Sistemas Lineales 1

Examen de febrero de 2011

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

Considere el circuito trifásico mostrado en la figura 1, donde el sistema de fuentes es perfecto y los valores **eficaces** de tensión son $220V$. Se alimenta un sistema de cargas idénticas, que consumen al sistema de fuentes una potencia activa de $30kW$ y presentan un factor de potencia $(\cos(\varphi))$ de 0,85.

(a) I) Dibuje el circuito equivalente monofásico.

II) Calcule la resistencia R y la reactancia X para el modelo en paralelo adoptado para la carga.

III) Realice un diagrama fasorial que contenga la tensión y corriente por las fuentes y las corrientes I_R e I_X por la resistencia y la reactancia respectivamente.

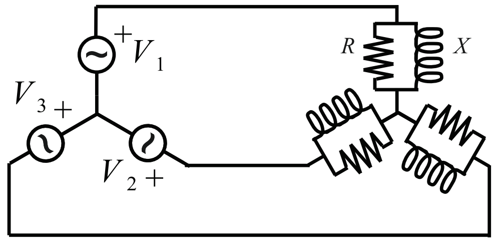


Figura 1:

De aquí en adelante se adopta un modelo más realista para las líneas y se considerará que las mismas presentan una resistencia $R_L = 5\,\Omega$, como se muestra en la figura 2.

(b) I) Calcule la potencia activa consumida por las cargas.

II) Calcule la potencia activa disipada en las líneas.

III) Calcule la eficiencia del sistema definido como el cociente entre la potencia activa consumida por las cargas y la potencia activa entregada por el sistema de fuentes: $\eta = \dfrac{P_{cargas}}{P_{fuentes}}$

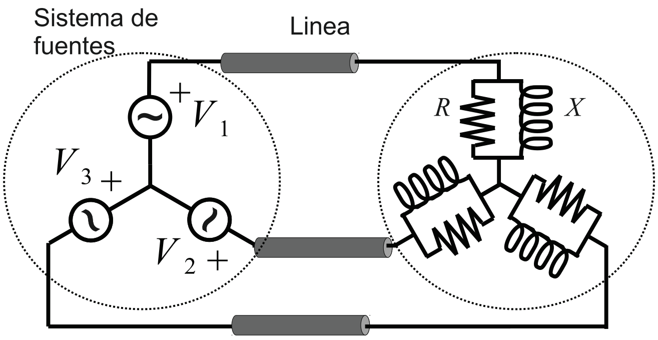


Figura 2:

Para mejorar la eficiencia del sistema se propone alimentar las cargas con un sistema de fuentes de media tensión utilizando un transformador trifásico ideal como se muestra en la figura 3. El sistema de fuentes es perfecto y presenta una tensión de $3{,}8kV$ (eficaces). El transformador presenta una relación de vueltas $n_1/n_2 = 10$.

(c) I) Indique qué elementos colocaría, y de qué valor, para compensar la potencia reactiva consumida a las fuentes. Realice un dibujo donde se muestre el esquema de conexión.

DE AQUÍ EN ADELANTE TRABAJE EN LAS CONDICIONES DE LA PARTE ANTERIOR. Es decir, la potencia reactiva estará compensada.

II) Calcule nuevamente η (definida en la parte (b)) y compare dicho resultado con el obtenido en el caso anterior. Analice las diferencias entre uno y otro caso, justificando.

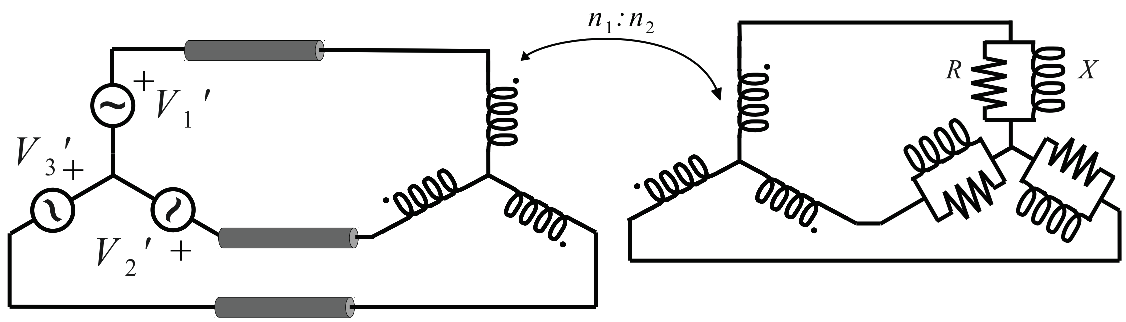


Figura 3:

Problema 2

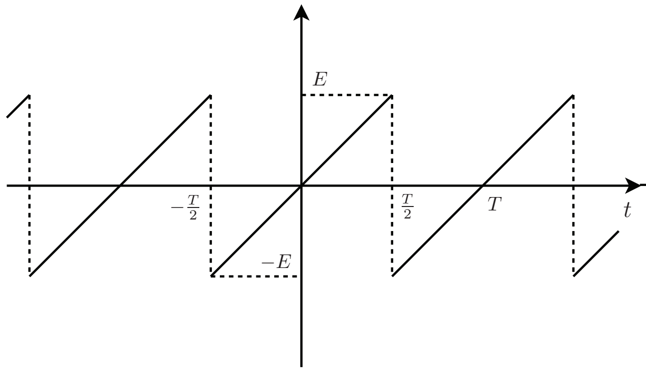


Figura 4: Diente de sierra

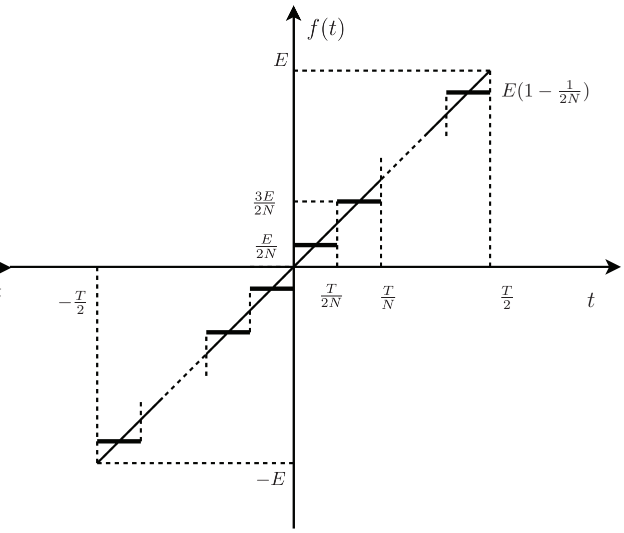


Figura 5: Aproximación discreta del diente de sierra

(a) I) Halle los coeficientes de Fourier del diente de sierra de la figura 4.

II) Determine la diferencia $d(t)$ entre el diente de sierra de la figura 4 y la función f de la figura 5, periódica de periodo T. Exprese $d(t)$ gráficamente, verificando que es un diente de sierra. Hallar su pendiente y su periodo.

III) Halle los coeficientes de Fourier de $d(t)$.

IV) Dibuje en una misma gráfica los espectros del diente de sierra de la figura 4 y de $d(t)$.

V) Halle los coeficientes de Fourier de la función $f(t)$ de la figura 5 y agregue esta información a la gráfica realizada en la parte anterior.

(b)

I) Para el circuito de la figura 6, halle la transferencia $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$

II) Sabiendo que se cumplen las relaciones $L_1 = \frac{3}{2}\frac{R}{\omega_C}$, $L_2 = \frac{1}{2}\frac{R}{\omega_C}$ y $C = \frac{4}{3\,R\,\omega_C}$, verifique que todas las raíces de $H(j\omega)$ tienen módulo ω_C

III) Realice los diagramas de Bode de $H(j\omega)$

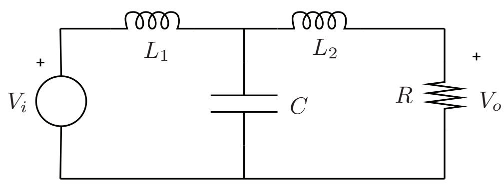


Figura 6: Circuito del Problema 2 - parte (b)

(c) Bosqueje el espectro de $v_o(t)$ si $v_i(t)$ es una entrada como la función $f(t)$ de la figura 5, para $N = 3$ y $\omega_C = \frac{2\pi}{T}$

Sistemas Lineales 1

Examen de febrero de 2011

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

(a) Sea $T(t) = e^{2t}\delta'(t) \in \mathcal{D}'$. Hallar las condiciones que debe cumplir una función $\varphi \in \mathcal{D}$ para asegurar que $< T, \varphi >= 0$.

(b) Mostrar que T se puede escribir como una combinación lineal de δ y δ'.

(c) Calcular $< T(t-1), \varphi(t) >$, siendo $\varphi \in \mathcal{D}'$.

Pregunta 2

Se considera un sistema **funcionando en régimen sinusoidal**, en el que una fuente de tensión sinusoidal alimenta un motor, que puede modelarse como una impedancia inductiva $Z = R + jX$. Muestre que, colocando una componente lineal de manera adecuada, siempre es posible compensar la potencia reactiva que entrega la fuente sin alterar la potencia activa consumida por el motor.

Pregunta 3

Se considera la transferencia en régimen $H(j\omega) = \frac{10\omega_0^2}{(j\omega+\omega_0)^2}$. Se pide

a) Deducir y dibujar el Diagrama asintótico de Bode de módulo de $H(j\omega)$.

b) Calcular la distancia entre el Diagrama de Bode asintótico de módulo y el Diagrama real, para las siguientes frecuencias: ω_0, $\omega_0/2$, $2\omega_0$. **Expresarlas en decibeles**.

Pregunta 4

Mostrar que en una banda de baja frecuencias, un filtro pasabajos de primer orden no introduce distorsión apreciable ni en amplitud ni en fase.

Solución

Problema 1

(a) I) El circuito equivalente monofásico será:

II) La potencia activa consumida por fase será $10kw = \frac{V^2}{R}$. Entonces despejando obtenemos:

$$\boxed{R = 4{,}84\Omega}$$

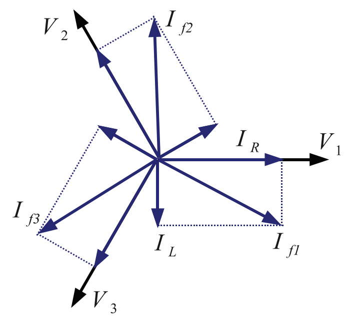
Por otro lado, como la carga presenta un factor de potencia inductivo de valor 0,85, podemos calcular la potencia reactiva consumida por fase como:

$$Q = P\,tg(acos(0{,}85))$$

Luego obtenemos la reactancia en paralelo utilizando $Q = \frac{V^2}{X}$,

$$\Rightarrow \quad \boxed{X = 7{,}85\Omega}$$

III) El diagrama fasorial para el circuito que estamos estudiando será de la forma:



(b) Ahora asumiremos que las líneas presentan pérdidas. Para este modelo se representara a la linea mediante una resistencia de 5Ω.

I) En primer lugar, planteamos el divisor de tensión donde llamaremos Z_e a la impedancia equivalente para la carga, Z_e se puede calcular simplemente tomando el paralelo de la resistencia y reactancia calculadas en la parte anterior.

$$V_a = 220V \frac{Z_e}{Z_e + R_{linea}}$$

Luego, obtenemos la potencia activa consumida por fase en el nuevo esquema de conexión:

$$P_{fase} = \frac{|V_a|^2}{R} = 2{,}28kW \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{cargas} = 3 \times 2{,}28kW}$$

II) Para calcular la potencia disipada en las líneas, calculamos

$$P_{linea} = \frac{|V - V_a|^2}{R_{linea}} = 3{,}05kW \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{lineas} = 3 \times 3{,}05kW}$$

III) Para los valores de potencia activa consumida por la carga y potencia activa disipada en las líneas, calculamos la eficiencia definida en el problema como:

$$\eta = \frac{P_{cargas}}{P_{fuentes}} = \frac{P_{cargas}}{P_{cargas} + P_{lineas}} = 43\,\%$$

El valor de η obtenido indica que más de la mitad de la potencia entregada por las fuentes se está *perdiendo* en las líneas en lugar de ser utilizada por las cargas que se desea alimentar.

(c) I) Para compensar la potencia reactiva consumida por la carga colocamos un condensador que consuma la cantidad opuesta de potencia reactiva. La compensación la podemos realizar incluso trabajando en el equivalente monofasico obtenido en la parte (a) para simplificar un poco los cálculos. Anulando la potencia reactiva total consumida mediante un condensador en paralelo a la resistencia de cada fase obtenemos[a]:

$$\boxed{C = 0{,}41\mu F}$$

II) Trabajando del lado del primario como se muestra en la figura 7 calculamos nuevamente la potencia consumida por las cargas y la potencia disipada en las líneas: Si se compara

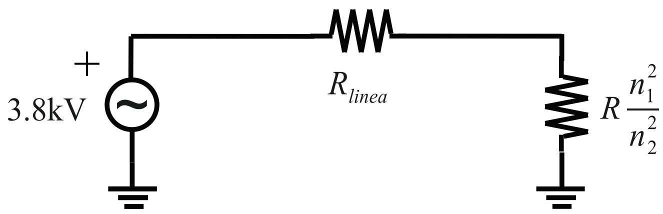


Figura 7:

$$P_{cargas} = 3 \times 29{,}7kW$$

$$P_{lineas} = 3 \times 12{,}3W$$

Entonces obtenemos para el nuevo esquema de alimentación una eficiencia de,

$$\boxed{\eta = 99{,}96\,\%}$$

la eficiencia calculada en (b) con la obtenida en esta parte, se puede observar que la potencia que entregan las fuentes se utiliza de manera mucha más eficiente en el nuevo esquema de alimentación. La proporción de la potencia *perdida* en las lineas comparada con la utilizada en las cargas es mucho menor en este segundo esquema. El aumento en la eficiencia del sistema se debe fundamentalmente a dos razones, en primer lugar la compensación de la potencia reactiva permite que la carga consuma la misma cantidad de potencia activa pero tomando de las fuentes una corriente de menor modulo, esto disminuye las pérdidas en las lineas (recordemos que estas crecen como el cuadrado de la corriente que circula por las mismas). La segunda razón por la que aumenta al eficiencia del sistema es por la utilización de una transformador de media a baja tensión, si observamos las corrientes por las lineas, podemos ver que son 10 veces más chicas del lado del primario que del secundario lo que desemboca en menos pérdidas en la resistencia de las líneas.

Problema 2

[a]recordar que se trabaja a frecuencia angular $\omega = 2\pi 50 \frac{rad}{s}$

Problema 2

1. *a*) Hallar los coeficientes de Fourier del diente de sierra de la figura 1

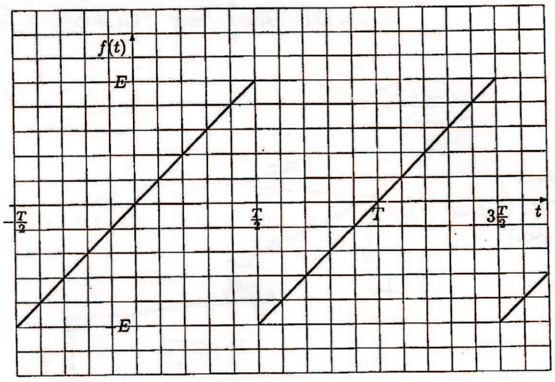


Figura 1: Diente de sierra

   b) Determine la diferencia $d(t)$ entre el diente de sierra de la figura 1 y la función f de la figura 2. Exprese $d(t)$ gráficamente.

   c) Halle los coeficientes de Fourier de $d(t)$.

   d) Halle los coeficientes de Fourier de la función $f(t)$ de la figura 2.

   e) Dibuje en una misma gráfica los espectros del diente de sierra de la figura 1, de la función $f(t)$ de la figura 2 y de la diferencia $d(t)$

2. *a*) Para el circuito de la figura 3, halle la transferencia $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i j\omega)}$

   b) Sabiendo que se cumplen las relaciones $L_1 = \frac{3}{2}\frac{R}{\omega_C}$, $L_2 = \frac{1}{2}\frac{R}{\omega_C}$ y $C = \frac{4}{3 R\omega_C}$, verifique que todas las raíces de $H(j\omega)$ tienen módulo ω_C

   c) Realice los diagramas de Bode de $H(j\omega)$

3. Bosqueje el espectro de $v_o(t)$ si $v_i(t)$ es una entrada como la función $f(t)$ de la figura 2, para $N = 3$ y $\omega_C = \frac{2\pi}{T}$

Solución problema 2

1. *a*) Es claro que el valor medio de la señal es nulo o sea $c_0 = 0$. Los restantes coeficientes los podemos obtener derivando dos veces como

K/11

Q2

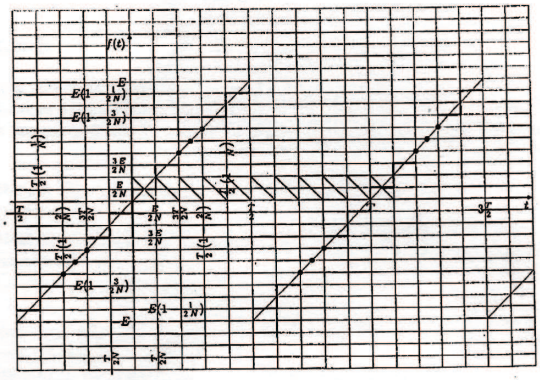


Figura 2: aproximación discreta del diente de sierra

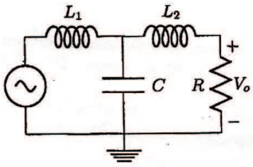


Figura 3: Circuito del problema 1

distribución.

La derivada segunda vista en un período es $f''(t) = -2E\delta'(t-\frac{T}{2})$.

$$(j\,n\,\omega_o)^2\,c_n = c_n(f'') = -2E < \delta'(t-\frac{T}{2}), e^{j\,n\,\omega_0 t} >= 2\,E\,j\,n\,\omega_0(-1)^n$$

O sea $c_n = (-1)^n \frac{T\,E}{j\,n\,\pi}$, para $n \neq 0$ y donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

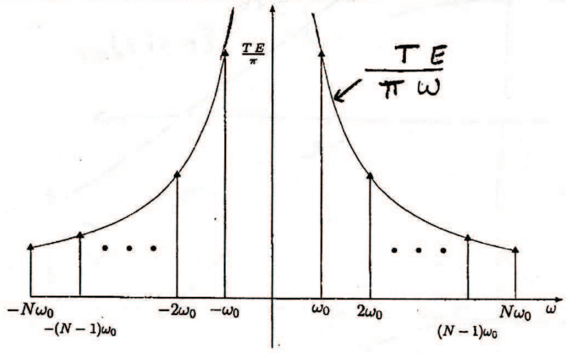
b) Haciendo gráficamente la diferencia es fácil ver que es un diente de sierra de pendiente negativa $-\frac{2E}{T}$, y período $\frac{T}{N}$, $d(t)$ se muestra en rojo en la figura 2

c) $d(t)$ es como el diente de sierra de la parte $1a$, pero desfasado medio período y de altura $\frac{E}{N}$, en las frecuencias múltiplos de $N\,\omega_0$ $c_n[d] = \frac{T\,E}{N\,j\,n\,\pi}$

10/11

92

d) Los espectros coinciden, lo cual se marca en rojo.



e) $f(t) = diente(t) - d(t)$, Para los no múltiplos de N los coeficientes de Fourier de $f(t)$ coinciden con los del diente, para los múltiplos de N es la resta, a su vez los múltiplos pares de N darán 0 porque se cancelan y los múltiplos impares se duplican.

$$c_n f = \begin{cases} 0 & ,n = 2\,k\,N \\ 2 * c_n & ,n = (2\,k+1)N \\ c_n & ,\text{en otro caso} \end{cases}$$

2. *a)*

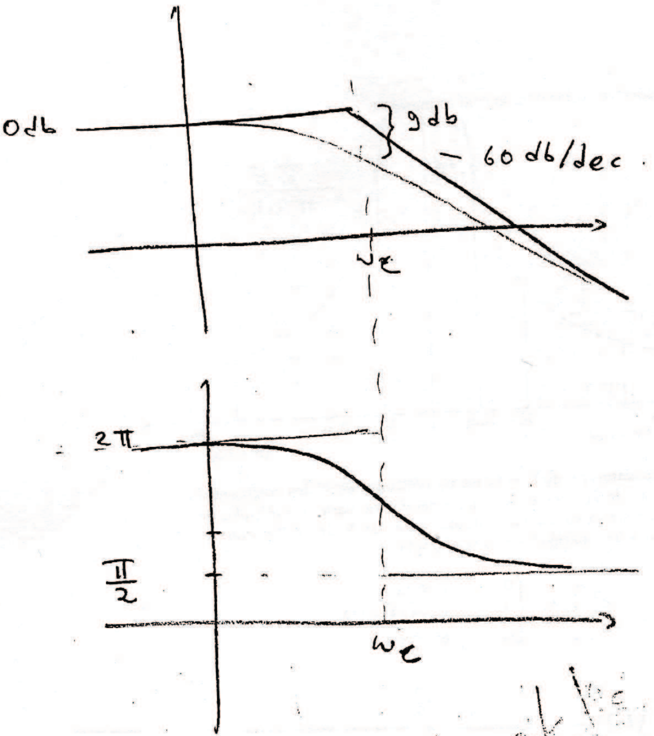
$$H(j\omega) = \frac{R}{L_1 L_2 C (j\omega)^3 + L_2 C R (j\omega)^2 + (L_2 + L_1) j\omega + R}$$

b)
$$H(j\omega) = \frac{\omega_c^3}{(j\omega)^3 + 2\,\omega_c (j\omega)^2 + 2\,\omega_c^2 j\omega + \omega_c^3}$$

$$= \frac{\omega_c}{(j\omega + \omega_c)^3}.$$

c)

c). Diagramas de Bode.



3)