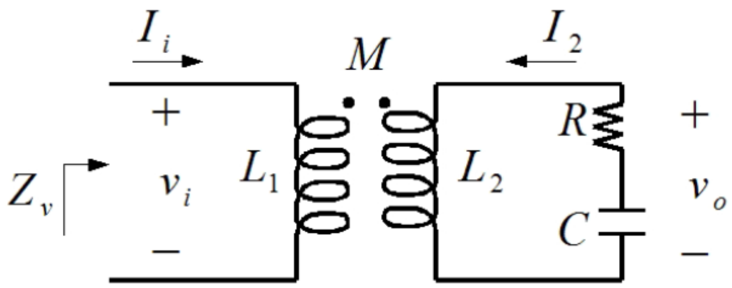
Sistemas Lineales 1

Examen de febrero de 2015

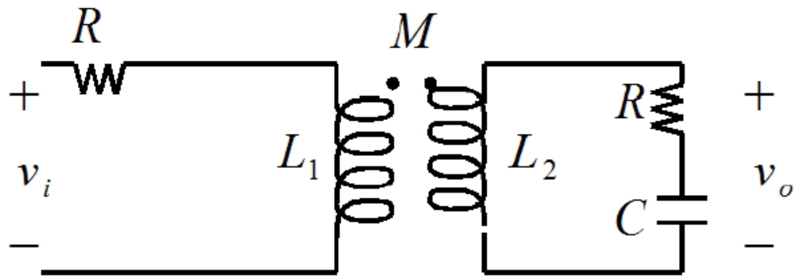
Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1



(a) En el circuito de la figura, donde el transformador es simple, hallar la transferencia en régimen sinusoidal $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$ y la impedancia vista desde la entrada ($Z_v(j\omega)$).

(b) Simplificar ambas expresiones para el caso en que el transfomador es perfecto.



(c) i) Calcular la transferencia en régimen $G(j\omega)$ del circuito de la figura, con transfomador perfecto.

ii) Sabiendo que $L_2 = 9999L_1$ y $L_1 = R^2C$, mostrar que $G(j\omega)$ se puede escribir como

$$G(j\omega) = K.\frac{j\omega(j\omega + \omega_1)}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_2(j\omega) + \omega_2^2}$$

para valores adecuados de ω_1, ω_2, K y ζ.

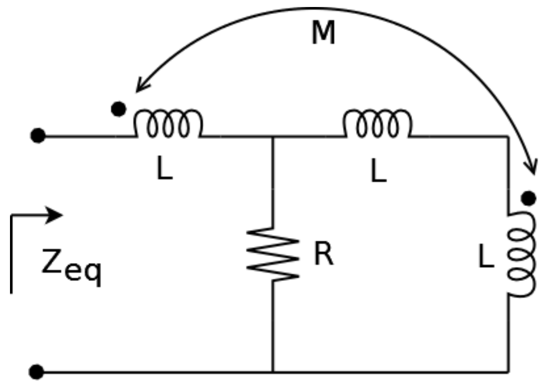
(d) Realizar los Diagramas de Bode asintóticos de $G(j\omega)$.

(e) Para las siguientes entradas, hallar las respectivas respuestas en régimen:

i) $v_i(t) = 1V\cos\left(\frac{t}{100\sqrt{L_1C}}\right)$;

i) $v_i(t) = 1V\cos\left(\frac{t}{RC}\right)$.

Problema 2



(a) i) En el circuito de la figura, hallar $Z_{eq}(j\omega)$, la impedancia vista por la fuente v_i funcionando en régimen sinusoidal.

ii) Verificar que si $L = M$, entonces $Z_{eq}(j\omega) = \frac{1}{2}.Lj\omega.\frac{(j\omega+5R/L)}{(j\omega+R/2L)}$.

(b) Asumiendo que para valores adecuados de R y L se obtiene el siguiente valor de $Z_{eq}(j\omega)$ a $50Hz$:

$$Z_{eq}(j100\pi) = 1k\Omega\,\angle + 45^o$$

i) Hallar la potencia activa y reactiva consumida por la carga a una fuente de tensión sinusoidal $v_i(t)$, de $50Hz$ y valor eficaz $220\,V$.

ii) Indicar si la carga es inductiva o capacitiva.

iii) Compensar la potencia reactiva entregada por la fuente, indicando qué elemento debe colocar, de qué valor y el correspondiente esquema de conexión.

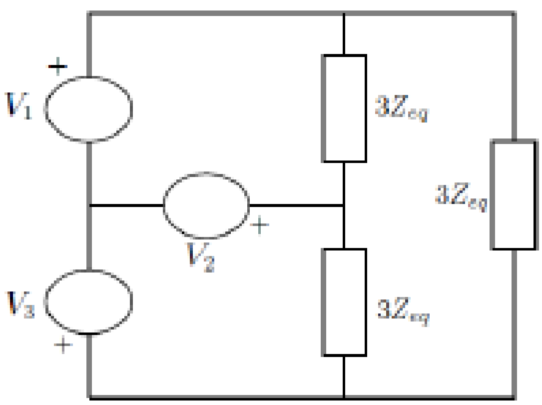
iv) Dibujar un diagrama fasorial con la tensión de la fuente y las corrientes consumidas por la carga, con y sin elemento de compensación. Incluir también la corriente por el elemento de compensación.

(c) Se considera el circuito trifásico de la figura, donde el sistema de fuentes es equilibrado y perfecto, de secuencia positiva, de $50HZ$ y $220\,V$ eficaces.

i) Hallar la potencia activa y reactiva consumida por la carga trifásica al sistema de fuentes.

ii) Hallar las expresiones temporales de las corrientes de línea (asuma lo que necesite sobre el sistema de fuentes).

iii) Compensar la potencia reactiva trifásica, indicando qué elementos debe colocar, de qué valor y el correspondiente esquema de conexión.



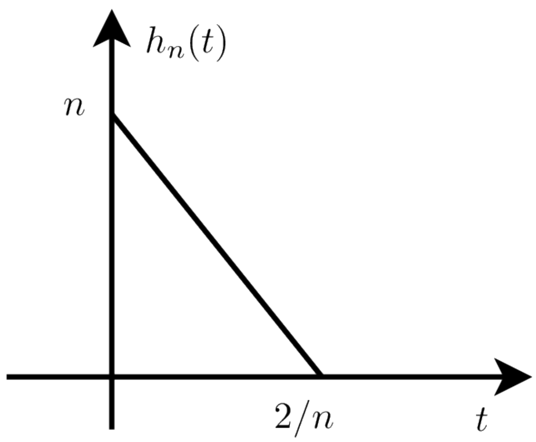
Sistemas Lineales 1

Examen de febrero de 2015

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

(a) Definir la convergencia en distribuciones.



(b) Hallar el límite en D' de la sucesión de distribuciones T_{h_n}, siendo h_n la función de la figura.

Pregunta 2

Se considera la señal $x(t)$ de banda acotada W y una pulsación $\omega_0 \gg W$. Hallar la TdF y bosquejar los respectivos espectros de
a) $m(t) = x(t).\cos(\omega_0 t)$; b) $m(t) = x(t) * \cos(\omega_0 t)$.

(**Enunciar claramente las propiedades que usa.**)

Pregunta 3

(a) Enunciar y demostrar el Teorema de Blondell, para cargas en estrella o triángulo, explicando claramente cómo usa las hipótesis.

(b) Describir claramente el Método de los dos vatímetros para medir potencia en un sistema trifásico, incluyendo el contexto de aplicación, el esquema de conexionado y la fundamentación teórica.

Pregunta 4

Considere los Diagramas de Bode de la figura. Se sabe que corresponden a una transferencia real racional propia, de orden 4. Indicar a cuál o cuáles de los siguientes sistemas están asociados (**para cada sistema, justificar por sí o por no**).

i) Transferencia propia no estricta, con raíces reales simples, de módulos alejados entre sí.

ii) Transferencia estrictamente propia, con raíces reales simples, de módulos alejados entre sí.

iii) Transferencia propia no estricta, con raíces simples (reales y complejas), de módulos alejados entre sí.

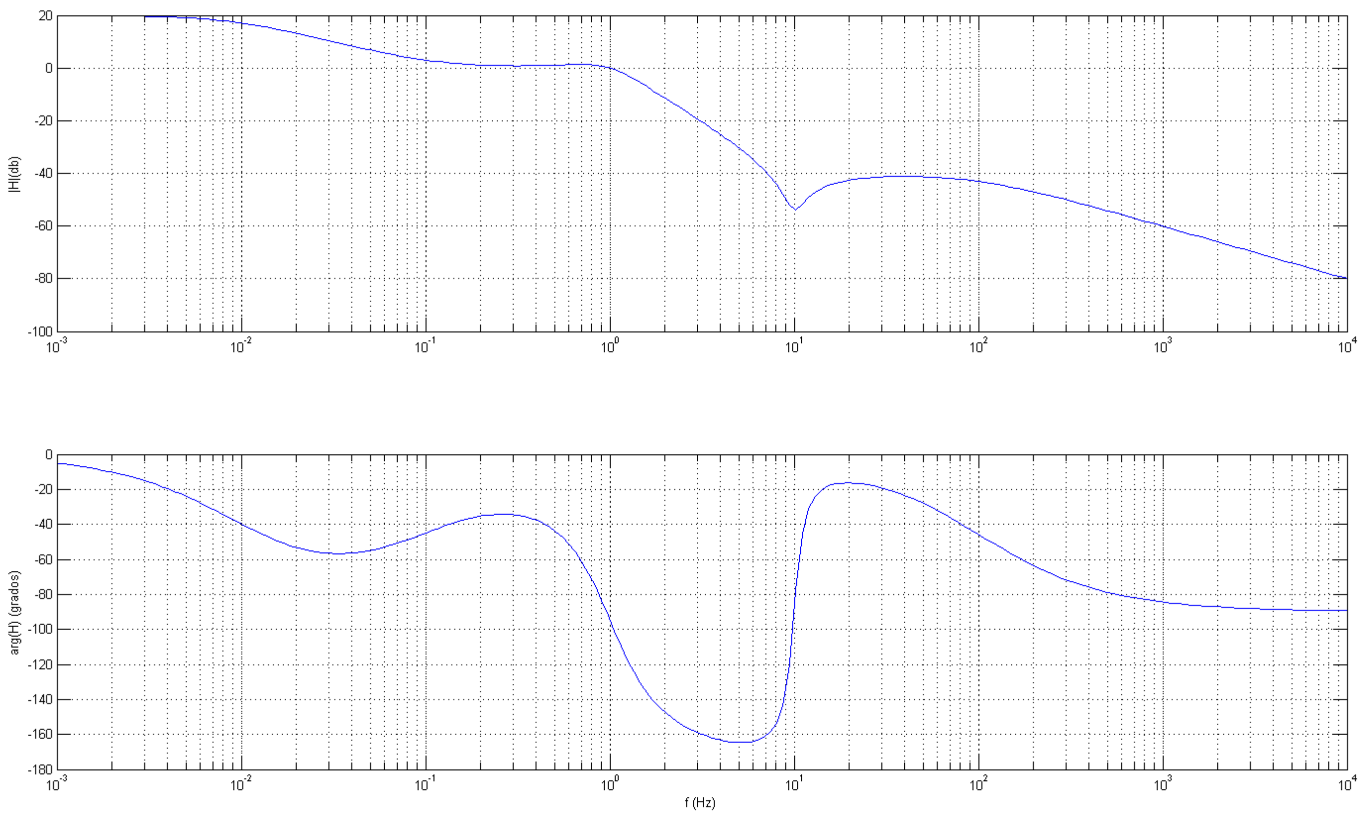
iv) Transferencia estrictamente propia, con raíces simples (reales y complejas), de módulos alejados entre sí.

v) Transferencia propia no estricta, con raíces reales e imaginarias puras, de módulos alejados entre sí.

vi) Transferencia estrictamente propia, con raíces reales e imaginarias puras, de módulos alejados entre sí.

vii) Transferencia propia no estricta, con raíces reales no necesariamente simples, de módulos alejados entre sí.

viii) Transferencia estrictamente propia, con raíces reales no necesariamente simples, de módulos alejados entre sí.



Solución

Problema 1

a) Las ecuaciones que en régimen describen al transfomador simple son:

$$\begin{cases} V_1 = L_1 j\omega I_1 + M j\omega I_2 \\ V_2 = L_2 j\omega I_1 + M j\omega I_1 \end{cases}$$

siendo $V_1 = V_i$ y $V_2 = V_o$. Por otro lado, la malla del secundario nos dice que

$$V_o = -\left(R + \frac{1}{Cj\omega}\right) I_2$$

donde el signo de menos viene del sentido elegido para la corriente I_2. De la identidad

$$L_2 j\omega I_1 + M j\omega I_1 = -\left(R + \frac{1}{Cj\omega}\right) I_2$$

obtenemos $\boxed{I_2 = -\frac{MC(j\omega)^2}{L_2C(j\omega)^2 + RCj\omega + 1} I_1}$.

Sustituyendo I_2 en la ecuación de V_1 obtenemos

$$\boxed{Z_v = \frac{V_i}{I_1} = \frac{(L_1L_2 - M^2)C(j\omega)^3 + RCL_1(j\omega)^2 + L_1 j\omega}{L_2C(j\omega)^2 + RCj\omega + 1}}$$

Usando que $I_1 = V_i/Z_v$ y las relaciones entre V_o, I_2 e I_1 llegamos a

$$V_o = -\left(\frac{RCj\omega + 1}{Cj\omega}\right) \cdot \left(\frac{-MC(j\omega)^2}{L_2C(j\omega)^2 + RCj\omega + 1}\right) \cdot \frac{V_i}{Z_v}$$

y

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{M(RCj\omega + 1)}{(L_1L_2 - M^2)C(j\omega)^2 + RCL_1 j\omega + L_1}}$$

b) Para un transformador perfecto, $M^2 = L_1L_2$, de donde

$$\boxed{Z_v = \frac{RCL_1(j\omega)^2 + L_1 j\omega}{L_2C(j\omega)^2 + RCj\omega + 1}}$$

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{M(RCj\omega + 1)}{RCL_1 j\omega + L_1} = \frac{M}{L_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}}$$

c) Usando la parte anterior, es inmediato que la tensión del primario del transformador perfecto vale

$$V_1 = \frac{Z_v}{R + Z_v} V_i$$

Como $V_o = H.V_1$, obtenemos la expresión para la transferencia deseada

$$\boxed{G(j\omega) = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} . \frac{RL_1C(j\omega)^2 + L_1 j\omega}{R(L_1 + L_2)C(j\omega)^2 + (R^2C + L_1)j\omega + R}}$$

Trabajando un poco más la expresión, llegamos a

$$G(j\omega) = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} . \frac{RL_1C}{R(L_1 + L_2)C} \frac{\left(j\omega + \frac{1}{RC}\right) j\omega}{(j\omega)^2 + \frac{R^2C + L_1}{R(L_1 + L_2)C} j\omega + \frac{R}{R(L_1 + L_2)C}}$$

De los datos, sabemos que $\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \sqrt{9999} \approx 100$. Además,

$$\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} . \frac{L_1}{L_1 + L_2} = \frac{\sqrt{9999}}{10000} \approx \boxed{\frac{1}{100} = K}$$

Definamos

$$\omega_1 = \frac{1}{RC} \quad , \quad \omega_2^2 = \frac{1}{(L_1 + L_2)C} = \frac{1}{10000 L_1 C} \Rightarrow \omega_2 = \frac{1}{100\sqrt{L_1 C}}$$

Entonces

$$\boxed{G(j\omega) = K.\frac{j\omega\,(j\omega + \omega_1)}{(j\omega)^2 + 2.\frac{1}{100}\omega_2(j\omega) + \omega_2^2}}$$

d) Las raíces del numerador son 0 y ω_1, en tanto del denominador tiene dos raíces complejas conjugadas, de módulo ω_2 y factor de amortiguamiento asociado $\zeta = 0,01$. De los datos de la parte anterior, sabemos que $\omega_1 = 100\omega_2$.

Para realizar los Diagramas de Bode asintóticos, vamos a hacer un análisis por bandas. Al distar las singularidades dos décadas, la representación asintótica será muy buena, cuidando ajustar el Diagrama de módulo con el efecto de ζ en las cercanías de ω_2.

- $\omega \ll \omega_2 \Rightarrow$

$$G(j\omega) \approx K.\frac{j\omega(100\omega_2)}{\omega_2^2} = 100K.\frac{j\omega}{\omega_2} = \begin{cases} |G(j\omega)| & \approx & 20\log\left(100K/\omega_2\right) + 20\log\omega\ db \\ arg(G(j\omega)) & \approx & \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- $\omega_2 \ll \omega \ll 100\omega_2 \Rightarrow$

$$G(j\omega) \approx K.\frac{j\omega(100\omega_2)}{(j\omega)^2} = 100K.\frac{\omega_2}{j\omega} = \begin{cases} |G(j\omega)| & \approx & 20\log\left(100K\omega_2\right) - 20\log\omega\ db \\ arg(G(j\omega)) & \approx & -\frac{\pi}{2}\ \left(+\frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

- $\omega \gg 100\omega_2 \Rightarrow$

$$G(j\omega) \approx \frac{j\omega(j\omega)}{(j\omega)^2} = K = \begin{cases} |G(j\omega)| & \approx & 20\log\left(K\right) db \approx -40db \\ arg(G(j\omega)) & \approx & 0\ (\pm 2\pi) \end{cases}$$

Para discriminar el sentido de la variación de 180 grados en el entorno de ω_2, podemos evaluar la transferencia real en dicha frecuencia:

$$G(j\omega_2) = K.\frac{j\omega_2\,(j\omega_2 + 100\omega_2)}{(j\omega_2)^2 + 2.\frac{1}{100}\omega_2(j\omega_2) + \omega_2^2} = K.\frac{j\,(j + 100)}{(j)^2 + 2.\frac{j}{100} + 1} \approx K.\frac{j5000}{j} \approx 50$$

La siguiente figura muestra los Diagramas de Bode obtenidos.

e) La respuesta en régimen a una señal sinusoidal de la forma $v_i(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ es

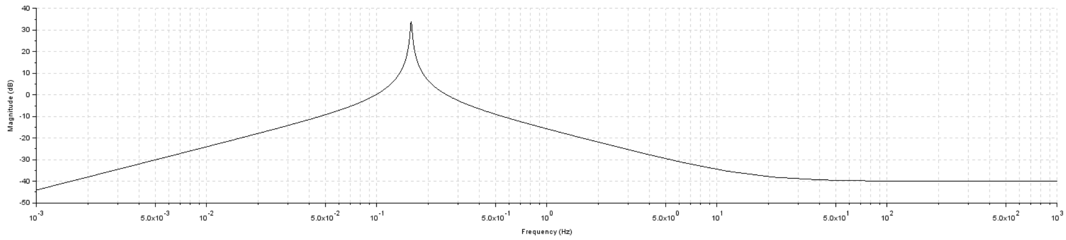
$$v_o(t) = A.|H(j\omega_0)|.\cos\left(\omega_0 t + \varphi + arg(H(j\omega_0))\right)$$

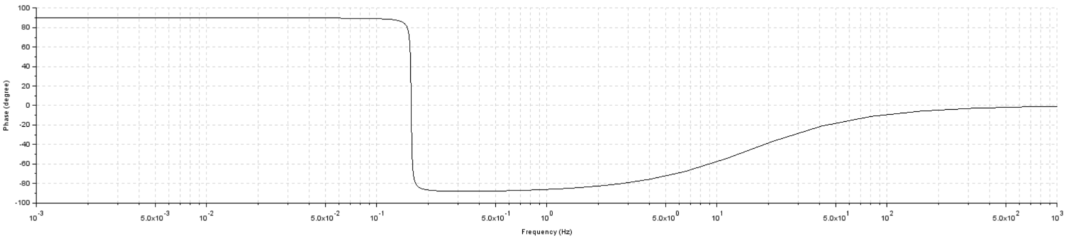
Entonces, si $v_i(t) = 1V\cos\left(\frac{t}{100\sqrt{L_1 C}}\right) = 1V\cos\left(\omega_2 t\right)$, tenemos que

$$\boxed{v_o(t) = 1V.|H(j\omega_2)|.\cos\left(\omega_2 t + arg(H(j\omega_2))\right) \approx 50V.\cos\left(\omega_2 t\right)}$$

De igual forma, si $v_i(t) = 1V\cos\left(\frac{t}{RC}\right) = 1V\cos\left(\omega_1 t\right)$, tenemos que

$$\boxed{v_o(t) = 1V.|H(j\omega_1)|.\cos\left(\omega_1 t + arg(H(j\omega_1))\right) \approx \frac{\sqrt{2}}{100}V.\cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{4}\right)}$$





Problema 2

a) Denotemos por V_i al fasor de tensión de la fuente y por V_1 y V_2 a los fasores de las tensiones de las bobinas del transformador, medidas desde los puntos, e I_1 e I_2 a las respectivas corrientes, entrando por los puntos. Las ecuaciones que describen el funcionamiento del transformador son:

$$\begin{cases} V_1 &= Lj\omega I_1 + Mj\omega I_2 \\ V_2 &= Lj\omega I_2 + Mj\omega I_1 \end{cases}$$

Denotemos por V_R1 a la tensión en bornes de R. Entonces se cumple que:

$$I_1 = \frac{V_R}{R} + I_2 = \frac{Lj\omega I_2 + V_2}{R} + I_2 = \frac{Lj\omega + R}{R}.I_2 + \frac{V_2}{R} = \frac{Lj\omega + R}{R}.I_2 + \frac{Lj\omega I_2 + Mj\omega I_1}{R}$$

De donde

$$\boxed{I_2 = \frac{(R - Mj\omega)}{(R + 2Lj\omega)} I_1}$$

Por otro lado, sabemos que

$$V_i = V_1 + Lj\omega I_2 + V_2 = (L+M)j\omega I_1 + (2L+M)j\omega I_2$$

Sustituyendo, obtenemos

$$V_i = \left[\frac{(L+M)(R+2lj\omega) + (2L+M)(R-Mj\omega)}{R+2Lj\omega}\right].j\omega.I_1$$

Despejamos entonces la impedancia vista:

$$\boxed{Z_{eq}(j\omega) = \frac{V_i}{I_1} = \frac{j\omega}{R+2Lj\omega}\left[(2L^2 - M^2)j\omega + (3L+2M)R\right]}$$

Si $L = M$, entonces

$$Z_{eq}(j\omega) = \frac{j\omega}{R+2Lj\omega}\left(L^2 j\omega + 5LR\right) = \frac{L^2 j\omega\left(j\omega + \frac{5R}{L}\right)}{2L\left(j\omega + \frac{R}{2L}\right)} = \frac{1}{2}.Lj\omega.\frac{(j\omega + 5R/L)}{(j\omega + R/2L)}$$

b) Denotemos por V al fasor eficaz de la tensión de la fuente y por I al fasor eficaz de la corriente que consume la carga. Escribamos $Z_{eq} = R_{eq} + jX_{eq}$. La potencia activa consumida por la carga es

$$P = re\left(V\bar{I}\right) = re\left(V\frac{\bar{V}}{\bar{Z_e q}}\right) = \frac{|V|^2}{|Z_{eq}|^2}.re\left(Z_{eq}\right) = \frac{|V|^2}{|Z_{eq}|^2}.R_{eq}$$

Análogamente,

$$Q = \frac{|V|^2}{|Z_{eq}|^2}.X_{eq}$$

Del valor de Z_{eq} sale que $R_{eq} = X_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,k\Omega$. Entonces

$$\boxed{P = \frac{220^2}{10^6}.\frac{10^3}{\sqrt{2}}W = \frac{220^2}{10^3\sqrt{2}}W}$$

$$\boxed{Q = \frac{220^2}{10^3\sqrt{2}}VAR}$$

La carga es inductiva, ya que $Q > 0$. Esto es lógico ya que el circuito sólo contiene inductancias y resistencias.

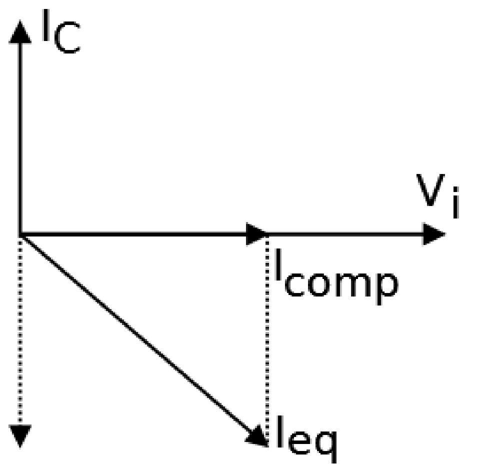
Para compensar la potencia reactiva consumida a la fuente, podemos colocar un condensador en paralelo con la carga, de forma que entregue la reactiva adecuada. Sabemos que un condensador C, alimentado por una tensión de fasor eficaz V_i consume una reactiva:

$$Q_C = -|V_i|^2 C\omega$$

Entonces, imponiendo $Q_C = -Q$, obtenemos

$$\boxed{C = \frac{Q}{|V_i|^2\omega} = \frac{1}{10^5\sqrt{2}\pi}F}$$

En el diagrama farorial que se muestra a continuación, se muestran la tensión, la corriente por la



carga y la corriente por el elemento de compensación y la suma de ambas, que es la corriente que entrega la fuente luego de compensar.

c) En el circuito trifásico, la carga está en triángulo. Si la transfiguramos a estrella, obtenemos un modelo equivalente en el que podemos aplicar el análisis monofásico. Al ser cargas idénticas, la transfiguración consiste simplemente en dividir entre 3. El equivalente monofásico resultante es el circuito de la parte anterior. Las potencias activa y reactiva trifásicas totales son 3 veces las calculadas en la parte b).

Para hallar las expresiones temporales de las corrientes de línea, asumimos una expresión para las tensiones de las fuentes. Supongamos que es la siguiente

$$v_1(t) = \sqrt{2}\,220V\cos(100\pi t)$$
$$v_2(t) = \sqrt{2}\,220V\cos(100\pi t + 120^o)$$
$$v_3(t) = \sqrt{2}\,220V\cos(100\pi t - 120^o)$$

Las corrientes de línea se obtienen del equivalente monofásico:

$$i_{L1}(t) = \frac{\sqrt{2}\,220}{|Z_{eq}|} A \cos\left(100\pi t - arg(Z_{eq})\right) = \sqrt{2}\,0{,}22 A \cos\left(100\pi t - 45^o\right)$$

$$i_{L2}(t) = \frac{\sqrt{2}\,220}{|Z_{eq}|} A \cos\left(100\pi t + 120^o - arg(Z_{eq})\right) = \sqrt{2}\,0{,}22 A \cos\left(100\pi t + 75^o\right)$$

$$i_{L3}(t) = \frac{\sqrt{2}\,220}{|Z_{eq}|} A \cos\left(100\pi t - 120^o - arg(Z_{eq})\right) = \sqrt{2}\,0{,}22 A \cos\left(100\pi t - 165^o\right)$$

Si las fuentes estuvieran en otra secuencia, hay que modificar la expresión de las corrientes de manera consistente.

Una estrella de condensadores de valor hallado en la parte anterior, colocada en paralelo con la carga trifásica, compensa la reactiva consumida al sistema de fuentes. Si se transfigura esta estrella a triángulo, se obtienen condensadores de menor valor.