Sistemas Lineales 1

Examen de febrero de 2014

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

a) Se considera el transformador ideal de la figura 1, en donde n es la relación de vueltas entre el primario y el secundario. Calcular Z_v, la impedancia vista desde el primario.

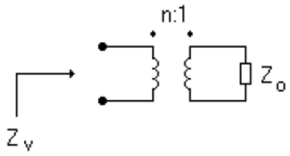


Figura 1: Transformador ideal con carga.

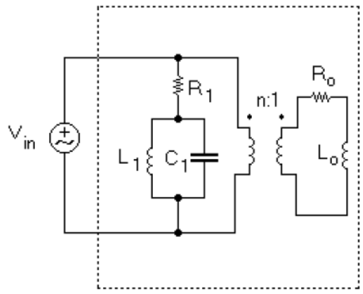


Figura 2: Circuito en régimen sinusoidal.

b) Se considera el circuito en régimen sinusoidal de la figura 2.

i) Hallar los siguientes fasores: I_0 (corriente por R_0), I_1 (corriente por R_1), I_C (corriente por C_1), I_L (corriente por L_1) e I (corriente que entrega a fuente).

A partir de ahora, $v_{in}(t) = 220\sqrt{2}V\cos(100\pi t)$ y

$$R_1 = 220\Omega \ , \ R_0 = 3\Omega \ , \ C_1 = 883nF \ , \ L_0 = 16,5mHy \ , \ L_1 = 660mHy \ , \ n = 2$$

ii) Realizar un diagrama fasorial con los fasores anteriores y el fasor V_{in} de la fuente de tensión.

iii) Calcular la potencia activa y reactiva consumida a la fuente.

iv) Compensar la potencia reactiva, indicando qué elemento colocaría, de qué valor y dónde lo conectaría.

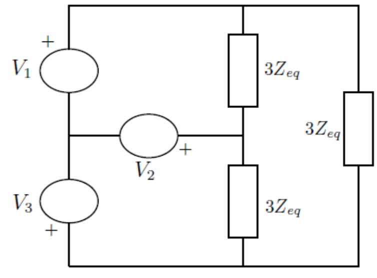
c) Dado el circuito trifásico de la figura, donde Z_{eq} es la impedancia de la parte b) y

$$v_1(t) = 220\sqrt{2}V\cos(100\pi t), v_2(t) = 220\sqrt{2}V\cos\left(100\pi t + \frac{2\pi}{3}\right), v_3(t) = 220\sqrt{2}V\cos\left(100\pi t + \frac{4\pi}{3}\right)$$

i) Calcular la potencia activa y reactiva consumida a la fuente trifásica.

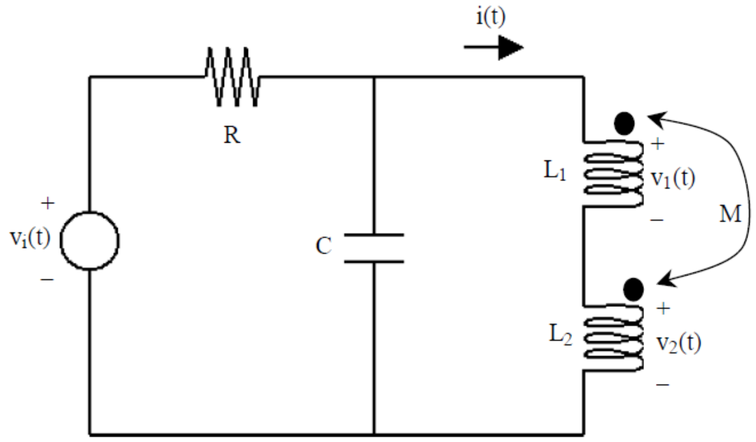
ii) Hallar las expresiones temporales de las corrientes de línea $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$.

iii) Compensar la potencia reactiva mediante tres componentes iguales conectados en triángulo. Indicar qué componentes usaría, de qué valor y cómo los conectaría.



Problema 2

Se considera el circuito de la figura, alimentado por una fuente sinusoidal $v_i(t) = A\cos(\omega t)$, con A y ω positivos.



a) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal

$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$$

siendo $V_o(j\omega)$ la tensión en régimen sinusoidal en bornes de la inductancia L_2.

b) Verificar que si el transformador es perfecto y se cumple que

$$L_1 = L \ , \ L_2 = 9L \ , \ \omega_0 = \frac{1}{RC} \ , \ \frac{R}{L} = \frac{16}{RC}$$

entonces la transferencia puede escribirse como

$$H(j\omega) = \frac{3}{4}\frac{\omega_0(j\omega)}{(j\omega)^2 + \omega_0(j\omega) + \omega_0^2}$$

c) i) Deducir los Diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$, explicando su construcción.

ii) Bosquejar el Diagrama real de módulo.

d) i) Para la transferencia en régimen anterior, calcular la atenuación y el desfasaje que presenta a las frecuencias $\frac{\omega_0}{10}$, ω_0 y $10\omega_0$.

ii) Calcular la potencia aparente, activa y reactiva consumida/entregada por la fuente de tensión cuando su valor es $V_0\cos(\omega_0 t)$.

iii) Si la tensión de la fuente es $v_i(t) = V_0 cos(\omega_0 t) + V_1 cos(10\omega_0 t)$, calcular los valores eficaces de la entrada y su respectiva salida.

Sistemas Lineales 1

Examen de febrero de 2014

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

(a) Sea $T \in \mathcal{D}'$. Definir su derivada $T' \in \mathcal{D}'$.

(b) A partir de la definición anterior, calcular la derivada del escalón $Y(t)$ como distribución.

(c) Definir la Transformada de Fourier de una distribución temperada $T \in \mathcal{D}'$ ($\mathcal{F}[T]$).

(d) Sea $T \in \mathcal{D}'$ una distribución temperada y $T' \in \mathcal{D}'$ su derivada, también temperada. Hallar la relación entre $\mathcal{F}[T]$ y $\mathcal{F}[T']$.

Pregunta 2

(a) Sea $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Definir el concepto de fasor y hallar el fasor X asociado a $x(t)$.

(b) Para una componente dada, funcionando en régimen sinusoidal, se conoce su tensión en bornes $v(t) = A_v \cos(\omega_0 t + \varphi_v)$ y su corriente $i(t) = A_i \cos(\omega_0 t + \varphi_i)$, medida en el sentido de la caida de tensión. Deducir una expresión para la potencia media consumida por la componente en función de los fasores asociados a la tensión y a la corriente.

Pregunta 3

(a) ¿Cuándo se dice que un circuito no distorsiona?

(b) Deducir la condición que debe cumplir en frecuencia un circuito lineal que no distorsiona.

(c) Se considera un circuito lineal, de respuesta al impulso $h(t)$, con TdF

$$H(f) = \mathcal{F}[h(t)](f) = A_0 \cos(f) + A_1$$

i) ¿Este sistema distorsiona en fase?

ii) ¿Este sistema distorsiona en amplitud?

Pregunta 4

Sea un circuito lineal funcionando en régimen sinusoidal, de transferencia en régimen $H(j\omega) = \frac{I(j\omega)}{V(j\omega)}$, siendo $V(j\omega)$ el fasor asociado a la fuente de tensión de entrada del circuito e $I(j\omega)$ el fasor asociado a la corriente que el circuito en régimen le consume a la fuente de tensión de entrada. Sean P_ω y Q_ω las potencias activa y reactiva consumida por el circuito, a la frecuencia de trabajo ω. ¿Qué condiciones debe cumplir $H(j\omega)$ para que las siguientes afirmaciones sean ciertas?

(a) Existe una frecuencia de trabajo ω_1 para la cual $P_{\omega_1} = 0$.

(b) Existe una frecuencia de trabajo ω_2 para la cual $Q_{\omega_2} = 0$.

(c) Existe una frecuencia de trabajo ω_3 para la cual $|P_{\omega_3}| = |Q_{\omega_3}|$.

(d) Si $v(t) = 220\sqrt{2}V\cos(\omega_4 t)$, entonces $i(t) = 22A\cos\left(\omega_4 t - \frac{\pi}{3}\right)$.

Solución

Problema 1

a) En el transformador ideal: $V_1 = nV_2$, $nI_1 = -I_2$. Entonces:

$$Z_v = \frac{V_1}{I_1} = \frac{nV_2}{-I_2/n} = n^2 Z_o$$

b) i) La impedancia del secundario pasa al primario así: $4(R_0 + L_0 j\omega)$. Entonces:

$$I_0' = \frac{V_{in}}{4(R_0 + L_0 j\omega)}$$

Pasando esta corriente al secundario: $\Rightarrow I_0 = 2I_0' = \frac{V_{in}}{2(R_0+L_0 j\omega)}$

$$I_1 = \frac{V_{in}}{R_1 + \left(L_1 j\omega || \frac{1}{C_1 j\omega}\right)} = \frac{V_{in}(1 - L_1 C_1 \omega^2)}{R_1(1 - L_1 C_1 \omega^2) + L_1 j\omega}$$

$I_1 = I_L + I_C$, $I_L L_1 j\omega = \frac{I_C}{C_1 j\omega} \Rightarrow$

$$I_L = -I_C \frac{1}{L_1 C_1 \omega^2}$$

$$\begin{cases} I_L &= I_1 \cdot \frac{1}{1 - L_1 C_1 \omega^2} \\ I_C &= -I_1 \cdot \frac{L_1 C_1 \omega^2}{1 - L_1 C_1 \omega^2} \end{cases}$$

Finalmente

$$I = I_1 + I_0'$$

ii) Con los valores dados, y las expresiones anteriores, calculamos los fasores y realizamos el diagrama fasorial de la figura 3. Hay que observar que los fasores I_1, I_C e I_L son colineales, al igual que I_0' e I_0.

$$\begin{aligned} I_0' &\approx 4{,}6 - j7{,}9A = 9{,}2Ae^{-60^o} \\ I_0 &\approx 9{,}2 - j16A = 18{,}4Ae^{-60^o} \\ I_1 &\approx 0{,}5(1-j)A = \tfrac{1}{\sqrt{2}}Ae^{-45^o} \\ I_L &\approx 0{,}53(1-j)A = 0{,}53\sqrt{2}Ae^{-45^o} \\ I_C &\approx -0{,}03(1-j)A = 0{,}03\sqrt{2}Ae^{-225^o} \\ I &\approx (5{,}1 - j8{,}4)A = 9{,}86Ae^{-59^o} \;\; (carga\, inductiva) \end{aligned}$$

iii) La potencia activa puede obtenerse como $re(V_{in}\bar{I})$ o como

$$P = R_1|I_1|^2 + R_0|I_0|^2 = 1122W$$

En tanto

$$Q = L_1\omega|I_L|^2 + L_0\omega|I_0|^2 - \frac{1}{C\omega}|I_C|^2 = 1872VAR$$

iv) Para compensar la potencia reactiva consumida a la fuente, considerando que la carga que ve la fuente es inductiva, colocamos un condensador en paralelo con la carga, que aporte la potencia reactiva Q_C necesaria:

$$Q_C = -|V_{in}|^2 C\omega = -Q \Rightarrow C \approx 123\mu F$$

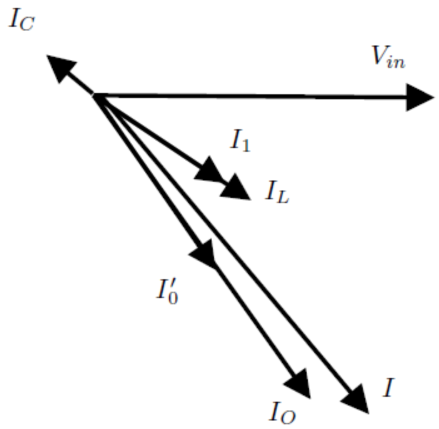


Figura 3:

c) i) Pasamos la carga a estrella, y obtenemos un equivalente por fase que es similar al circuito de la parte b). Las potencias activa y reactiva consumidas al sistema trifásico de fuentes son el triple de las calculadas en la parte b).

ii) Las corrientes de línea tienen la misma amplitud y frecuencia que la corriente consumida a la fuente en el circuito de la figura 2. Además, $I_1 = I$, de donde

$$\begin{cases} i_1(t) &= |b|\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{59^o\pi}{180^o}\right) \\ i_2(t) &= |b|\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{59^o\pi}{180^o} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_3(t) &= |b|\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{59^o\pi}{180^o} + \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

iii) Podemos compensar con una estrella de condensadores como el calculado en la parte b). Con condensadores 3 veces más chicos, podemos armar un triángulo equivalente.

Problema 2

a) $V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2$
$V_2 = j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1$
$I_1 = I_2 \Rightarrow V_1 = j\omega(L_1 + M)I_1$, $V_2 = j\omega(L_2 + M)I_1$.
Ademas: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{L_1+M}{L_2+M}$.
Planteando el nudo: $\frac{V_i - V_N}{R} = V_N j\omega C + I_1$.
Como: $I_1 = \frac{V_2}{j\omega(L_2+M)}$, $V_N = V_1 + V_2 = V_2(1 + \frac{L_1+M}{L_2+M})$.
Entonces: $H(j\omega) = \frac{1}{RC}(\frac{L_2+M}{L_1+L_2+2M})\frac{j\omega}{(j\omega)^2 + \frac{1}{RC}j\omega + \frac{1}{C(L_1+L_2+2M)}}$.

b) $M^2 = L_1 L_2 = 3L$, entonces: $H(j\omega) = \frac{3}{4}\frac{\omega_0(j\omega}{)}(j\omega)^2 + \omega_0(j\omega) + \omega_0^2$

c) La transferencia posee una raiz real simple en el numerador ($j\omega = 0$) y dos raices complejas conjugadas en el denominador ($\zeta = \frac{1}{2}$, $\omega_n = \omega_0$).
Los diagramas de Bode de modulo y fase de la transferencia se pueden observar en la figura 4. La deducción queda como ejercicio.

d) i)

$$H(j\frac{\omega_0}{10}) = \frac{3}{40}\frac{j\omega_0^2}{-\frac{\omega_0^2}{100} + j\frac{\omega_0^2}{10} + \omega_0^2} \approx \frac{3}{40}\frac{j}{1 + \frac{j}{10}} \approx \left|\frac{3}{40}\right| e^{j90}$$

$$H(j\omega_0) = \frac{3}{4}\frac{j\omega_0^2}{-\omega_0^2 + j\omega_0^2 + \omega_0^2} \approx \frac{3}{4} = \left|\frac{3}{4}\right| e^{j0}$$

$$H(j10\omega_0) = \frac{30}{4}\frac{j\omega_0^2}{-100\omega_0^2 + j10\omega_0^2 + \omega_0^2} \approx \frac{30}{4}\frac{j}{-100 + j10} \approx \left|\frac{3}{40}\right| e^{-j90}$$

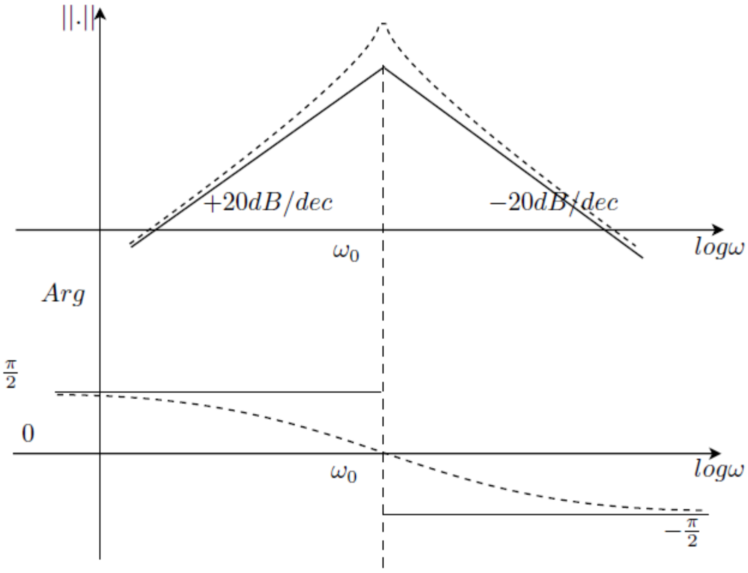


Figura 4:

ii) $I(j\omega) = \frac{V_i(j\omega)-V_N(j\omega)}{R}$, $V_N(j\omega) = \frac{16}{12}V_2(j\omega) = \frac{4}{3}H(j\omega)V_i(j\omega)$. Entonces: $I(j\omega_0) = \frac{1-\frac{4}{3}H(j\omega_0)}{R}V_i(j\omega_0)$. Como: $H(j\omega_0) = \frac{3}{4}$, resulta $I(j\omega_0) = 0$ y $S = P = Q = 0$

iii) El valor eficaz de la señal de entrada lo calculamos como la raiz cuadrada de lapotencia media:

$$V_{ef}(v_i) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{V_0^2 + V_1^2}$$

La salida del sistema en regimen resulta:

$$v_o(t) = |H(j\omega_0)|V_0cos(\omega_0 t + Arg(H(j\omega_0))) + |H(j10\omega_0)|V_1cos(10\omega_0 t + Arg(10\omega_0))$$

Por lo tanto, el valor eficaz de la señal de salida es:

$$V_{ef}(v_o) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{|H(j\omega_0)|^2V_o^2 + |H(j10\omega_0)|^2V_1^2}$$