Sistemas Lineales 1

Examen de febrero de 2013

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

a) Considere el circuito en régimen sinusoidal de la figura 1. Halle la tensión $V_o(j\omega)$ en bornes de la impedancia $Z(j\omega)$ y la corriente $I_Z(j\omega)$ por dicha impedancia.

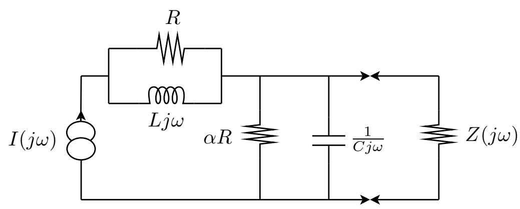


Figura 1: Circuito en régimen sinusoidal.

b) Definiendo convenientemente la tensión $V_S(j\omega)$ y la impedancia $Z_S(j\omega)$ en función de R, L, C, $I(j\omega)$ y α, mostrar que es posible imponer que la tensión en bornes y la corriente por la impedancia $Z(j\omega)$ en el circuito de la figura 2 coincidan con las calculadas en la parte anterior para el circuito de la figura 1.

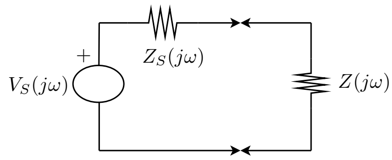


Figura 2: Circuito equivalente.

c) Para $Z(j\omega) = R + Lj\omega$, hallar la transferencia en régimen sinusoidal

$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{I(j\omega)}$$

observando la dimensiones de dicha transferencia.

d) I) Mostrar que para

$$\frac{R}{L} = \omega_0 \quad , \quad \frac{(1+\alpha)}{\alpha LC} = 100\omega_0^2$$

la transferencia anterior puede escribirse somo

$$H(j\omega) = A.\frac{(j\omega + \omega_0)}{(j\omega)^2 + \left(\omega_0 + \frac{1}{\alpha RC}\right)(j\omega) + 100\omega_0^2}$$

siendo A una constante dimensionada que depende de las componentes del circuito.

II) Hallar α real tal que

$$H(j\omega) = K.\frac{\omega_0.(j\omega + \omega_0)}{(j\omega)^2 + 29\omega_0(j\omega) + 100\omega_0^2}$$

definiendo convenientemente la constante K.

e) Deducir y bosquejar los Diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$.

f) I) ¿Qué condición debe cumplir $H(j\omega)$ para que exista una frecuencia de trabajo a la cual la respuesta del sistema esté exactamente en fase con la entrada?

II) Hallar, si existe, una frecuencia de trabajo ω_1 a la cual la respuesta del sistema está extactamente en fase con la entrada.

III) ¿Qué condición debe cumplir $H(j\omega)$ para que exista una frecuencia de trabajo a la cual la respuesta del sistema esté exactamente en cuadratura con la entrada?

IV) Hallar, si existe, una frecuencia de trabajo ω_1 a la cual la respuesta del sistema está extactamente en cuadratura con la entrada.

Problema 2

I) *a*) En el circuito de la figura 3 hallar la impedancia vista Z_{eq} en función de C, L y R

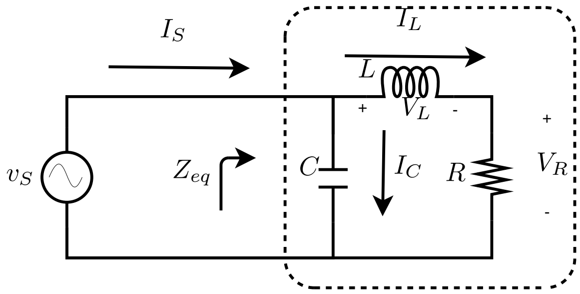


Figura 3: Circuito del problema 2

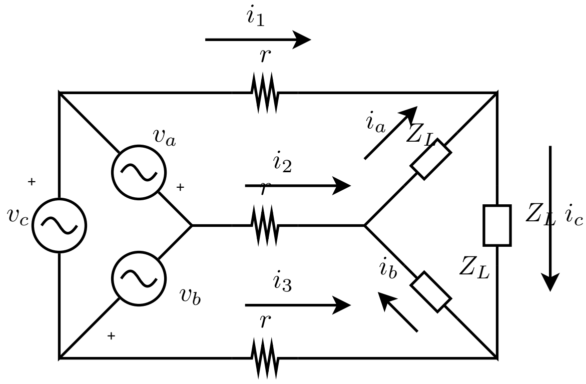


Figura 4: Circuito trifásico del problema 2

b) Conociendo los siguientes datos:

$$v_s(t) = 220V\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,(100\pi t)$$
$$R = 22\Omega \qquad L = 120mHy \qquad C = 12\mu F$$

Hallar el fasor I_S de la corriente que entrega la fuente y el fasor I_L de la corriente que circula por la bobina L. Expresar los resultados en valores eficaces.

c) Realizar un diagrama fasorial donde se representen V_S, I_S e I_L.

d) En el diagrama anterior ubicar el fasor I_C de la corriente por el condensador y los fasores V_L y V_R de los voltajes en la bobina y la resistencia respectivamente. **Verifique que se cumplan las relaciones geométricas entre los fasores**. **Justificar**

II) *a*) Calcular las potencias activa y reactiva entregadas por la fuente.

b) Compensar la potencia reactiva entregada por la fuente sin modificar el voltaje que se entrega a la carga Z_{eq}.

c) Incluir en el diagrama fasorial la corriente por el elemento de compensación.

III) En el circuito trifásico de la figura 8 cada impedancia Z_L representa una carga ya compensada como la de las partes anteriores.

Datos:

$$r = 10\Omega$$
$$v_a(t) = 220V\sqrt{2}\cos(100\pi t)$$
$$v_b(t) = 220V\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$$
$$v_c(t) = 220V\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

a) Calcular los fasores (en valores eficaces) de las corrientes i_a, i_b e i_c por las cargas Z_L.

b) Calcular $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $i_3(t)$.

c) Hallar las expresiones temporales de las corrientes **por cada una de las bobinas de las cargas**.

Sistemas Lineales 1

Examen de febrero de 2013

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

(a) Definir la derivada de una distribución.

(b) A partir de la definición, calcular la derivada del escalón $Y(t)$ como distribución.

(c) Sabiendo que $Y(t) + Y(-t) = 1$, mostrar que

$$\frac{d}{dt}Y(-t) = -\delta(t)$$

(d) Sea g una función de clase C^2, tal que $g(0) = 0$ y

$$g'' + \omega^2 g = 0$$

con $\omega > 0$. Considere la distribución $S(t) = Y(-t)g(-t)$. Mostrar que existe una constante real c tal que

$$S''(t) + \omega^2.S(t) = c\delta(t)$$

Pregunta 2

Un sistema lineal presenta la siguiente transferencia en régimen sinusoidal:

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + \omega_n^2}{(j\omega)^2 + \omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

siendo $\omega_n > 0$.

(a) Hallar los límites laterales de la función $arg(H(j\omega))$ en $\omega = \omega_n$, observando que aparece una discontinuidad.

(b) Sea una entrada genérica

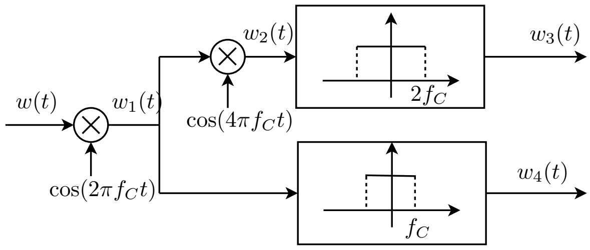
$$v_i(t) = A\cos(\omega_i t)$$

Hallar la respectiva respuesta en régimen para los siguientes valores de ω_i:

- $\omega_i = \frac{\omega_n}{2}$
- $\omega_i = \omega_n$
- $\omega_i = 10\omega_n$

Pregunta 3

Considere el sistema de modulación de la figura, cuya entrada es la señal w es banda acotada W. Los filtros pasabajos son ideales, siendo $f_C \geq 2W$.



(a) Bosqueje, justificando, los espectros de las señales w, w_1, w_2, w_3 y w_4.

(b) Si E es la energía de la señal w, hallar las energías de las señales w_3 y w_4.

Pregunta 4

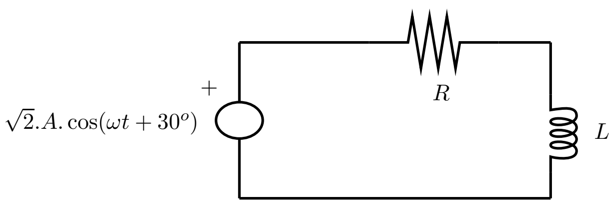


Figura 5: Circuito de la pregunta .

Se considera el circuito de la figura 5, funcionando en régimen sinusoidal a pulsación ω.

(a) Calcular la potencia reactiva que entrega la fuente, indicando si la carga es capacitiva o inductiva.

(b) Compensar la potencia reactiva que entrega la fuente, explicando cómo lo hace y calculando la componente a colocar.

(c) Una vez compensado el sistema, se duplica la frecuencia de trabajo. Calcular la potencia reactiva que entrega la fuente en esta nueva situación.

Solución

Problema 1

a) La tensión $V_o(j\omega)$ en bornes de la impedancia $Z(j\omega)$ vale

$$V_o(j\omega) = I(j\omega).\left[\frac{1}{\alpha R} + Cj\omega + \frac{1}{Z(j\omega)}\right]^{-1} = I(j\omega).\left[\frac{\alpha R Z(j\omega)}{Z(j\omega)(1+\alpha RCj\omega)+\alpha R}\right]$$

$$V_o(j\omega) = \frac{\alpha R I(j\omega)}{(1+\alpha RCj\omega)}.\left[\frac{Z(j\omega)}{Z(j\omega)+\frac{\alpha R}{(1+\alpha RCj\omega)}}\right] \tag{1}$$

La corriente por la impedancia $Z(j\omega)$ vale

$$I_Z(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{Z(j\omega)} = \frac{\alpha R I(j\omega)}{(1+\alpha RCj\omega)}.\left[\frac{1}{Z(j\omega)+\frac{\alpha R}{(1+\alpha RCj\omega)}}\right] \tag{2}$$

b) En el circuito de la figura 2, la tensión y corriente en la impedancia $Z(j\omega)$ valen

$$V'_o(j\omega) = V_S(j\omega).\frac{Z(j\omega)}{Z_S(j\omega)+Z(j\omega)} \quad , \quad I'_Z(j\omega) = V_S(j\omega).\frac{1}{Z_S(j\omega)+Z(j\omega)}$$

por lo que definiendo

$$V_S(j\omega) = \frac{\alpha R I(j\omega)}{(1+\alpha RCj\omega)} \quad , \quad Z_S(j\omega) = \frac{\alpha R}{(1+\alpha RCj\omega)}$$

se obtienen las expresiones (1) y (2).

c) Para $Z(j\omega) = R + Lj\omega$ hallaremos la transferencia $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{I(j\omega)}$. De lo anterior, sabemos que

$$V_o(j\omega) = I(j\omega).\left[\frac{\alpha R(R+Lj\omega)}{(R+Lj\omega)(1+\alpha RCj\omega)+\alpha R}\right]$$

Entonces

$$H(j\omega) = \frac{\alpha R(R+Lj\omega)}{R+Lj\omega+\alpha R^2Cj\omega+\alpha RLC(j\omega)^2+\alpha R} = \frac{\alpha R(R+Lj\omega)}{(1+\alpha)R+(L+\alpha R^2C)(j\omega)+\alpha RLC(j\omega)^2}$$

$$H(j\omega) = \frac{\alpha RL}{\alpha RLC}.\frac{\left(j\omega+\frac{R}{L}\right)}{(j\omega)^2+\left(\frac{L+\alpha R^2C}{\alpha RLC}\right)(j\omega)+\frac{(1+\alpha)R}{\alpha RLC}} = \frac{1}{C}.\frac{\left(j\omega+\frac{R}{L}\right)}{(j\omega)^2+\left(\frac{1}{\alpha RC}+\frac{R}{L}\right)(j\omega)+\frac{(1+\alpha)}{\alpha LC}}$$

Obsérvese que las dimensiones son adecuadas, ya que la transferencia se corresponde con una impedancia.

d)
i) Para $\frac{R}{L} = \omega_0$ y $\frac{(1+\alpha)}{\alpha LC} = 100\omega_0^2$,

$$\frac{1}{C} = \frac{(1+\alpha)}{\alpha LC}.\frac{L}{R}.\frac{\alpha}{(1+\alpha)} = 100\omega_0^2.\frac{1}{\omega_0}.\frac{\alpha}{(1+\alpha)} = \frac{\alpha 100\omega_0}{(1+\alpha)}$$

$$\frac{1}{\alpha RC} = \frac{L}{R}.\frac{(1+\alpha)}{\alpha LC}.\frac{1}{(1+\alpha)} = \frac{1}{\omega_0},100\omega_0^2.\frac{1}{(1+\alpha)} = \frac{100\omega_0}{(1+\alpha)}$$

$$H(j\omega) = \frac{\alpha RL}{\alpha RLC}.\frac{\left(j\omega+\frac{R}{L}\right)}{(j\omega)^2+\left(\frac{L+\alpha R^2C}{\alpha RLC}\right)(j\omega)+\frac{(1+\alpha)R}{\alpha RLC}} = \frac{1}{C}.\frac{\left(j\omega+\frac{R}{L}\right)}{(j\omega)^2+\left(\frac{1}{\alpha RC}+\frac{R}{L}\right)(j\omega)+\frac{(1+\alpha)}{\alpha LC}}$$

$$H(j\omega) = \frac{100\alpha}{(1+\alpha)}.\frac{\omega_0\left(j\omega+\omega_0\right)}{(j\omega)^2+\left(\frac{100}{(1+\alpha)}+1\right)\omega_0(j\omega)+100\omega_0^2}$$

ii) Se debe cumplir que

$$\frac{100}{(1+\alpha)} + 1 = 29 \Rightarrow \frac{100}{(1+\alpha)} = 28 \Rightarrow 100 = 28 + 28\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{72}{28} = \frac{18}{7}$$

e) Deducimos los Diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase, haciendo un análisis por bandas de frecuencia. La transferencia toma la forma

$$H(j\omega) = K.\frac{\omega_0\,(j\omega+\omega_0)}{(j\omega)^2 + 29\omega_0(j\omega) + 100\omega_0^2} = K.\frac{\omega_0\,(j\omega+\omega_0)}{(j\omega+4\omega_0)(j\omega+25\omega_0)} \quad , \quad K = \frac{100\alpha}{(1+\alpha)} > 0$$

y las frecuencias críticas ω_0, $4\omega_0$ y $10\omega_0$. Entonces

$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \approx K.\frac{\omega_0\,(\omega_0)}{(4\omega_0)(25\omega_0)} = \frac{K}{100} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 20\log(K) - 40\,db \\ arg(H) & \approx & 0 \end{cases}$$

$$\omega_0 \ll \omega \ll 4\omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \approx K\frac{\omega_0\,(\omega)}{(4\omega_0)(25\omega_0)} = K.\frac{j\omega}{100\omega_0} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 20\log(K/100\omega_0) + 20\log(\omega)\,db \\ arg(H) & \approx & \frac{\pi}{2}\,(-\frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

$$4\omega_0 \ll \omega \ll 25\omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \approx K.\frac{\omega_0\,(j\omega)}{(j\omega)(25\omega_0)} = \frac{K}{25} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 20\log(K/25)\,db \\ arg(H) & \approx & 0\,(\pm 2\pi) \end{cases}$$

$$25\omega_0 \ll \omega \Rightarrow H(j\omega) \approx K.\frac{\omega_0\,(j\omega)}{(j\omega)(j\omega)} = \frac{K\omega_0}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & 20\log(K\omega_0) - 20\log(\omega)\,db \\ arg(H) & \approx & -\frac{\pi}{2}\,(+\frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

La figura 6 muestra los Diagramas de Bode reales y asintóticos de $H(j\omega)$.

f) Sabemos que para una entrada sinusoidal $i(t) = I\cos(\omega_i t)$, la respectiva respuesta en régimen es

$$v_o(t) = I|H(j\omega_i)|\cos\left[\omega_i t + arg(H(j\omega_i))\right]$$

i) Para que exista una frecuencia de trabajo a la cual la respuesta en régimen esté en fase con la entrada, se debe cumplir que la función de transferencia en régimen tome un valor real positivo o, lo que es lo mismo, el Diagrama de Bode real de fase tiene que pasar por el valor 0 (módulo 2π).

ii) Observando el Diagrama de Bode ásintótico de fase, y considerando la continuidad de la función $arg(H(j\omega))$, podemos afirmar que existe una frecuencia de trabajo a la cual la función anterior toma el valor 0. Como las frecuencias críticas no están muy separadas entre sí -menos de una década- la aproximacion asintótica es muy mala y no permite sacar una conclusión válida sobre cuál será esta frecuencia. En la figura 6 se muestra también el Diagrama de Bode real de fase, del cual puede estimarse la frecuencia buscada.

iii) Para que exista una frecuencia de trabajo a la cual la respuesta en régimen esté en cuadratura con la entrada, se debe cumplir que la función de transferencia en régimen tome uno de los siguientes valores: $\pm\frac{\pi}{2}$ (módulo 2π).

iv) Nuevamente observando el Diagrama de Bode asintótico de fase, y considerando precisamente el carácter asintótico del mismo, vemos que no hay ninguna frecuencia de trabajo a la cual la función de transferencia tome un valor con argumento múltiplo entero de $\frac{\pi}{2}$. Sin embargo, podemos afirmar que para bajas y altas frecuencias de trabajo, las respuestas estarán *prácticamente* en cuadratura con la entrada.

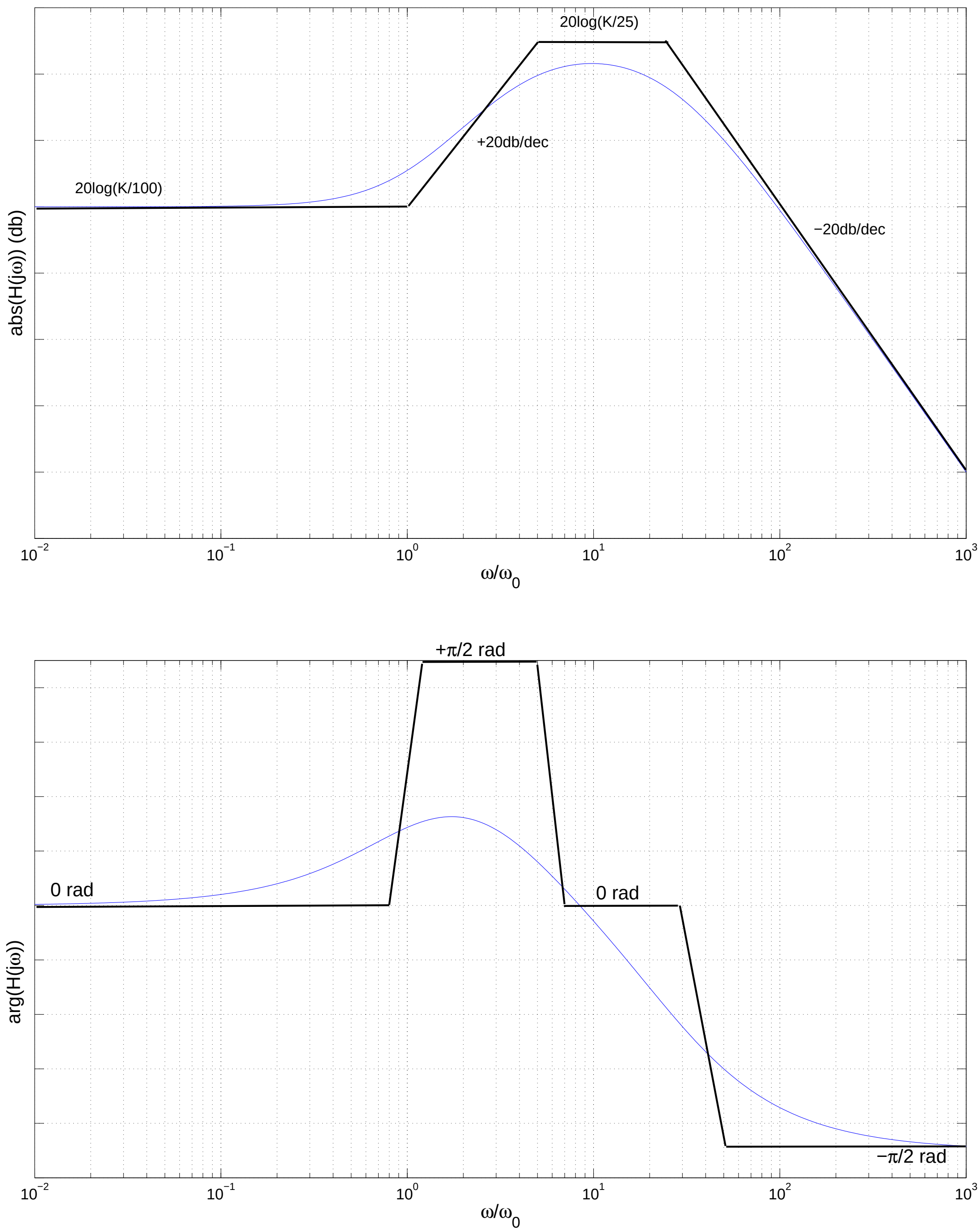


Figura 6: Diagramas de Bode real y asintótico del Problema 1.

Problema 2

I) *a*)

$$Z_{eq} = \frac{1}{Cj\omega} \parallel (Lj\omega + R) = \frac{1}{Cj\omega + \frac{1}{Lj\omega + R}} \tag{3}$$

$$= \frac{Lj\omega + R}{LC(j\omega)^2 + RCj\omega + 1} \tag{4}$$

b) Conociendo los siguientes datos:

$$v_s(t) = 220V\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\left(100\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$$
$$R = 22\Omega \qquad L = 120mHy \qquad C = 12\mu F$$

Hallar el fasor I_S de la corriente que entrega la fuente y el fasor I_L de la corriente que circula por la bobina L. Expresar los resulados en valores eficaces.

Sustituyendo los valores en la fórmula 4: $Z_{eq} = (29{,}6 + 41{,}1j)\Omega$

$I_S = \frac{V_S}{Z_{eq}} = (2{,}54 - 3{,}52j)A = 4{,}34A\measuredangle{-54^o}$ $I_L = \frac{V_S}{Lj\omega+R} = (2{,}54 - 4{,}35j)A = 5{,}04A\measuredangle{-60^o}$

c) Realizar un diagrama fasorial donde se representen V_S, I_S e I_L. En la figura 7 se representan los fasores pedidos.

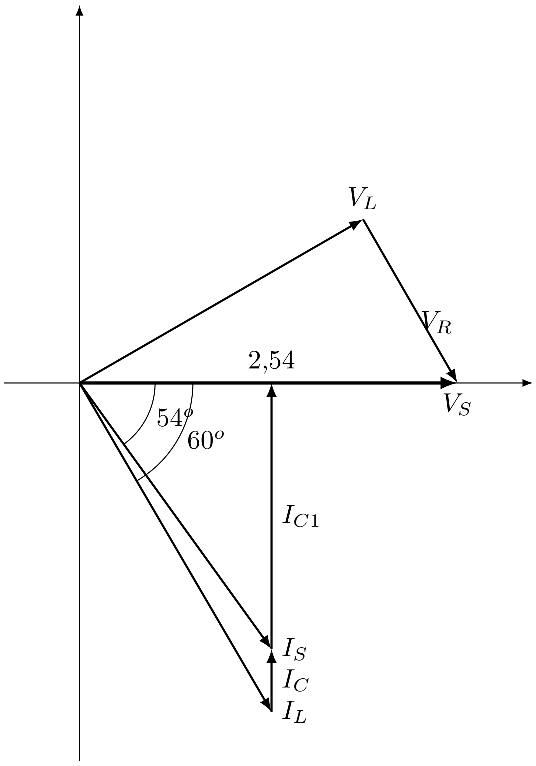


Figura 7: Diagrama fasorial del ejercicio 2

d) En el diagrama anterior ubicar el fasor I_C de la corriente por el condensador y los fasores V_L y V_R de los voltajes en la bobina y la resistencia respectivamente. **Verifique que se cumplan las relaciones geométricas entre los fasores**. **Justificar**

I_C es la diferencia entre I_S e I_L, es importante notar dos cosas aquí, I_C debe ser vertical ($\perp$ a V_S) y por el mismo motivo la proyección sobre el eje real de I_S e I_L debe ser la misma.

Para ubicar a V_L y V_R usamos que se cumple lo siguiente $V_R \parallel I_S \perp V_L$ y que $V_L + V_R = IS$. Por lo tanto el extremo del fasor V_L está ubicado en la intersection de la recta perpendicular (adelantada) a I_L que pasa por el origen, con la recta paralela a I_S que pasa por el extremo de V_S. Luego V_R es el fasor que va de V_L a V_S.

II) *a*) Calcular las potencias activa y reactiva entregadas por la fuente.

$$S = V_S \times \overline{I_S} = (559 + 775j)VA$$

de donde: $P = 559W$ y $Q = 775VAR$

b) Compensar la potencia reactiva entregada por la fuente sin modificar el voltaje que se entrega a la carga.

Para no modificar el voltaje entregado a la carga debemos colocar un elemento en paralelo. Para compensar la reactiva debemos colocar un elemento que contrarreste la parte imaginaria de la corriente que entrega la fuente, para que la corriente total sea real (colineal con V_S). Como la carga es inductiva además hay que compensar con un condensador. La corriente que entregue el condensador debe ser $I_{C1} = -jIm(Is) = 3{,}52jA = V_S C_1 j\omega$. Donde C_1 es la capacitancia del condensador que queremos colocar.

Despejando: $C_1 = \dfrac{3{,}52}{100\pi \times 220} = 50{,}9\mu F$

c) Incluir en el diagrama fasorial la corriente por el elemento de compensación.

Claramente la corriente por el elemento de compensación es vertical (imaginaria pura), además de que sumada a I_S debe dar real. Se dibuja en la figura 7

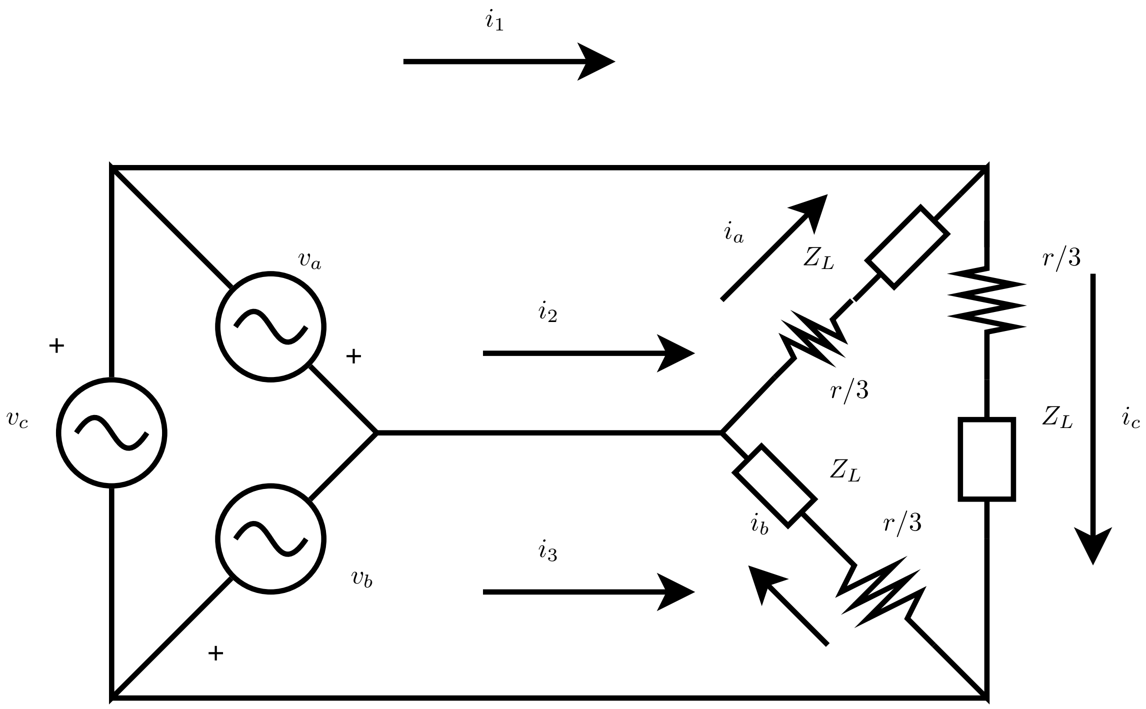


Figura 8: Circuito trifásico del ejercicio 2.

III) Datos:

$$
\begin{aligned}
r =& 10\Omega \\
v_a(t) =& 220V\sqrt{2}\cos(100\pi t) \\
v_b(t) =& 220V\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) \\
v_c(t) =& 220V\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - \frac{4\pi}{3}\right)
\end{aligned}
$$

a) Calcular los fasores (en valores eficaces) de las corrientes por las cargas i_a, i_b e i_c.

Como las cargas están compensadas son puramente resistivas. La resistencia equivalente sería el cociente entre el voltaje de la fuente y la corriente ya compensada, que es la parte real de I_S.

$Z_L = 220V/2{,}54A = 86,6\Omega$

Transfigurando las cargas de triángulo a estrella, estas nos quedan divididas entre 3 y en serie con r, luego si hacemos una transfiguración estrella triángulo del total, nos queda un sistema de cargas en triángulo en paralelo con el sistema de fuentes, donde la carga se vuelve a multiplicar por tres y queda igual y r se divide entre tres. El sistema se puede representar por el equivalente de la figura 8

Las corrientes $i_{1,2,3}$ son las mismas en el equivalente que en el original, por lo tanto también deben serlo i_a, i_b e i_c.

$$I_{a,b,c} = \frac{V_{a,b,c}}{\frac{r}{3} + Z_L} = \frac{220V}{89{,}9\Omega} \measuredangle \arg(V_{a,b,c}) = 2{,}45A \measuredangle \arg(V_{a,b,c})$$

$$\begin{aligned} I_a =& 2{,}45A \\ I_b =& 2{,}45A \measuredangle -120^o \\ I_b =& 2{,}45A \measuredangle -240^o \end{aligned}$$

b) Calcular $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $i_3(t)$. $I_1 = I_c - I_a$, $I_2 = I_a - I_b$, $I_3 = I_b - I_c$. $|I_{1,2,3}| = |I_{a,b,c}\sqrt{3} = 2{,}45A\sqrt{3} = 1{,}41A$

$$I_1 = 1{,}41A \measuredangle 150^o \qquad i_1(t) = 1{,}99A \cos\left(100\pi t + \frac{5\pi}{6}\right) \tag{5}$$

$$I_2 = 1{,}41A \measuredangle 30^o \qquad i_2(t) = 1{,}99A \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \tag{6}$$

$$I_3 = 1{,}41A \measuredangle -90^o \qquad i_3(t) = 1{,}99A \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \tag{7}$$

c) Hallar las expresiones temporales de las corrientes por cada una de las bobinas de las cargas.

Las corrientes por las bobinas se pueden obtener a partir del voltaje en bornes de las cargas, el cual sale fácilmente de aplicar divisor de voltaje. La corriente I_{La} por la bobina de la fase a será igual que en la parte a, pero ajustando el voltaje por el divisor (la corriente se multiplicará por el mismo factor ya que es proporcional a la fuente), las demás salen de rotarla 120 y 240 grados.

$I_{La} = \frac{Z_L}{\frac{r}{3}+Z_L} I_L = \frac{86{,}6}{89{,}9} I_L = 0{,}96 I_L$, donde I_L es la misma de la parte a.

$I_{La} = 0{,}96 \times 5{,}04A \measuredangle -60^o = 4{,}84A \measuredangle -60^o$

Pasando al tiempo y retrasando las otras corrientes:

$$i_{La}(t) = 6,84A \cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \tag{8}$$

$$i_{Lb}(t) = 6,84A \cos\left(100\pi t - \pi\right) \tag{9}$$

$$i_{Lc}(t) = 6,84A \cos\left(100\pi t - \frac{5\pi}{3}\right) \tag{10}$$