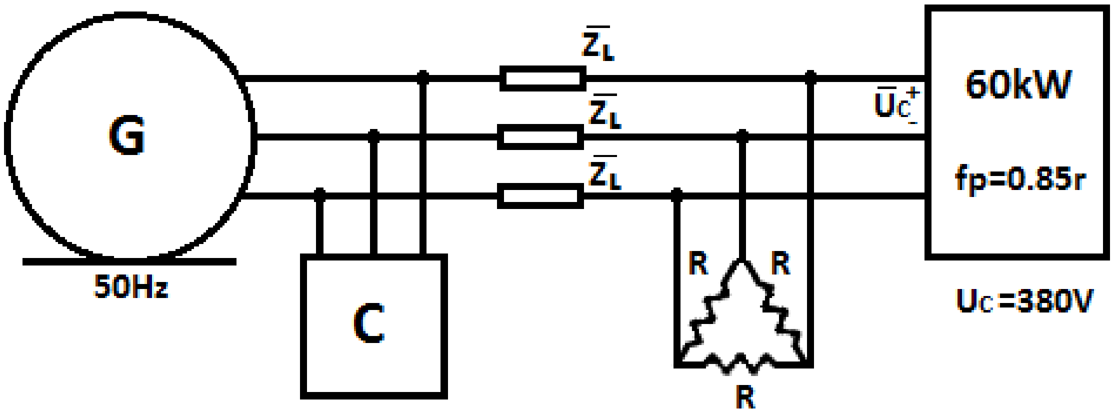
# Sistemas Lineales 1

## Examen de febrero de 2017

**Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.**

## Problema 1




Un generador trifásico de frecuencia 50Hz alimenta una carga trifásica equilibrada mediante una línea de impedancia $Z_L = (0,1 + j0,1)\Omega$.

La tensión compuesta en la carga es de $380V$ eficaces. La carga está formada por un equipo trifásico que consume $60kW$, con un factor de potencia 0,85 en retardo, y tres resistencias de calefacción, de $R = 40\Omega$ cada una, conectadas en triángulo.

Al principio de la línea, en paralelo con el generador, está conectada una batería de tres condensadores idénticos que corrige el factor de potencia del generador a la unidad.

(a) Hallar la potencia aparente $\vec{S_C}$ consumida por la carga.

(b) Hallar la potencia aparente $\vec{S_g}$ entregada por el generador.

(c) Hallar los valores eficaces de las corrientes y las tensiones compuestas suministradas por el generador.

(d) Calcular el valor de los condensadores colocados.

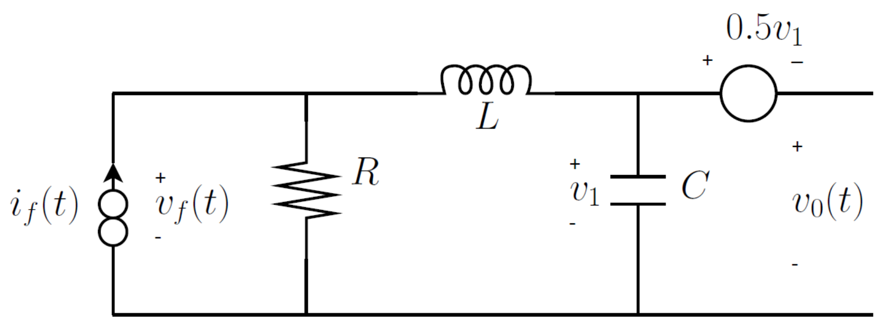
Ahora se desconecta el equipo de calefacción ($R$) y se mantiene constante la tensión del generador calculada anteriormente.

(e) Hallar la potencia aparente $\vec{S_g}$ entregada por el generador para las nuevas condiciones del sistema y su factor de potencia.

(f) ¿Es necesario modificar la batería de condensadores colocada? Justificar.

# Problema 2

Se considera el circuito de la figura, en el que la entrada es la corriente $i_f(t)$ entregada por la fuente de corriente y la salida es la tensión $v_0(t)$.




(a) Hallar las transferencias en régimen sinusoidal

$$H_1(j\omega) = \frac{V_f(j\omega)}{I_f(j\omega)} \quad , \quad H_2(j\omega) = \frac{V_0(j\omega)}{I_f(j\omega)}$$

Observar con cuidado las dimensiones respectivas.

(b) Simplificar $H_1(j\omega)$ en función de los parámetros $R$, $LC = \frac{1}{\omega_0^2}$, $\frac{R}{L} = 2\omega_0$. Verificar que hay una única frecuencia crítica para el análisis de la respuesta en frecuencia de dicha transferencia.

(c) Hallar los siguientes límites laterales:

$$\lim_{\omega \to \omega_0^{\pm}} arg\,[H_1(j\omega)] \quad , \quad \lim_{\omega \to \omega_0^{\pm}} |H_1(j\omega)|$$

(d) Realizar los diagramas asintóticos de Bode de $H_1(j\omega)$, explicando claramente su construcción. Bosquejar los diagramas reales, incorporando la información de la parte anterior.

(e) Para lo que sigue, se sugiere expresar la potencia aparente que entrega de la fuente de coriente en función de $H_1(j\omega)$.

I) Hallar una frecuencia de trabajo en la que la fuente entrega, en valor absoluto, la misma potencia activa y reactiva.

II) Mostrar que existe una frecuencia de trabajo en la que el sistema entrega potencia activa y potencia reactiva inductiva, en una proporción 2 a 1. Indicar si dicha frecuencia es mayor o menor que $\omega_0$.

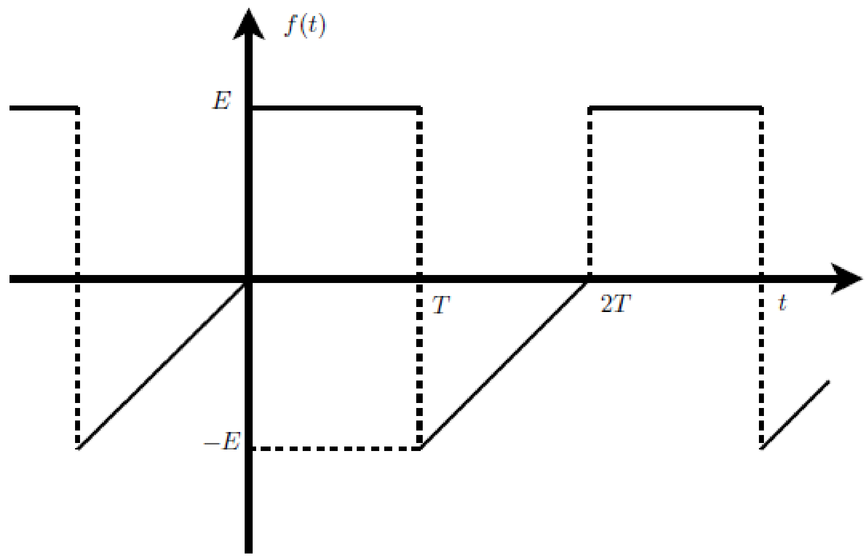
III) Hallar $\omega_c$ tal que $\dfrac{|V_f(j\omega_c)|}{R\,|I_f(j\omega_c)|} = -40\,db$.

# Sistemas Lineales 1

## Examen de febrero de 2017

**Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.**

## Pregunta 1




Consideremos la señal periódica $f(t)$ de la figura.

(a) Hallar la derivada segunda como distribución de $T''_f(t)$.

(b) Hallar los coeficientes de Fourier de $T''_f(t)$, que denotaremos $c_n(T''_f)$.

(c) Hallar los coeficientes de Fourier de $f(t)$, que denotaremos $c_n(f)$.

## Pregunta 2

Se considera la siguiente transferencia en régimen de primer orden

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + a}{j\omega + ka}$$

con $k$ y $a$ positivos y $k > 1$.

(a) Deducir y bosquejar los diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$.

(b) Mostrar que existe una frecuencia $\omega_0$ (y hallar el valor exacto de la misma) a la cual los diagramas de Bode de módulo real y el asintótico de $H(j\omega)$ coinciden.

(c) Bosquejar ambos diagramas en forma conjunta.

# Pregunta 3

(a) Definir la Transformada de Fourier para funciones y para distribuciones.

(b) Se sabe que, si tanto $g(x)$ como $x.g(x)$ son funciones transformables, se verifica que

$$\frac{d}{dy}\mathcal{F}\left[g(x)\right](y) = \mathcal{F}\left[(-j2\pi x).g(x)\right](y)$$

Probar que en distribuciones, *derivar en el tiempo equivale a multiplicar en frecuencia.*

# Pregunta 4

(a) Se considera una impedancia $Z_L = R_L + jX_L = |Z_L|e^{j\varphi_L}$. Definir el *factor de potencia* de $Z_L$.

(b) Se considera un circuito en régimen sinusoidal compuesto por una fuente de amplitud $E_f$ que alimenta la serie de una impedancia inductiva $Z_f = R_f + jX_f$ con $Z_L$. Hallar la impedancia de carga óptima ($Z_{Lopt}$), en función de $E_f$ y $Z_f$, que maximiza la potencia activa disipada en la carga, con la restricción de que $Z_L$ tiene factor de potencia inductivo constante.

(c) Hallar $|Z_{Lopt}|$ y representar en el plano complejo las impedancias $Z_f$ y $Z_{Lopt}$.

# Solución

## Problema 1

(a)

$$\vec{S_C} = \frac{P}{cos\phi}\angle arccos(\phi) = \frac{60kW}{0{,}85}\angle arccos(0{,}85) = 70{,}6kVA\angle 31{,}8^\circ$$

(b)

La potencia consumida por la carga más las resistencias de calefacción es:

$$\vec{S}_{C+R} = P_{C+R} + jQ_{C+R}$$

con $Q_R = 0$ y $P_R = 3\frac{U_C^2}{R} = 10{,}8kW$ por estar en paralelo con la carga, y $Q_C = \sqrt{S^2 - P^2} = 37{,}2kVA_r$

Entonces $\vec{S}_{C+R} = (70{,}8 + j37{,}2)kVA$.

$S_{C+R} = |\vec{S}_{C+R}| = 79{,}9kVA = \sqrt{3}UI_{C+R}$ entonces $I_{C+R} = I_{Z_L} = 121{,}4A$.

La potencia consumida en las líneas va a ser:
$P_{Z_L} = 3\ (0{,}1\Omega)\,(121{,}4A)^2 = 4{,}42kW$

Como el sistema está compensado a la unidad, el generador va a entregar solo potencia activa, la consumida por todas cargas y la línea:

$$\vec{S_g} = P_{Z_L} + P_{C+R} = (4{,}42 + 70{,}8)kW = 75{,}2kW$$

(c)

$Q_{Z_L} = 3\ (0{,}1\Omega)\,(121{,}4A)^2 = 4{,}42kVA_r \ \Rightarrow\ Q_{Z_L+C} = (37{,}2 + 4{,}42)kVA_r = 41{,}6kVA_r$

$\vec{S}_{Z_L+C+R} = \sqrt{75{,}2^2 + 41{,}6^2}kVA\angle arctan(\frac{41{,}6}{75{,}2}) = 85{,}9kVA\angle 28{,}9^\circ$

$S_{Z_L+C+R} = \sqrt{3}\,U_g\,I_{Z_L} \ \Rightarrow\ U_g = \frac{85{,}9kVA}{\sqrt{3}121{,}4A} = 408{,}5V$

$S_g = 75{,}2kVA = \sqrt{3}U_gI_g \ \Rightarrow\ I_g = 106{,}2A$

(d)

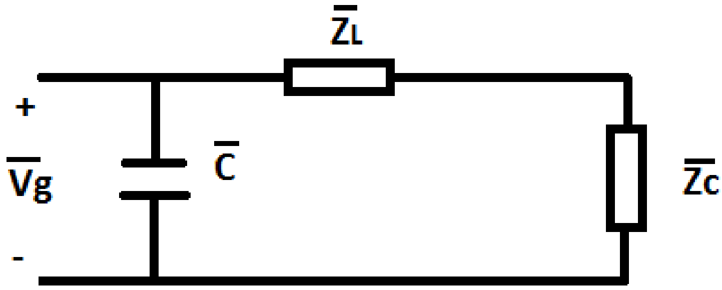
Suponiendo condensadores en triángulo:
$Q_{bat} = 41{,}6kVA_r = 3\,U_g^2\omega\,C \ \Rightarrow\ C = \frac{1}{3}\frac{41{,}6kVA_r}{100\pi(408{,}5V)^2} = 0{,}26mF$

(e)

Al desconectar las resistencias de calefacción, el consumo de corriente varía y por lo tanto se modifican las caídas de tensión y los consumos de potencias, con lo cual la carga ya no va a estar a 380V. Lo que no varía es la impedancia equivalente a la carga, que puede hallarse con los datos de consumo de las partes anteriores.

Suponiendo conexión en estrella:
$Z_C = \frac{U^2cos\phi}{3P_C}\angle arccos(\phi) = \frac{1}{3}\frac{(380V)^2 0{,}85}{60kW}\angle arccos(0{,}85) = 0{,}68\Omega\angle 31{,}8^\circ$
Como las cargas son equilibradas, se puede considerar el equivalente monofásico como el de la figura
La serie entre la línea y la impedancia del equipo es:
$\vec{Z}_{L+C} = (0{,}1 + j0{,}1)\Omega + 0{,}68\Omega\angle 31{,}8^\circ = (0{,}68 + j0{,}45)\Omega = 0{,}81\Omega\angle 33{,}5^\circ$
Como la tensión del generador se mantiene constante, la corriente suministrada a la impedancia equivalente anterior será:
$\vec{I}_{L+C} = \frac{U_g/3}{\vec{Z}_{L+C}} = 168{,}1A\angle -33{,}5^\circ$

Las potencias consumidas van a ser:




$P_{L+C} = 3\ 0{,}68\Omega(168{,}1A)^2 = 57{,}6kW$

y $Q_{L+C} = 3\ 0{,}45\Omega(168{,}1A)^2 = 38{,}1kVA_r$

Sumando la potencia consumida por la batería de condensadores, que es igual a la parte anterior por mantenerse la tensión:

$P_g = P_{L+C} = 57{,}6kW$ y $Q_g = Q_{bat} + Q_{L+C} = (-41{,}6 + 38{,}1)kVA_r = -3{,}5VA_r$

$\Rightarrow\ \vec{S}_g = (57{,}6 - j3{,}5)kVA = 57{,}7kVA\angle - 3{,}47°$

$cos(\phi) = cos(-3{,}47°) = 0{,}998 \approx 1$

(f)

Dado que el factor de potencia es aproximadamente la unidad, no vale la pena modificar la batería de condensadores.

# Problema 2

(a) Trabajamos con el circuito equivalente en régimen sinusoidal, en fasores, que denotaremos con letras mayúsculas. Observemos primero que $V_0(j\omega) = V_1(j\omega) - \frac{1}{2}V_1(j\omega) = \frac{1}{2}V_1(j\omega)$. Por otro lado, la relación entre $V_f(j\omega)$ y $V_1(j\omega)$ está dada por el divisor de tensión:

$$V_1(j\omega) = V_f(j\omega).\frac{\frac{1}{Cj\omega}}{Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega}} = V_f(j\omega).\frac{1}{LC(j\omega)^2 + 1}$$

La tensión $V_f$ vale

$$V_f(j\omega) = I_f(j\omega).\left[R\,||\,\left(Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega}\right)\right] = I_f(j\omega).\frac{R.\frac{LC(j\omega)^2+1}{Cj\omega}}{R + \frac{LC(j\omega)^2+1}{Cj\omega}} = I_f(j\omega).R.\frac{LC(j\omega)^2 + 1}{1 + RC(j\omega) + LC(j\omega)^2}$$

De donde

$$H_1(j\omega) = \frac{V_f(j\omega)}{I_f(j\omega)} = R.\frac{LC(j\omega)^2 + 1}{1 + RC(j\omega) + LC(j\omega)^2}, H_2(j\omega) = \frac{V_0(j\omega)}{I_f(j\omega)} = \frac{1}{2}.\frac{R}{1 + RC(j\omega) + LC(j\omega)^2}$$

(b) Para $LC = \frac{1}{\omega_0^2}$ y $\frac{R}{L} = 2\omega_0$, tenemos que

$$H_1(j\omega) = R.\frac{(j\omega)^2 + \omega_0^2}{\omega_0^2 + 2\omega_0(j\omega) + (j\omega)^2} = R.\frac{(j\omega)^2 + \omega_0^2}{[\omega_0 + (j\omega)]^2}$$

Observemos que la única frecuencia crítica de esta transferencia es $\omega_0$.

(c) Calculemos los límites requeridos:

$$\lim_{\omega\to\omega_0^+} arg\,[H_1(j\omega)] = \lim_{\omega\to\omega_0^+} arg\left[R.\frac{(j\omega)^2 + \omega_0^2}{\omega_0^2 + 2\omega_0(j\omega) + (j\omega)^2}\right] = \lim_{\omega\to\omega_0^+} arg\left[R.\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\omega_0(j\omega)}\right] =$$

$$\pi - \lim_{\omega \to \omega_0^+} arg\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\omega_0(j\omega)\right] = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\omega \to \omega_0^-} arg\left[H_1(j\omega)\right] = \lim_{\omega \to \omega_0^-} arg\left[R.\frac{(j\omega)^2 + \omega_0^2}{\omega_0^2 + 2\omega_0(j\omega) + (j\omega)^2}\right] = \lim_{\omega \to \omega_0^-} arg\left[R.\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\omega_0(j\omega)}\right] =$$

$$- \lim_{\omega \to \omega_0^-} arg\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\omega_0(j\omega)\right] = -\frac{\pi}{2}$$

(d) Hacemos un análisis asintótico para frecuencias mucho mayores y mucho menores que $\omega_0$.

$\omega \ll \omega_0$, $H_1(j\omega) \approx R\frac{(\omega_0^2)}{\omega_0^2} = R$.
$\omega \gg \omega_0$, $H_1(j\omega) \approx R\frac{(j\omega_0)^2}{(j\omega_0)^2} = R$.
Observemos que la aproximación asintótica será muy mala en las cercanías de $\omega_0$. En particular, $H_1(j\omega_0) = 0$ ($-\infty$ en $dB$). Los Diagramas reales y asintóticos se muestran en la figura 1.

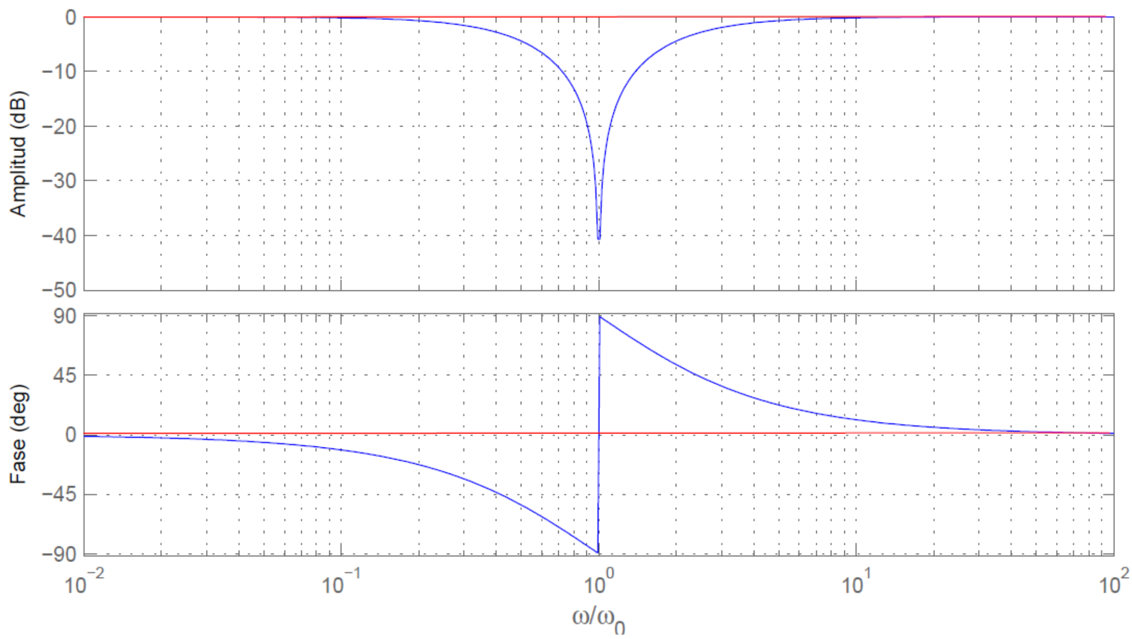



Figura 1: Diagramas de Bode asintóticos y reales de $H_1$.

(e) I) La potencia activa y reactiva que entrega la fuente de corriente se expresa como sigue:

$$P = re\left[V_f(j\omega).\overline{I_f}(j\omega)\right] = re\left[H_1(j\omega)I_f(j\omega).\overline{I_f}(j\omega)\right] = re\left[H_1(j\omega)|I_f(j\omega)|^2\right] = |I_f(j\omega)|^2.re\left[H_1(j\omega)\right]$$

$$Q = im\left[V_f(j\omega).\overline{I_f}(j\omega)\right] = im\left[H_1(j\omega)I_f(j\omega).\overline{I_f}(j\omega)\right] = im\left[H_1(j\omega)|I_f(j\omega)|^2\right] = |I_f(j\omega)|^2.im\left[H_1(j\omega)\right]$$

Para tener el mismo valor absoluto en $P$ y $Q$, la fase de $H_1(j\omega)$ debe ser una de las siguientes $\pm\frac{\pi}{4}$, $\pi \pm \frac{\pi}{4}$. Del bode de fase sale que hay dos frecuencias posibles, una donde la fase de la transferencia toma el valor $+\frac{\pi}{4}$ ($> \omega_0$) y otra donde toma el valor $-\frac{\pi}{4}$ ($< \omega_0$)

II) Potencia reactiva inductiva significa que la corriente atrasa a la tensión. Por lo tanto, $arg\left[H_1(j\omega)\right]$ debe pertenecer al intervalo $[0, \pi]$ (debe tener seno positivo). Por lo que la potencia compleja

$$S(j\omega) = V_f(j\omega).\overline{I_f}(j\omega) = |I_f(j\omega)|^2.H_1(j\omega)$$

debe ser igual a $K.(2 + j)$. Para ello debemos imponer que $arg\left[H_1(j\omega)\right] = arctg(1/2) \approx 26^o$. De la observación del diagrama real surge que existe una frecuencia que cumple con lo requerido. La misma es mayor que $\omega_0$.

III) Si $\frac{|V_f(j\omega)|}{R.I_f(j\omega)} = -40dB$, entonces

$$\log\left[\frac{|H_1(j\omega)|}{R}\right] = -2 \Rightarrow \left|\frac{(j\omega)^2+\omega_0^2}{[\omega_0+(j\omega)]^2}\right| = 10^{-2}$$

Se obtienen dos soluciones, simétricas respecto de $\omega_0$, cercanas a esta frecuencia crítica.