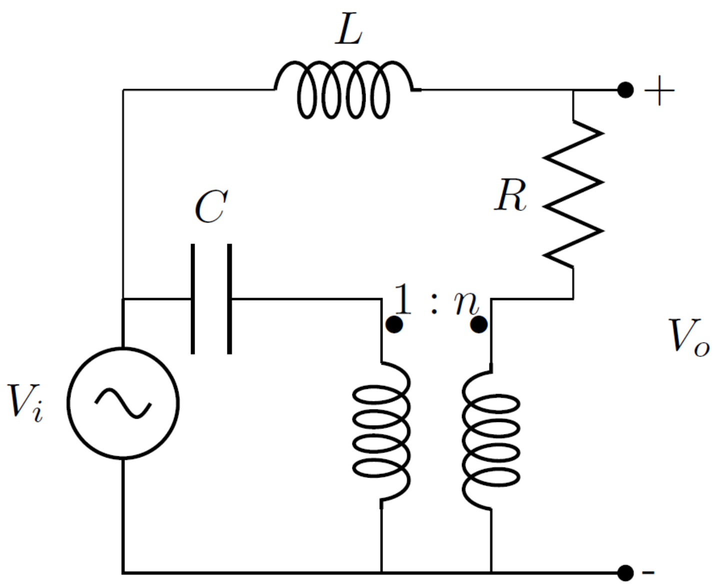
Sistemas Lineales 1

Examen de febrero de 2018

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1



(a) En el circuito de la figura, con el transformador ideal, calcular la transferencia $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$.

(b) Sabiendo que $n = 1000$ y que $\frac{1}{LC} = \frac{\omega_0^2}{1000}$, mostrar que existe R tal que:

$$H(j\omega) = 1000 \frac{(j\omega)^2 + 0{,}11\omega_0 j\omega + \omega_0^2}{(j\omega)^2 + 110\omega_0 j\omega + 1000\omega_0^2}$$

Determinar R sólo en función de L y ω_0.

De aquí en más valen las condiciones de la parte anterior.

(c) I) Realizar los diagramas asintóticos de Bode de $H(j\omega)$.

II) Bosquejar los diagramas reales.

Explicar claramente la construcción de los diagramas

(d) Determinar las frecuencias angulares ω para las cuales se cumple que si la entrada es:

$$v_i(t) = \cos(\omega t)$$

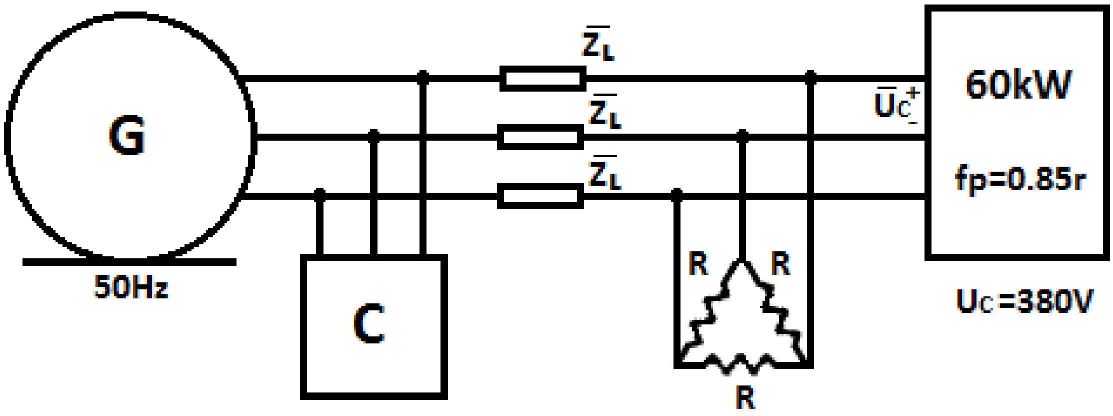
la salida en régimen es:

$$v_o(t) = A_\omega \sin(\omega t)$$

con $A_\omega \in \mathbb{R}$. Expresar dichas frecuencias sólo en términos de ω_0. Calcular los respectivos valores de A_ω.

Justificar las aproximaciones realizadas.

Problema 2



Un generador trifásico de frecuencia 50Hz alimenta una carga trifásica equilibrada mediante una línea de impedancia $Z_L = (0,1 + j0,1)\Omega$.

La tensión compuesta en la carga es de $380V$ eficaces. La carga está formada por un equipo trifásico que consume $60kW$, con un factor de potencia 0,85 inductivo, y tres resistencias de calefacción, de $R = 40\Omega$ cada una, conectadas en triángulo, como se muestra en la figura.

Al principio de la línea, en paralelo con el generador, está conectada una batería de tres condensadores idénticos que corrige el factor de potencia del generador a la unidad.

(a) Hallar la potencia aparente $\vec{S_C}$ consumida por la carga.

(b) Hallar la potencia aparente $\vec{S_g}$ entregada por el generador.

(c) Hallar los valores eficaces de las corrientes y las tensiones compuestas suministradas por el generador.

(d) Calcular el valor de los condensadores colocados.

Ahora se desconecta el equipo de calefacción (R) y se mantiene constante la tensión del generador calculada anteriormente.

(e) Hallar la potencia aparente $\vec{S_g}$ entregada por el generador para las nuevas condiciones del sistema y su factor de potencia.

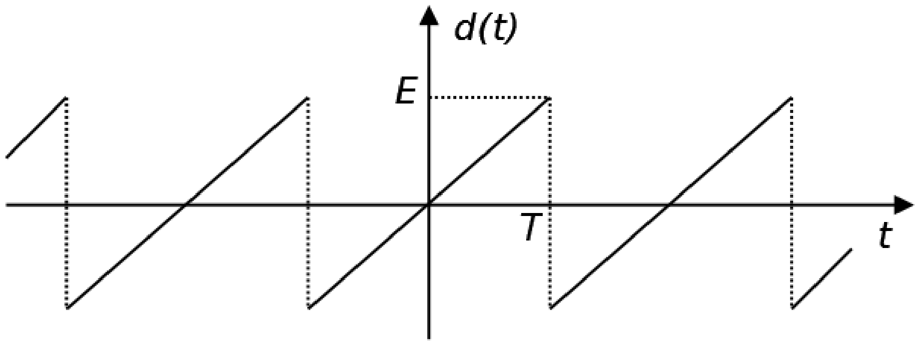
(f) ¿Es necesario modificar la batería de condensadores colocada? Justificar.

Sistemas Lineales 1

Examen de febrero de 2018

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1



Consideremos la señal periódica $d(t)$ de la figura.

(a) Hallar la derivada segunda como distribución de $T_d''(t)$.

(b) Hallar los coeficientes de Fourier de $T_d''(t)$, que denotaremos $c_n(T_d'')$.

(c) Hallar los coeficientes de Fourier de $d(t)$, que denotaremos $c_n(d)$.

(d) Calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Pregunta 2

Se condidera un circuito lineal, de transferencia en régimen $H(j\omega)$, que tiene un comportamiento de tipo pasabajos, de frecuencia de corte $40MHz$. Se excita este sistema con una tensión periódica, que consiste en una onda cuadrada simétrica (igual porción de periodo en cada nivel de tensión), de $10MHz$ y $20V$ de amplitud.

Para cada una de las siguientes afirmaciones, indicar si es verdadera o falsa, fundamentando la respuesta.

(a) La salida tiene valor medio nulo.

(b) La salida es una señal periódica.

(c) La salida es prácticamente una sinusoide pura.

(d) La salida contiene armónicos pares no nulos.

(e) La potencia media de la salida es menor que la de la entrada.

(f) La potencia media de la salida es igual a la de la entrada.

(g) El valor eficaz de la salida es mayor que el de la entrada.

Pregunta 3

(a) Definir la Transformada de Fourier para funciones y para distribuciones.

(b) Se sabe que, si tanto $g(x)$ como $x.g(x)$ son funciones transformables, se verifica que

$$\frac{d}{dy}\mathcal{F}\left[g(x)\right](y) = \mathcal{F}\left[(-j2\pi x).g(x)\right](y)$$

Probar que en distribuciones, *derivar en el tiempo equivale a multiplicar en frecuencia.*

Pregunta 4

(a) Se considera una impedancia $Z_L = R_L + jX_L = |Z_L|e^{j\varphi_L}$. Definir el *factor de potencia* de Z_L.

(b) Se considera un circuito en régimen sinusoidal compuesto por una fuente de amplitud E_f que alimenta la serie de una impedancia inductiva $Z_f = R_f + jX_f$ con Z_L. Hallar la impedancia de carga óptima (Z_{Lopt}), en función de E_f y Z_f, que maximiza la potencia activa disipada en la carga, con la restricción de que Z_L tiene factor de potencia inductivo constante dado.

(c) Hallar $|Z_{Lopt}|$ y representar en el plano complejo las impedancias Z_f y Z_{Lopt}.

Solución

Problema 1

(a) Igualando la corriente por L con la corriente por R, ambas iguales a I_2 obtenemos:

$$I_2 = \frac{V_i - V_o}{Lj\omega} = \frac{V_o - V_2}{R} \Rightarrow V_2 = V_o\frac{R + Lj\omega}{Lj\omega} - V_i\frac{R}{Lj\omega} \tag{1}$$

La corriente por el primario es:

$$I_1 = (V_i - V_1)Cj\omega \tag{2}$$

Usando estas ecuaciones y las del transformador ideal tenemos:

$$I_1 = -nI_2 \Rightarrow (V_i - V_1)Cj\omega = n\frac{V_2 - V_o}{R} \tag{3}$$

$$nV_1 = V_2 \Rightarrow (V_i - \frac{V_2}{n})Cj\omega = n\frac{V_2 - V_o}{R} \tag{4}$$

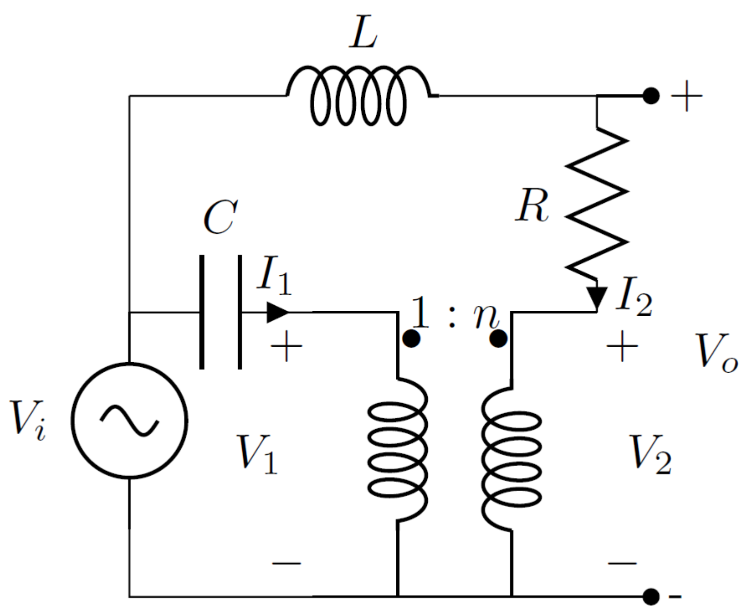
$$\Rightarrow nV_i + \frac{n^2V_o}{RCj\omega} = V_2\frac{RCj\omega + n^2}{RCj\omega} \tag{5}$$

Sustituyendo V_2 por la expresión obtenida en 1 y operando:

$$V_i\left(n + \frac{RCj\omega + n^2}{LC(j\omega)^2}\right) = V_o\left(\frac{(Lj\omega + R)\left(RCj\omega + n^2\right)}{RLC(j\omega)^2} - \frac{n^2}{RCj\omega}\right) \tag{6}$$

Finalmente:

$$\boxed{H(j\omega) = n\frac{(j\omega)^2 + \frac{R}{nL}j\omega + \frac{n}{LC}}{(j\omega)^2 + \frac{R}{L}j\omega + \frac{n^2}{LC}}}$$

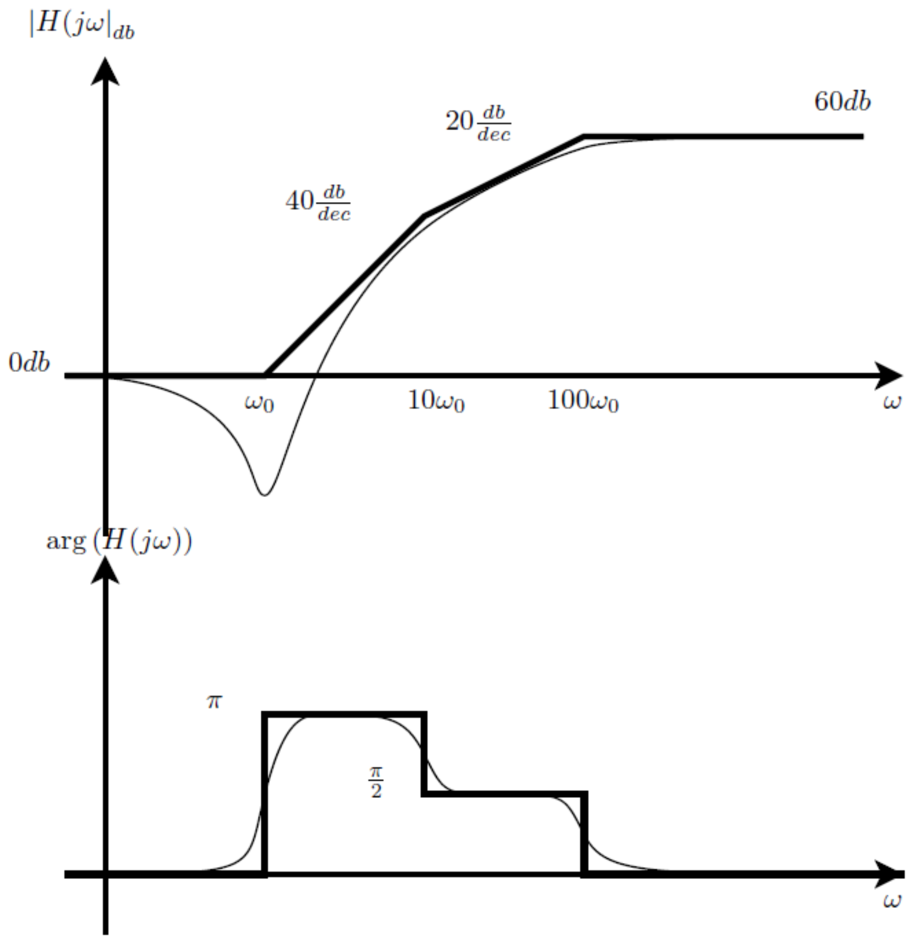


(b) Sustituyendo los valores de n y $\frac{1}{LC}$ tenemos:

$$H(j\omega) = 1000\frac{(j\omega)^2 + \frac{R}{1000L}\omega_0 j\omega + \omega_0^2}{(j\omega)^2 + \frac{R}{L}\omega_0 j\omega + 1000\omega_0^2}$$

Se tiene que cumplir $\frac{R}{L} = 110\omega_0$ es decir: $\boxed{R = 110\omega_0 L}$

(c) I) H tiene dos raíces complejas conjugadas de módulo ω_0 en el numerador, con coeficiente de amortiguamiento sensiblemente chico $\zeta = 0{,}055$.
En el denominador las raíces son reales y valen $-10\omega_0$ y $-100\omega_0$



II) Como ζ es muy chico el cambio en la fase es muy empinado en ω_0 y el módulo tiene un pico bastante pronunciado: $H(j\omega_0) \simeq 0{,}11$, o sea $|H(j\omega_0)|_{db} \simeq -20db$. En las otras dos singularidades la distancia entre el asintótico y el real es aproximadamente $3db$.

(d) La salida debe estar desfasada $\pm\frac{\pi}{2}$ respecto a la entrada (observar que A_ω puede tener cualquier signo; para el caso $\frac{\pi}{2}$, debe ser $A_\omega < 0$). En el diagrama de Bode vemos que eso ocurre para $\omega = \omega_0$ y para otra frecuencia que está entre $10\omega_0$ y $100\omega_0$, de hecho se puede decir que está en la media geométrica entre $10\omega_0$ y $100\omega_0$. Por la separación de las raíces (una década) podemos asumir que las dos raíces más grandes no afectan el comportamiento cerca de ω_0 y que la raíz chica no afecta en el rango entre las dos mayores.

En resumen las frecuencias serı'an $\omega_1 = \omega_0$ y $\omega_2 = 10\sqrt{10}\omega_0$.

Verificamos los resultados evaluando H:

$$\boxed{H(j\omega_0) \simeq 0{,}012 + 0{,}11j \simeq 0{,}11\angle\frac{\pi}{2} - 0{,}035\pi}$$

Es decir que ω_0 es una buena aproximación; el valor de A_ω está dado por el módulo de H, o sea $A_\omega = -0{,}11$

$$\boxed{H(j10\sqrt{10}\omega_0) \simeq 1 + 287j \simeq 0{,}11\angle\frac{\pi}{2} - 0{,}0011\pi}$$

En este caso la aproximación es aún mejor, con $A_\omega = -287$.

También se puede resolver igualando $H(j\omega) = Aj$ y despejando A y ω.

Problema 2

(a)

$$\vec{S_C} = \frac{P}{cos\phi}\angle arccos(\phi) = \frac{60kW}{0,85}\angle arccos(0,85) = 70,6kVA\angle 31,8^\circ$$

(b)

La potencia consumida por la carga más las resistencias de calefacción es:

$$\vec{S}_{C+R} = P_{C+R} + jQ_{C+R}$$

con $Q_R = 0$ y $P_R = 3\frac{U_C^2}{R} = 10,8kW$ por estar en paralelo con la carga, y $Q_C = \sqrt{S^2 - P^2} = 37,2kVA_r$

Entonces $\vec{S}_{C+R} = (70,8 + j37,2)kVA$.

$S_{C+R} = |\vec{S}_{C+R}| = 79,9kVA = \sqrt{3}UI_{C+R}$ entonces $I_{C+R} = I_{Z_L} = 121,4A$.

La potencia consumida en las líneas va a ser:
$P_{Z_L} = 3\ (0,1\Omega)\,(121,4A)^2 = 4,42kW$

Como el sistema está compensado a la unidad, el generador va a entregar solo potencia activa, la consumida por todas cargas y la línea:

$$\vec{S_g} = P_{Z_L} + P_{C+R} = (4,42 + 70,8)kW = 75,2kW$$

(c)

$Q_{Z_L} = 3\ (0,1\Omega)\,(121,4A)^2 = 4,42kVA_r \ \Rightarrow\ Q_{Z_L+C} = (37,2 + 4,42)kVA_r = 41,6kVA_r$

$\vec{S}_{Z_L+C+R} = \sqrt{75,2^2 + 41,6^2}kVA\angle arctan(\frac{41,6}{75,2}) = 85,9kVA\angle 28,9^\circ$

$S_{Z_L+C+R} = \sqrt{3}\,U_g\,I_{Z_L} \ \Rightarrow\ U_g = \frac{85,9kVA}{\sqrt{3}121,4A} = 408,5V$

$S_g = 75,2kVA = \sqrt{3}U_gI_g \ \Rightarrow\ I_g = 106,2A$

(d)

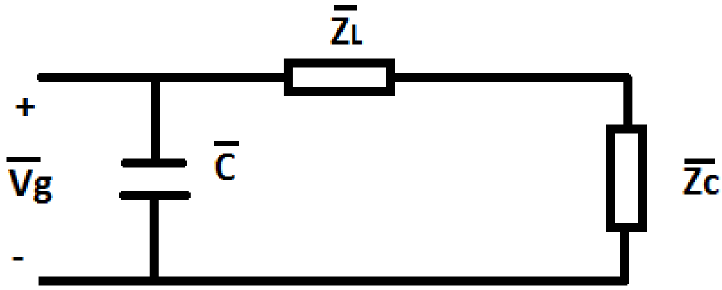
Suponiendo condensadores en triángulo:
$Q_{bat} = 41,6kVA_r = 3\,U_g^2\omega\,C \ \Rightarrow\ C = \frac{1}{3}\frac{41,6kVA_r}{100\pi(408,5V)^2} = 0,26mF$

(e)

Al desconectar las resistencias de calefacción, el consumo de corriente varía y por lo tanto se modifican las caídas de tensión y los consumos de potencias, con lo cual la carga ya no va a estar a 380V. Lo que no varía es la impedancia equivalente a la carga, que puede hallarse con los datos de consumo de las partes anteriores.

Suponiendo conexión en estrella:
$Z_C = \frac{U^2cos\phi}{3P_C}\angle arccos(\phi) = \frac{1}{3}\frac{(380V)^2 0,85}{60kW}\angle arccos(0,85) = 0,68\Omega\angle 31,8^\circ$
Como las cargas son equilibradas, se puede considerar el equivalente monofásico como el de la figura
La serie entre la línea y la impedancia del equipo es:
$\vec{Z}_{L+C} = (0,1 + j0,1)\Omega + 0,68\Omega\angle 31,8^\circ = (0,68 + j0,45)\Omega = 0,81\Omega\angle 33,5^\circ$
Como la tensión del generador se mantiene constante, la corriente suministrada a la impedancia equivalente anterior será:
$\vec{I}_{L+C} = \frac{U_g/3}{\vec{Z}_{L+C}} = 168,1A\angle -33,5^\circ$

Las potencias consumidas van a ser:
$P_{L+C} = 3\ 0,68\Omega(168,1A)^2 = 57,6kW$



y $Q_{L+C} = 3\ 0{,}45\Omega(168{,}1A)^2 = 38{,}1kVA_r$

Sumando la potencia consumida por la batería de condensadores, que es igual a la parte anterior por mantenerse la tensión:

$P_g = P_{L+C} = 57{,}6kW$ y $Q_g = Q_{bat} + Q_{L+C} = (-41{,}6 + 38{,}1)kVA_r = -3{,}5VA_r$

$\Rightarrow\ \vec{S}_g = (57{,}6 - j3{,}5)kVA = 57{,}7kVA\angle - 3{,}47°$

$cos(\phi) = cos(-3{,}47°) = 0{,}998 \approx 1$

(f)

Dado que el factor de potencia es aproximadamente la unidad, no vale la pena modificar la batería de condensadores.