}$, $K = \frac{\sqrt{9999}}{10000}$ y $\zeta = 0,01$

(b) Realizar los Diagramas de Bode asintóticos de $G(j\omega)$, explicando claramente su deducción.

(c) Hallar los valores reales de módulo y fase en los puntos notables y bosquejar los diagramas reales.

(d) Para la entrada $v_i(t) = 1V \cos\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{4}\right)$, hallar la respectiva respuesta en régimen.

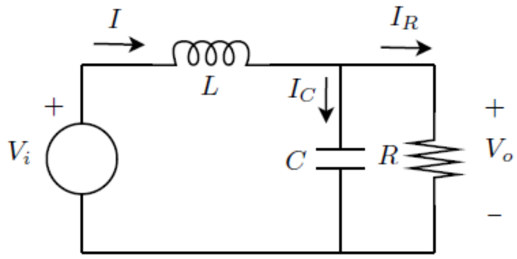
Sistemas Lineales 1

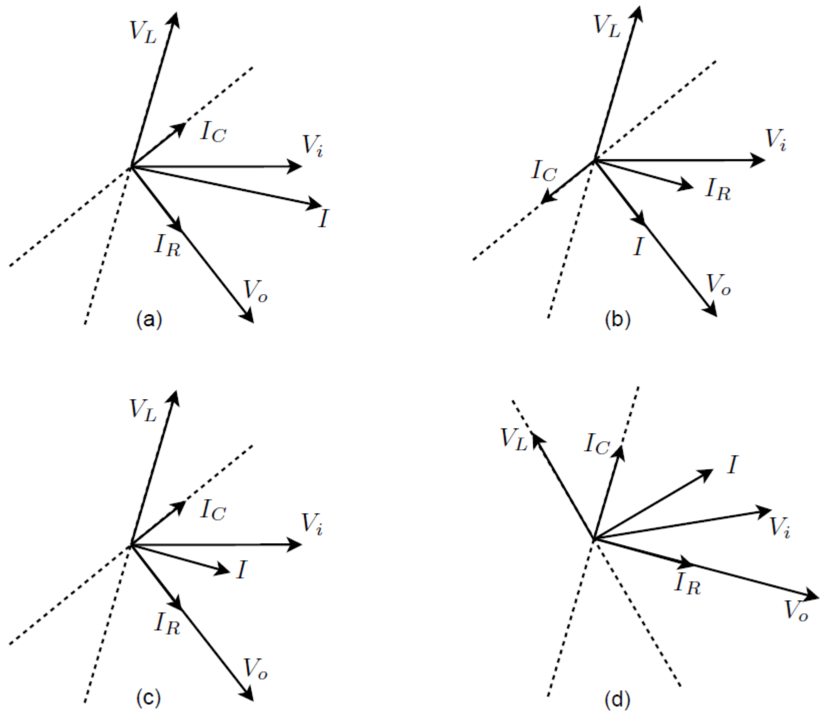
Examen de febrero de 2019

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

Indicar cuál o cuáles de los siguientes diagramas fasoriales corresponden al circuito en régimen sinusoidal de la figura. Para cada diagrama, explicar por qué corresponde o no corresponde.





Pregunta 2

Decimos que una función $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es de energía finita si es cuadrático integrable.

(a) Definir la transformada de Fourier de una función.

(b) Enunciar la indentidad de Parseval para funciones de energía finita.

(c) ¿Cuál es la relación exacta entre la energía de una señal $x(t)$ de banda acotada W y la de la señal $m(t) = x(t).\cos(2\pi f_C t)$, $f_C \gg W$? Justificar claramente la respuesta. No es necesario demostrar las propiedades o resultados utilizados, pero sí es imprescindible enunciarlos claramente.

Pregunta 3

(a) Enunciar (sin demostrar) el Teorema de la Regularizada para el producto convolución de una distribución T y una función α. Establecer con claridad las hipótesis y la tesis.

(b) Decir en cuáles de los siguientes casos es aplicable dicho teorema:

i) $T * 1$;

ii) $T * Y$;

iii) $\delta * 1$;

iv) $\delta * Y$.

siendo 1 la función constante, idénticamente igual a 1, Y es escalón de Heaviside, δ el impulso de Dirac y T la distribución asociada a la función idénticamente igual a 1 en el intervalo $(-2, 2)$ y nula fuera de él.

(c) En los cuatros casos anteriores, calcular el producto convolución.

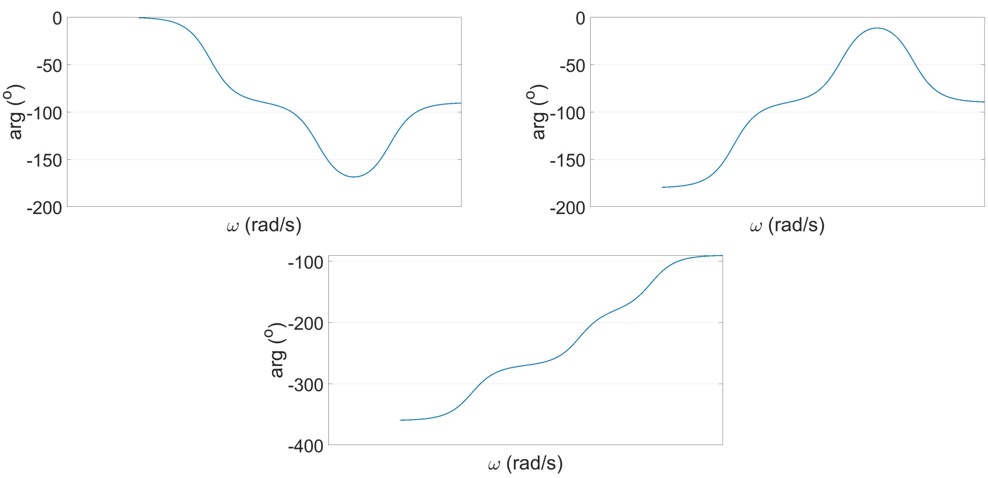
Pregunta 4

Sean $0 < a \leq b \leq c$ y $\omega_0 > 0$. Se consideran las transferencias:

$$H_1(j\omega) = \frac{\omega_0.(j\omega - b)}{(j\omega + a).(j\omega - c)} \quad , \quad H_2(j\omega) = \frac{\omega_0.(j\omega + b)}{(j\omega - a).(j\omega + c)} \quad , \quad H_3(j\omega) = \frac{\omega_0.(j\omega + b)}{(j\omega - a).(j\omega - c)}$$

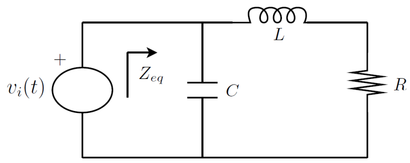
(a) Mostrar analíticamente que todas tienen el mismo diagrama de Bode de módulo.

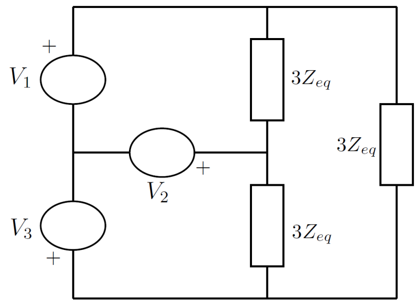
(b) Indicar cuál de los siguientes diagramas de Bode de fase corresponde a cada transferencia. **Justificar detalladamente**.



Solución

Problema 1





En la figura 1, considerando el circuito en régimen sinusoidal y los siguientes datos:

$$v_i(t) = 220\sqrt{2}V\,\mathrm{sen}(100\pi t - \pi/6) \quad , \quad R = 22\Omega \quad , \quad L = 120mHy \quad , \quad C = 12\mu F$$

(a) i) Halle la impedancia vista por la fuente, $Z_{eq} = R_{eq} + jX_{eq}$, a la frecuencia de trabajo. Halle exprésamente su resistencia R_{eq} y su reactancia X_{eq}. Indique si es capacitiva o inductiva.

La expresión para Z_{eq} se obtiene haciendo

$$Z_{eq} = \frac{1}{Cj\omega}||(R + Lj\omega) = \frac{R + Lj\omega}{LC(j\omega)^2 + RC(j\omega) + 1}$$

Incorporando los datos, resulta:

$$Z_{eq} = (29,6 + j41,1)\Omega = 50,6\Omega\angle 54,2^\circ$$

La impedancia es inductiva, pues su reactancia es positiva.

ii) Halle el fasor I asociado a la corriente que entrega la fuente de tensión y el fasor I_L de la corriente por la bobina. **Halle el valor eficaz de la corriente que entrega la fuente**.

Tenemos que $I = \frac{V_i}{Z_{eq}}$[a]. Si trabajamos en valores eficaces, entonces $|V_i| = 220V$ y el valor eficaz de la corriente que entrega la fuente es de $4,34A$. Además

$$I_L = \frac{V_i}{R + Lj\omega}$$

iii) Realice un diagrama fasorial con I, I_L y V_i (fasor de la fuente de tensión). Incorpore al diagrama anterior los fasores I_C (fasor de la corriente por el condensador), V_R y V_L (fasores de la tensión en bornes de la resistencia y la bobina respectivamente). (No es necesario hallarlos explícitamente, pero el dibujo debe ser coherente con el circuito y las componentes involucradas).

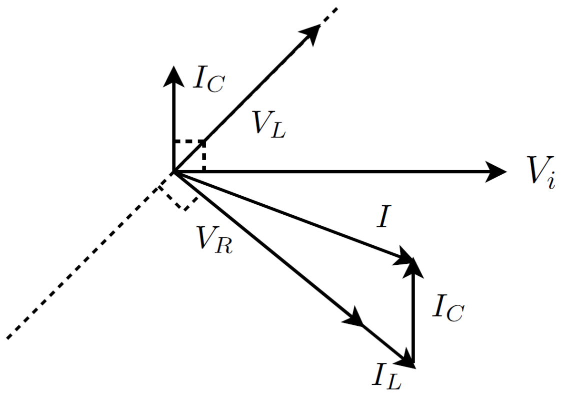
(b) i) Calcule la potencia activa y reactiva consumida a la fuente.

$P = re(V_i\bar{I}) = 559W$, $Q = im(V_i\bar{I}) = 775VAR$.

ii) Se pretende compensar la potencia reactiva consumida a la fuente. Indique qué componente colocaría, cómo la conectaría y qué valor tendría que tener para realizar la compensación.

Para compensar la potencia reactiva consumida a la fuente, al ser la carga inductiva, colocamos un condensador en paralelo con la carga, de forma de no alterar la potencia

[a]Los 30Â° de la señal de la fuente de tensión pueden considerarse en el fasor V_i o pensar este fasor como de fase 0 e incorporar los 30Â° al final.



activa consumida. El valor C_c del condensador a colocar debe ser tal que la carga total que vea la fuente

$$\frac{1}{C_c j\omega}||Z_{eq}$$

sea real. Resulta

$$C_c = \frac{1}{\omega}\frac{X_{eq}}{R_{eq}^2 + X_{eq}^2}$$

(c) En el circuito trifásico mostrado en la figura 2, halle las **expresiones temporales** de las corrientes de línea $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, sabiendo que.

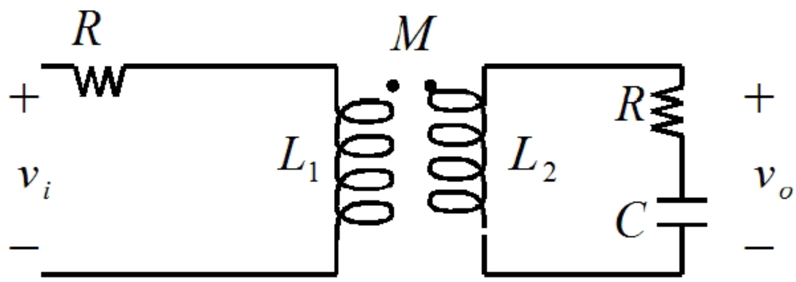
$$v_1(t) = 220\sqrt{2}V\,\mathrm{sen}(100\pi t - \pi/6) \quad , \quad v_2(t) = 220\sqrt{2}V\,\mathrm{sen}(100\pi t - \pi/6 + 2\pi/3)$$

$$v_3(t) = 220\sqrt{2}V\,\mathrm{sen}(100\pi t - \pi/6 + 4\pi/3) \quad ,$$

Transfigurando el triángulo a estrella, el equivalente monofásico que se obtiene coincide con el circuito ya estudiado, por lo que las corrientes de línea resultan ser

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 4,34\sqrt{2}A\sin\left(100\pi t - \tfrac{\pi}{6} - arg(Z_{eq})\right) = 4,34\sqrt{2}A\sin(100\pi t - 1,47) \\ i_2(t) &= 4,34\sqrt{2}A\sin(100\pi t - 1,47 + 2\pi/3) \\ i_3(t) &= 4,34\sqrt{2}A\sin(100\pi t - 1,47 + 4\pi/3) \end{aligned}$$

Problema 2



(a) i) Calcular la transferencia en régimen $G(j\omega)$ del circuito de la figura, con transfomador perfecto.

Las ecuaciones del transformador, en fasores, son

$$\begin{cases} V_1 = L_1 j\omega I_1 + M j\omega I_2 \\ V_2 = L_2 j\omega I_2 + M j\omega I_1 \end{cases}$$

con V_1 y V_2 las tensiones del primario y el secundario, medidas desde los puntos, e I_1 e I_2 las corrientes del primario y secundario, entrando por los puntos. Al ser el transformador perfecto, $M = \sqrt{L_1 L_2}$ y podemos simplificar las ecuaciones así:

$$\begin{cases} V_1 = \sqrt{L_1}\sqrt{L_1}j\omega I_1 + \sqrt{L_1}\sqrt{L_2}j\omega I_2 = \sqrt{L_1}\left(\sqrt{L_1}j\omega I_1 + \sqrt{L_2}j\omega I_2\right) \\ V_2 = \sqrt{L_2}\sqrt{L_2}j\omega I_2 + \sqrt{L_1}\sqrt{L_2}j\omega I_1 = \sqrt{L_2}\left(\sqrt{L_2}j\omega I_2 + \sqrt{L_1}j\omega I_1\right) \end{cases}$$

De donde $\boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{V_o} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}}$. Por otro lado, la malla del secundario nos dice que

$$V_o = V_2 = \left(R + \frac{1}{Cj\omega}\right)(-I_2) = -\left(\frac{RCj\omega + 1}{Cj\omega}\right) I_2 = L_2 j\omega I_2 + Mj\omega I_1$$

y podemos hallar una relación entre V_o e I_2

$$I_2 = -\left(\frac{Cj\omega}{RCj\omega + 1}\right) V_o$$

y una relación entre I_1 e V_o:

$$Mj\omega I_1 = -\left(\frac{RCj\omega + 1}{Cj\omega} + L_2 j\omega\right) I_2 = -\left(\frac{L_2C(j\omega)^2 + RCj\omega + 1}{Cj\omega}\right) I_2$$

De donde

$$I_1 = -\left(\frac{L_2C(j\omega)^2 + RCj\omega + 1}{\sqrt{L_1L_2}C(j\omega)^2}\right) I_2 = \left(\frac{L_2C(j\omega)^2 + RCj\omega + 1}{\sqrt{L_1L_2}C(j\omega)^2}\right)\left(\frac{Cj\omega}{RCj\omega + 1}\right) V_o$$

$$\Rightarrow I_1 = \left(\frac{L_2C(j\omega)^2 + RCj\omega + 1}{\sqrt{L_1L_2}j\omega(RCj\omega + 1)}\right) V_o$$

La malla del primario resulta ser

$$V_i = RI_1 + V_1 = R\left(\frac{L_2C(j\omega)^2 + RCj\omega + 1}{\sqrt{L_1L_2}j\omega(RCj\omega + 1)}\right) V_o + \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} V_o$$

Hacemos común denominador

$$V_i = \left(\frac{RL_2C(j\omega)^2 + R^2Cj\omega + R + L_1 j\omega(RCj\omega + 1)}{\sqrt{L_1L_2}j\omega(RCj\omega + 1)}\right) V_o$$

Operando:

$$V_i = \left(\frac{R(L_1 + L_2)C(j\omega)^2 + (R^2C + L_1)j\omega + R}{\sqrt{L_1L_2}j\omega(RCj\omega + 1)}\right) V_o$$

De donde

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{\sqrt{L_1L_2}j\omega(RCj\omega + 1)}{R(L_1 + L_2)C(j\omega)^2 + (R^2C + L_1)j\omega + R}}$$

ii) Sabiendo que $L_2 = 9999L_1$ y $L_1 = R^2C$, mostrar que $G(j\omega)$ se puede escribir como

$$G(j\omega) = K.\frac{j\omega(j\omega + \omega_1)}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_2(j\omega) + \omega_2^2}$$

para valores adecuados de ω_1, ω_2, K y ζ.

Sustituyamos los datos en la expresión de $H(j\omega)$.

$$H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{\sqrt{9999}L_1 j\omega(RCj\omega + 1)}{R10000L_1C(j\omega)^2 + (R^2C + L_1)j\omega + R} = \frac{\sqrt{9999}RCL_1 j\omega(j\omega + \frac{1}{RC})}{R10000L_1C\left((j\omega)^2 + \frac{R^2C + L_1}{R10000L_1C}j\omega + \frac{R}{R10000L_1C}\right)}$$

$$H(j\omega) = \frac{\frac{\sqrt{9999}}{10000}(j\omega)(j\omega + \frac{1}{RC})}{(j\omega)^2 + \left(\frac{R}{10000L_1} + \frac{1}{10000RC}\right)j\omega + \frac{1}{10000L_1C}}$$

Usamos que $\frac{L_1}{R} = RC = \frac{1}{\omega_1}$ (definimos acá ω_1). Entonces $\omega_1^2 = \frac{1}{L_1C}$ y $\frac{1}{R^2C^2} = \omega_1^2$. Sustituyendo en la expresión de H obtenemos

$$H(j\omega) = \frac{\frac{\sqrt{9999}}{10000}(j\omega)(j\omega + \omega_1)}{(j\omega)^2 + \left(\frac{\omega_1}{10000} + \frac{\omega_1}{10000}\right)j\omega + \frac{\omega_1^2}{10000}}$$

Definiendo $\omega_2 = \frac{\omega_1}{100}$, tenemos que $\omega_2^2 = \frac{\omega_1^2}{10000}$ y $\frac{\omega_1}{10000} = \frac{\omega_2}{100}$. Entonces

$$H(j\omega) = \frac{\sqrt{9999}}{10000} \frac{(j\omega)(j\omega+\omega_1)}{(j\omega)^2 + \left(\frac{\omega_2}{50}\right) j\omega + \omega_2^2} = \frac{\sqrt{9999}}{10000} \frac{(j\omega)(j\omega+\omega_1)}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_2(j\omega) + \omega_2^2}$$

con $\zeta = \frac{1}{100}$.

Obtenemos la expresión deseada, con $\omega_1 = \frac{1}{RC}$, $\omega_2 = \frac{\omega_1}{100}$, $K = \frac{\sqrt{9999}}{10000}$ y $\zeta = 0,01$

(b) Realizar los Diagramas de Bode asintóticos de $G(j\omega)$, explicando claramente su deducción.

Las raíces del numerador son 0 y ω_1, en tanto del denominador tiene dos raíces complejas conjugadas, de módulo ω_2 y factor de amortiguamiento asociado $\zeta = 0,01$. De los datos de la parte anterior, sabemos que $\omega_1 = 100\omega_2$.

Para realizar los Diagramas de Bode asintóticos, vamos a hacer un análisis por bandas. Al distar las singularidades dos décadas, la representación asintótica será muy buena, cuidando ajustar el Diagrama de módulo con el efecto de ζ en las cercanías de ω_2.

- $\omega \ll \omega_2 \Rightarrow$

$$G(j\omega) \approx K.\frac{j\omega(100\omega_2)}{\omega_2^2} = 100K.\frac{j\omega}{\omega_2} \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| & \approx & 20\log(100K/\omega_2) + 20\log\omega \; db \\ arg(G(j\omega)) & \approx & \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- $\omega_2 \ll \omega \ll 100\omega_2 \Rightarrow$

$$G(j\omega) \approx K.\frac{j\omega(100\omega_2)}{(j\omega)^2} = 100K.\frac{\omega_2}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| & \approx & 20\log(100K\omega_2) - 20\log\omega \; db \\ arg(G(j\omega)) & \approx & -\frac{\pi}{2} \; \left(+\frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

- $\omega \gg 100\omega_2 \Rightarrow$

$$G(j\omega) \approx \frac{j\omega(j\omega)}{(j\omega)^2} = K \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| & \approx & 20\log(K) \; db \approx -40db \\ arg(G(j\omega)) & \approx & 0 \; (\pm 2\pi) \end{cases}$$

Para discriminar el sentido de la variación de 180 grados en el entorno de ω_2, podemos evaluar la transferencia real en dicha frecuencia:

$$G(j\omega_2) = K.\frac{j\omega_2\,(j\omega_2 + 100\omega_2)}{(j\omega_2)^2 + 2.\frac{1}{100}\omega_2(j\omega_2) + \omega_2^2} = K.\frac{j\,(j+100)}{(j)^2 + 2.\frac{j}{100} + 1} \approx K.\frac{j5000}{j} \approx 50$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega_2)| & \approx & 20\log(K) \; db \approx -40db \\ arg(G(j\omega_2)) & \approx & 0 \; (\pm 2\pi) \end{cases}$$

La siguiente figura muestra los Diagramas de Bode obtenidos.

(c) Hallar los valores reales de módulo y fase en los puntos notables y bosquejar los diagramas reales.

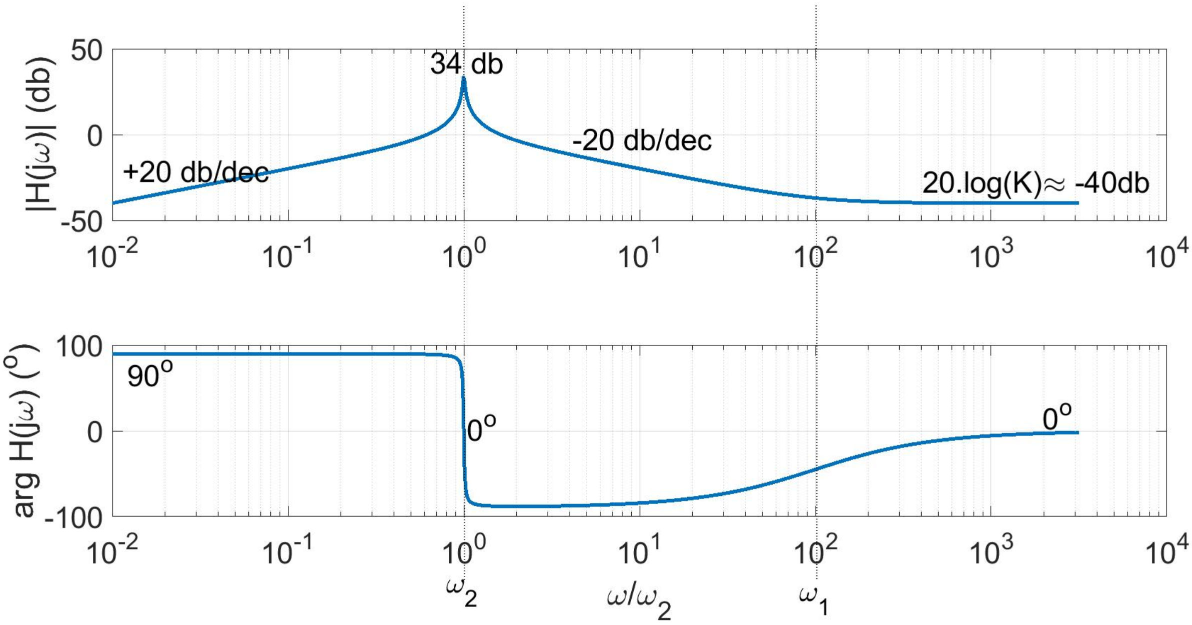
(d) Para la entrada $v_i(t) = 1V\cos\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{4}\right)$, hallar la respectiva respuesta en régimen.

La respuesta en régimen a una señal sinusoidal de la forma $v_i(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ es

$$v_o(t) = A.|H(j\omega_0)|.\cos(\omega_0 t + \varphi + arg(H(j\omega_0)))$$

Entonces, si $v_i(t) = 1V\cos\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{4}\right)$, tenemos que

$$\boxed{v_o(t) = 1V.|H(j\omega_2)|.\cos\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{4} + arg(H(j\omega_2))\right) \approx 50V.\cos\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{4}\right)}$$


50
0
-50
|H(jω)| (db)
34 db
+20 db/dec
-20 db/dec
20.log(K)≈ -40db
100
0
-100
arg H(jω) (o)
90o
0o
0o
10-2
10-1
100
101
102
103
104
ω2
ω/ω2
ω1