

Sistemas Lineales 1

Examen de febrero de 2016

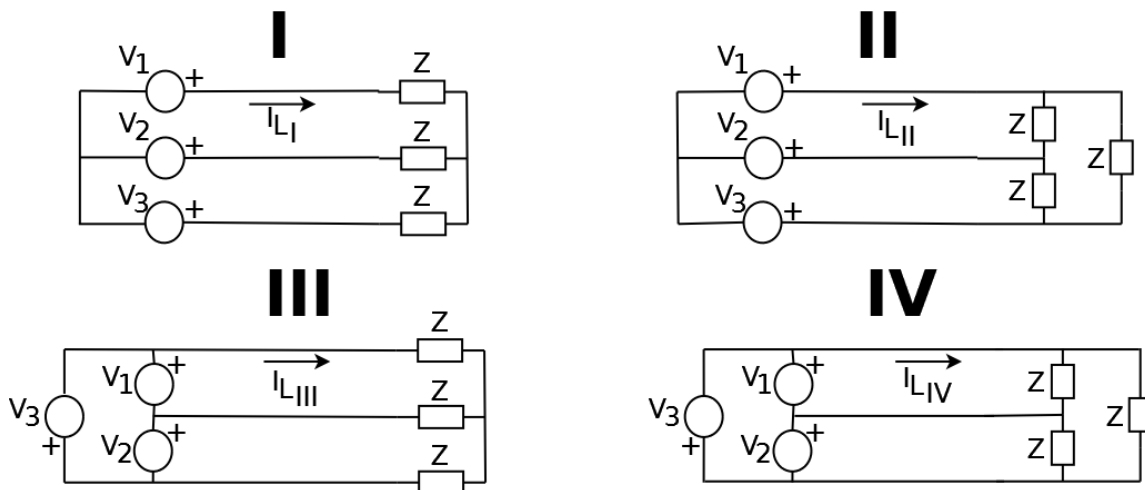
Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enuncie correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

Se tienen tres fuentes sinusoidales de tensión, de la misma frecuencia angular ω , cuyas expresiones temporales son

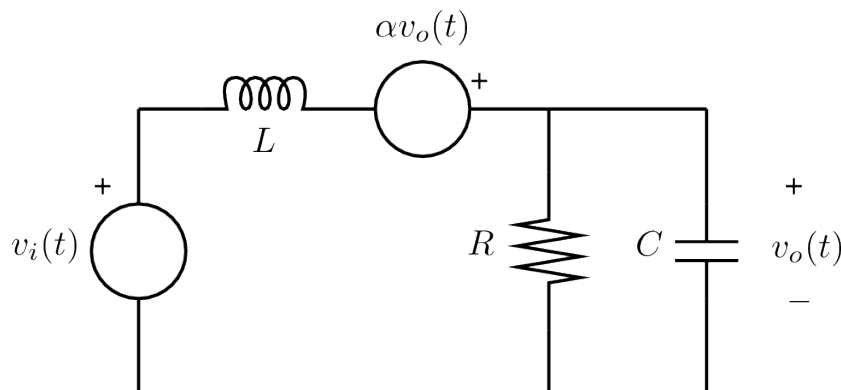
$$v_1(t) = \sqrt{2}V \cos(\omega t) \quad , \quad v_2(t) = \sqrt{2}V \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \quad , \quad v_3(t) = \sqrt{2}V \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

Se tiene también tres cargas idénticas inductivas, de impedancia Z a la frecuencia de trabajo. Tanto las fuentes como las cargas pueden conectarse en triángulo o en estrella, dando lugar a los siguientes cuatro circuitos:



- Si denotamos por P_I la potencia activa consumida por la carga trifásica en el circuito I , hallar P_I en función del fasor V_1 y la impedancia Z .
- Expresar las potencias activas consumidas por la carga trifásica en los circuitos II , III y IV , expresándolas en función de P_I .
- Indicar qué configuración entrega la máxima potencia a la carga trifásica y cuál entrega la mínima potencia.
- Calcular los módulos de los fasores de las corrientes por la línea 1 en los cuatro circuitos y expresarlas todas en función de $|I_{L_I}|$. Indicar en qué circuito se tiene la menor corriente de línea.
- Se decide compensar la potencia reactiva colocando un triángulo de condensadores idénticos, en paralelo con la carga. Indicar en qué circuito el valor del condensador a utilizar sería mínimo.

Problema 2



En el circuito de la figura, se cumple $\frac{1}{RC} = \omega_0 > 0$, $\frac{R}{L} = 2\omega_0$, $\alpha = \frac{1}{2}$.

- (a) i) Hallar la ecuación diferencial que vincula la entrada $v_i(t)$ con la salida $v_o(t)$.
 ii) Hallar la solución elemental del operador diferencial, verificando que es

$$h(t) = Y(t) \frac{4}{\sqrt{3}} \omega_0 \cdot e^{-\frac{1}{2}\omega_0 t} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right)$$

por lo que el sistema puede ser modelado de la forma $v_o(t) = h(t) \star v_i(t)$.

- iii) Mostrar, calculando, que la Transformada de Fourier de $h(t)$, evaluada en la frecuencia de trabajo, coincide con la transferencia del circuito en régimen sinusoidal.
- (b) Hallar los Diagramas de Bode asintóticos del sistema en régimen sinusoidal. Explique claramente su deducción y construcción.
- (c) A partir del análisis de los Diagramas de Bode, y justificando,
- i) indicar si existe una banda de frecuencias en la cual el sistema no distorsiona en amplitud;
 - ii) indicar si existe una banda de frecuencias en la cual el sistema no distorsiona en fase.

Sistemas Lineales 1

Examen de febrero de 2016

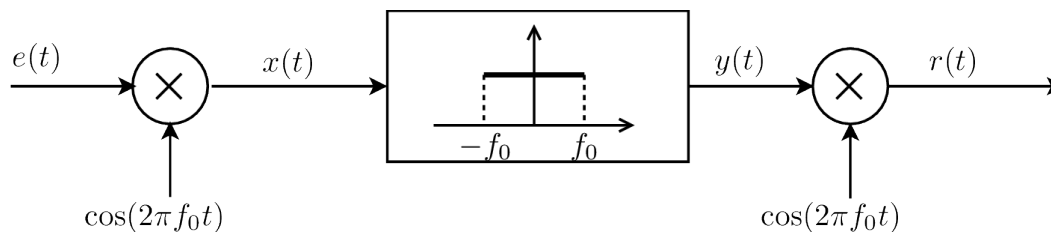
Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

Mostrar las siguientes propiedades para distribuciones de \mathcal{D}'_+ :

- (a) $T(t) \star \delta(t) = T(t)$
- (b) $T(t) \star \delta'(t) = T'(t)$
- (c) $T(t) \star \delta_a(t) = T(t - a)$

Pregunta 2



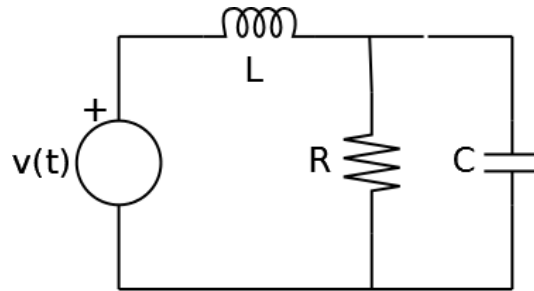
Se considera una señal $e(t)$, de banda acotada W , con $2W \ll f_0$. Se inyecta en el sistema de la figura, que consiste en la cascada de un multiplicador, un filtro pasabajos ideal de frecuencia de corte f_0 y un multiplicador.

Hallar la relación exacta entre las energías de las señales $e(t)$ y $r_2(t)$.

(Enunciar claramente las definiciones y propiedades que usa.)

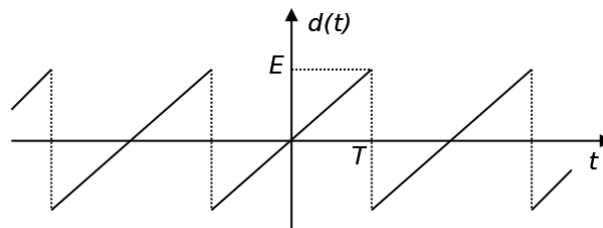
Pregunta 3

- (a) Para un sistema lineal funcionando en régimen sinusoidal, definir los conceptos de potencia aparente, potencia activa y potencia reactiva.



- (b) Se considera el circuito de la figura, funcionando en régimen sinusoidal.
- i) Mostrar que se cumple el balance de potencias, para cada tipo de potencia.
 - ii) Para R y L fijos, hallar el valor de C que maximiza la potencia activa entregada por la fuente, y calcular dicha potencia máxima.

Pregunta 4



El diente de sierra de la figura, de valor medio nulo, se inyecta en un sistema lineal que es un filtro pasabajos ideal, cuya frecuencia de corte coincide con la del cuarto armónico del diente de sierra. Hallar la potencia media de la respuesta en régimen del sistema.

Solución

Problema 1

(a) Consideremos el circuito I . Trabajamos siempre con valores eficaces. Como la carga es equilibrada y está en estrella, podemos usar el equivalente monofásico. La potencia total consumida por la carga trifásica es

$$P_I = 3re(V_Z \overline{I_Z}) = 3re\left(V_Z \overline{\left(\frac{V_Z}{Z}\right)}\right) = 3|V_Z|^2 re\left(\frac{1}{Z}\right) = 3\frac{|V_Z|^2}{|Z|^2} re(Z) = 3\frac{|V_1|^2}{|Z|^2} re(Z)$$

ya que $|V_Z| = |V_1| = V$.

(b) En el circuito II , si transfiguramos la carga de triángulo a estrella, obtenemos un circuito análogo al I , pero con una carga $Z' = Z/3$. La potencia vale entonces

$$P_{II} = 3\frac{|V_1|^2}{|Z'|^2} re(Z') = 3\frac{|V_1|^2}{\left(\frac{Z}{3}\right)^2} re\left(\frac{Z}{3}\right) = 9\frac{|V_1|^2}{|Z|^2} re(Z) = 3P_I$$

En el circuito III , tenemos una situación similar al I , salvo que V_1 es la tensión compuesta. Por lo tanto, la tensión de fase que ve la carga vale, en módulo,

$$|V_Z| = \frac{|V_1|}{\sqrt{3}}$$

y entonces

$$P_{III} = 3\frac{|V_Z|^2}{|Z|^2} re(Z) = 3\frac{\left(\frac{|V_1|^2}{3}\right)}{|Z|^2} re(Z) = \frac{|V_1|^2}{|Z|^2} re(Z) = \frac{1}{3}P_I$$

Finalmente, en el circuito IV , , podemos razonar como en el circuito II y III conjuntamente, u observar que $|V_1|$ es el módulo de la tensión compuesta, que coincide con la de fase y razonar como en el circuito I . Entonces

$$P_{IV} = 3re(V_Z \overline{I_Z}) = 3re(V_Z \overline{I_Z}) = 3\frac{|V_Z|^2}{|Z|^2} re(Z) = 3\frac{|V_1|^2}{|Z|^2} re(Z) = P_I$$

(c) De los cálculos anteriores, surge directamente que el circuito II es el que entrega la máxima potencia activa a la carga trifásica, en tanto el III es la configuración que entrega la mínima potencia.

(d) Para calcular la corriente por la línea 1, lo más conveniente es pasar al circuito monofásico equivalente. Se sugiere dibujarlos para cada caso. Se obtiene

$$|I_{LI}| = \frac{|V_1|}{|Z|}$$

$$|I_{LII}| = 3\frac{|V_1|}{|Z|} = 3|I_{LI}|$$

$$|I_{LIII}| = \frac{|V_1|}{\sqrt{3}|Z|} = \frac{1}{\sqrt{3}}|I_{LI}|$$

$$|I_{LIV}| = \sqrt{3}\frac{|V_1|}{|Z|} = \sqrt{3}|I_{LI}|$$

El circuito III es el que tiene la menor corriente por las líneas.

(e) La potencia reactiva que consume la carga trifásica vale

$$Q_Z = 3im(V_Z \overline{I_Z}) = 3\frac{|V_Z|^2}{|Z|^2} im(Z)$$

El triángulo de condensadores, en paralelo con la carga, va a entregar la siguiente potencia reactiva trifásica

$$Q_C = 3|U|^2 C\omega$$

siendo ω la frecuencia de trabajo, C el valor de los condensadores y $|U|$ el valor eficaz de la tensión compuesta. De la identidad

$$Q_Z = Q_C \Rightarrow 3im(V_Z \overline{I_Z}) = 3 \frac{|V_Z|^2}{|Z|^2} im(Z) = 3|U|^2 C \omega$$

de donde

$$C = \frac{|V_Z|^2 im(Z)}{|U|^2 |Z|^2 \omega}$$

Observemos que el valor de C está condicionado por el cociente entre la tensión compuesta y la tensión de fase. En el circuito I ,

$$\frac{|V_Z|^2}{|U|^2} = \frac{1}{3}$$

por lo que

$$C_I = \frac{1}{3} \frac{im(Z)}{|Z|^2 \omega}$$

En el circuito II , se cumple que

$$|V_Z|^2 = |U|^2$$

por lo que

$$C_{II} = \frac{im(Z)}{|Z|^2 \omega} = 3C_I$$

En el circuito III , igual que en el I ,

$$\frac{|V_Z|^2}{|U|^2} = \frac{1}{3}$$

y entonces

$$C_{III} = \frac{1}{3} \frac{im(Z)}{|Z|^2 \omega} = C_I$$

Finalmente, en el circuito IV , al igual que en el II ,

$$C_{IV} = \frac{im(Z)}{|Z|^2 \omega} = 3C_I$$

El menor valor de condensador corresponde entonces a la carga en estrella.

Problema 2

(a)-i) Planteamos las ecuaciones de Kirchoff del circuito, junto con las ecuaciones características de los componentes:

$$\begin{aligned} Ri_R(t) = v_o(t) &\Rightarrow i_R(t) = \frac{v_o(t)}{R} \\ i_C(t) &= C \frac{dv_o(t)}{dt} \\ i_L(t) = i_R(t) + i_C(t) &= \frac{v_o(t)}{R} + C \frac{dv_o(t)}{dt} \\ v_i(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} - \alpha v_o(t) + v_o(t) &= L \frac{d}{dt} \left(\frac{v_o(t)}{R} + C \frac{dv_o(t)}{dt} \right) + (1 - \alpha) v_o(t) \end{aligned}$$

De donde

$$v_i = LC \ddot{v}_o(t) + \frac{L}{R} \dot{v}_o(t) + (1 - \alpha) v_o(t) = \left[LC \delta''(t) + \frac{L}{R} \delta'(t) + (1 - \alpha) \delta(t) \right] \star v_o(t)$$

Para la última igualdad hemos usado las propiedades básicas del producto convolución. Simplificando con los datos del problema, obtenemos

$$v_i = \left[\frac{1}{2\omega_0^2} \delta''(t) + \frac{1}{2\omega_0} \delta'(t) + \frac{1}{2} \delta(t) \right] \star v_o(t) = \frac{1}{2\omega_0^2} [\delta''(t) + \omega_0 \delta'(t) + \omega_0^2 \delta(t)] \star v_o(t)$$

(a)-ii) Si definimos el operador diferencial de segundo orden

$$D = \frac{1}{2\omega_0^2} [\delta''(t) + \omega_0\delta'(t) + \omega_0^2\delta(t)]$$

tenemos que $v_i(t) = Dv_o(t) = (D\delta) \star v_o(t)$, por lo que la distribución $T(t) = (D\delta)^{-1}$ permite modelar el sistema como

$$v_o(t) = T(t) \star v_i(t)$$

Si quisiéramos hallar $T(t)$, debemos encontrar la solución elemental del operador. Sabemos que dicha solución elemental verifica la identidad

$$DT = \delta = \frac{1}{2\omega_0^2} [T''(t) + \omega_0T'(t) + \omega_0^2T]$$

por lo que verificaremos que la h satisface dicha identidad. Calculemos las sucesivas derivadas de h , observando que h es la distribución asociada a una función seccionalmente derivable, que se anula en el origen:

$$h'(t) = Y(t) \frac{4}{\sqrt{3}} \omega_0^2 e^{-\frac{1}{2}\omega_0 t} \left[-\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) \right]$$

Observemos que $h'(t)$ presenta un salto en el origen, con $h(0) = 2\omega_0^2$. Entonces, al derivar, parece una δ de Dirac:

$$h''(t) = 2\omega_0^2\delta(t) + Y(t) \frac{4}{\sqrt{3}} \omega_0^2 e^{-\frac{1}{2}\omega_0 t} \left[-\frac{\omega_0}{2} \left(-\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) \right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \omega_0 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) - \frac{3}{4} \omega_0 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) \right]$$

Simplificando

$$h''(t) = 2\omega_0^2\delta(t) - Y(t) \frac{4}{\sqrt{3}} \omega_0^3 e^{-\frac{1}{2}\omega_0 t} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) \right]$$

Entonces

$$Dh = \frac{1}{2\omega_0^2} \left\{ 2\omega_0^2\delta(t) + Y(t) \frac{4}{\sqrt{3}} \omega_0^3 e^{-\frac{1}{2}\omega_0 t} \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) \right] + Y(t) \frac{4}{\sqrt{3}} \omega_0^3 e^{-\frac{1}{2}\omega_0 t} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) \right] + Y(t) \frac{4}{\sqrt{3}} \omega_0^3 e^{-\frac{1}{2}\omega_0 t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) \right\}$$

Operando

$$Dh = \delta(t) + Y(t) \frac{4}{\sqrt{3}} \omega_0^3 e^{-\frac{1}{2}\omega_0 t} \left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 \right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) \right] = \delta(t)$$

Otra alternativa para verificar es hallar directamente la solución elemental del operador diferencial. Por un teorema visto en el curso, sabemos que la solución elemental del operador diferencial lineal D tiene la forma es una distribución de la forma $Y(t)f(t)$, siendo h una función continua y derivable, que satisface la ecuación diferencial $Df = 0$, con condiciones iniciales $f(0) = 0$ y $f'(0) = 2\omega_0^2$ (pues el operador no está normalizado).

(a)-iii) Calculemos la Transformada de Fourier de $h(t)$. Al ser una función transformable, podemos hacerlo como distribución o como función.

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{+\infty} \frac{4}{\sqrt{3}} \omega_0 e^{-\frac{\omega_0}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right) e^{-j2\pi ft} dt =$$

Escribamos todo de forma exponencial, denotando $\lambda = -\frac{\omega_0}{2}(1 + j\sqrt{3})$. Observemos que

$$h(t) = Y(t) \frac{4}{\sqrt{3}} \omega_0 e^{-\frac{\omega_0}{2}t} \left[\frac{e^{j\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t} - e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t}}{2j} \right] = -Y(t) \frac{2}{j\sqrt{3}} \omega_0 \left[e^{-\frac{\omega_0}{2}(1+j\sqrt{3})t} - e^{-\frac{\omega_0}{2}(1-j\sqrt{3})t} \right]$$

$$h(t) = -Y(t) \frac{2}{j\sqrt{3}} \omega_0 \left[e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda}t} \right]$$

Por lo que la TdF vale

$$H(f) = \int_0^{+\infty} \frac{-2}{j\sqrt{3}} \omega_0 \left[e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda}t} \right] e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{-2}{j\sqrt{3}} \omega_0 e^{(\lambda-j2\pi f)t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{-2}{j\sqrt{3}} \omega_0 e^{(\bar{\lambda}-j2\pi f)t} dt$$

$$= \frac{-2\omega_0}{j\sqrt{3}(\lambda-j2\pi f)} e^{(\lambda-j2\pi f)t} \Big|_0^{+\infty} - \frac{-2\omega_0}{j\sqrt{3}(\bar{\lambda}-j2\pi f)} e^{(\bar{\lambda}-j2\pi f)t} \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{-2\omega_0}{j\sqrt{3}(\lambda-j2\pi f)} (-1) - \frac{-2\omega_0}{j\sqrt{3}(\bar{\lambda}-j2\pi f)} (-1) = \frac{-2\omega_0}{j\sqrt{3}} \left[\frac{-\bar{\lambda} + j2\pi f + \lambda - j2\pi f}{(\lambda-j2\pi f)(\bar{\lambda}-j2\pi f)} \right] = \frac{-2\omega_0}{j\sqrt{3}} \left[\frac{2j \operatorname{im}(\lambda)}{(\lambda-j2\pi f)(\bar{\lambda}-j2\pi f)} \right]$$

$$= \frac{-4\omega_0}{\sqrt{3}} \left[\frac{\operatorname{im}(\lambda)}{(j2\pi f)^2 - (\lambda + \bar{\lambda})(j2\pi f) + |\lambda|^2} \right] = \frac{-4\omega_0}{\sqrt{3}} \left[\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0}{(j2\pi f)^2 - (-\omega_0)(j2\pi f) + 2\omega_0^2} \right]$$

$$H(f) = \frac{2\omega_0^2}{(j2\pi f)^2 + (\omega_0)(j2\pi f) + 2\omega_0^2}$$

Por otro lado, calculamos la transferencia en régimen sonosoidal. Palteando la malla exterior, obtenemos

$$V_i + \alpha V_o = Lj\omega I_L + V_o$$

Planteando el nudo superior:

$$I_L = I_R + I_C = \frac{V_o}{R} + V_o C j\omega$$

De donde

$$V_i + \alpha V_o = Lj\omega \left[\frac{V_o}{R} + V_o C j\omega \right] + V_o \Rightarrow V_i = V_o \left[(1 - \alpha) + \frac{Lj\omega}{R} + LC(j\omega)^2 \right] = \frac{V_o}{R} [(1 - \alpha)R + Lj\omega + RLC(j\omega)^2]$$

De donde

$$H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{RLC(j\omega)^2 + Lj\omega + (1 - \alpha)R} = \frac{1}{LC} \frac{1}{(j\omega)^2 + \frac{1}{RC} + \frac{1-\alpha}{LC}} = \frac{2\omega_0^2}{(j\omega)^2 + \omega_0(j\omega) + \omega_0^2}$$

que coincide con la transformada de Fourier calculada antes, cambiando ω por $2\pi f$.

(b) Para deducir los Diagramas de Bode asintóticos, usamos las raíces del denominador: $\lambda = -\frac{\omega_0}{2}(1 + j\sqrt{3})$ y $\bar{\lambda}$. La aproximación asintótica discute en función de $|\lambda| = \omega_0 = \omega_n$. El factor de amortiguamiento vale $\zeta = \frac{1}{2}$. Re-escribamos la transferencia:

$$H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{2} \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

■ $\omega \ll \omega_n \Rightarrow$

$$H(j\omega) \approx \frac{1}{2} \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| \approx 20 \log(1/2) \text{ db} \approx -6 \text{ db} \\ \arg(H(j\omega)) \approx 0^\circ \end{cases}$$

■ $\omega_n \ll \omega \Rightarrow$

$$H(j\omega) \approx \frac{1}{2} \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| \approx 20 \log(\omega_n^2/2) - 40 \log(\omega) \text{ db} \\ \arg(H(j\omega)) \approx \pm 180^\circ \end{cases}$$

Para definir bien sentido del cambio de fase en ω_n , evaluamos la transferencia en dicha frecuencia:

$$H(j\omega_n) = \frac{1}{2} \frac{1}{j2\zeta} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega_n)| \approx \frac{1}{2} (-6 \text{ db}) \\ \arg(H(j\omega_n)) \approx -90^\circ (+270^\circ) \end{cases}$$

La siguiente figura muestra los Diagramas de Bode obtenidos.

