Sistemas Lineales 1

Examen Febrero del 2010

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

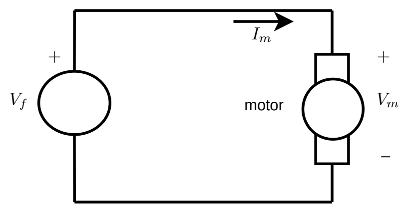


Figura 1:

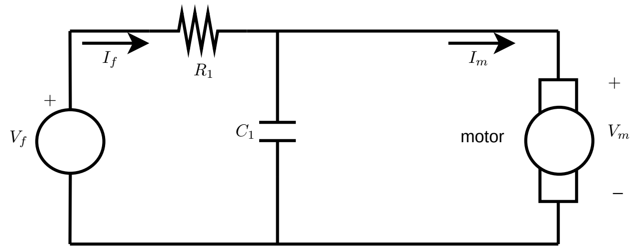


Figura 2:

(a) Se pretende excitar un motor eléctrico a través de un circuito alimentado por una fuente sinusoidal. **El motor se modela como la serie de una resistencia R_S y una inductancia** L_S. Para determinar los valores de R_S y L_S, se realiza el ensayo mostrado en la figura 1, en el que la fuente es sinusoidal, de 220 V eficaces y 50 Hz, obteniéndose los siguientes consumos de corriente y potencia:

$$I = 6,1A \ eficaces \quad , \quad P = 1KW$$

Se pide determinar los valores de R_S y L_S.

(b) Con el modelo del motor hallado en la parte anterior, se pide hallar la transferencia en régimen del circuito de la figura 2, tomando como entrada la tensión de la fuente sinusoidal y como salida la tensión en bornes del motor: $H(j\omega) = \frac{V_m(j\omega)}{V_f(j\omega)}$

(c) Simplificar la expresión de $H(j\omega)$ hallada, sabiendo que

$$\frac{R_S}{L_S} = \omega_0 \quad , \quad \frac{1}{R_1 C_1} = 1099\omega_0$$

y encontrar $K > 0$ y una relación entre R_1 y R_S tal que se cumpla que

$$H(j\omega) = K.\frac{\omega_0.(j\omega + \omega_0)}{(j\omega + 100\omega_0).(j\omega + 1000\omega_0)}$$

(d) Realizar los Diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$, explicando claramente su construcción. Bosquejar también el Diagrama real de módulo.

(e)
- ¿Existe una frecuencia de trabajo ω_1 a la cual el sistema no introduce ni ganancia ni atenuación? En caso de existir, hallarla exactamente.
- Hallar la atenuación exacta que el sistema introduce a cuatro décadas por encima de ω_0.
- ¿Existe una frecuencia de trabajo ω_2 a la cual la salida en régimen esté en fase con la entrada? En caso de existir, hallarla.
- Se sabe que cuando se inyecta en el sistema una señal sinusoidal de pulsación ω_3, mayor que $100\omega_0$, y amplitud $10V$, la salida en régimen presenta una atenuación de 20 decibeles. Indicar la amplitud de dicha salida y hallar aproximadamente ω_3.

Justifique las aproximaciones que realice!!!!.

Problema 2

En la Figura 3 se muestra un transformador[a] **ideal**, donde V_1 es la tensión en el primario y V_2 la tension en el secundario.

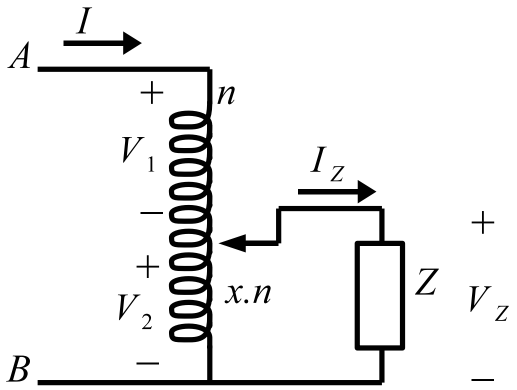


Figura 3:

La cantidad de vueltas que queda en el lado primario y secundario se puede cambiar moviendo el borne que se indica con una flecha. El número total de vueltas de la bobina es n. Definimos el parámetro $x \in [0, 1]$, tal que $n\,x$ es el número de vueltas en el secundario (y como se ve en la figura $n(1-x)$ el número de vueltas en el primario respectivamente). En bornes del secundario, se coloca una impedancia Z.

(a)
- I) Calcular la impedancia vista Z_{AB} entre A y B.
- II) Demostrar que si colocamos una fuente entre A y B, la potencia aparente entregada por la fuente coincide con la potencia consumida por la impedancia Z.

El circuito de la parte anterior, se utiliza en un sistema trifásico, como se muestra en la Figura 4. **Considere $Z = R_v + jL_0\omega$, donde $L_0 \leq L_1$ es fijo y R_v es una resistencia variable.**

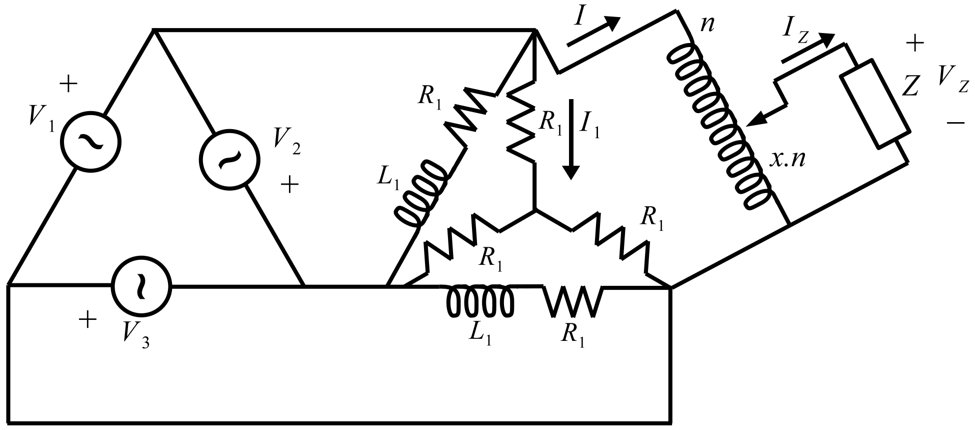


Figura 4:

(b) Calcular R_v y x (en función de R_1, L_1 y L_0) para tener un sistema equilibrado perfecto.

De ahora en adelante suponga que se cumplen las condiciones de la parte anterior. Y además:

$$V_1 = 220V \text{ eficaces}, \quad R_1 = 100\Omega, \quad L_1\omega = 100\Omega, \quad L_0\omega = 50\Omega \;\text{ y } \omega = 2\pi 50Hz$$

(c)
- I) Calcular los fasores I_1, I e I_Z que se indican en la Figura 4
- II) Realizar un diagrama fasorial que contenga a los fasores antes mencionados y a las tensiones V_1, V_2, V_3 y V_Z

(d)
- I) Calcular la potencia reactiva consumida al sistema de fuentes.
- II) Indicar qué elementos colocaría y de qué valor, para compensar la potencia reactiva que se consume a las fuentes. Realizar un esquema donde se muestre la conexión.

[a]este tipo de conexión entre el primario y el secundario se la conoce como *Autotransformador*

Sistemas Lineales 1

Examen Diciembre del 2009

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

a) Enunciar el Teorema de Parseval para funciones cuadrático-integrables.

b) Consideremos el sistema de procesamiento de señales que se muestra en la figura 5. La señal de entrada $x(t)$ es de banda acotada W. Las señales sinusoidales son de frecuencia $f_C = 10W$. El filtro pasabajos es ideal, de frecuencia de corte f_C. Hallar la relación exacta entre la energía de la entrada y la de la salida.

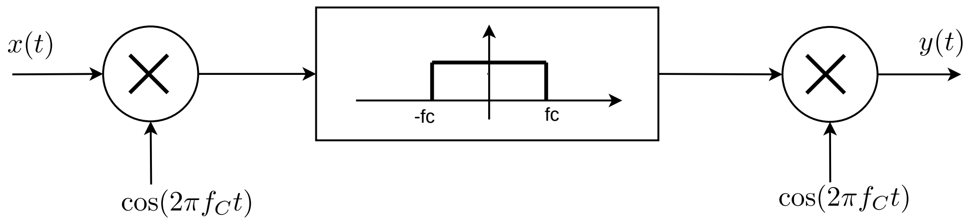


Figura 5: Sistema de procesamiento de señales

Pregunta 2

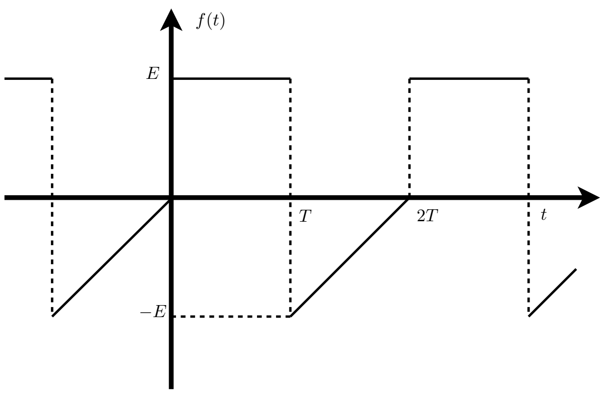


Figura 6: Señal periódica

Consideremos la señal periódica $f(t)$ que se muestra en la figura 6.

a) Halle la derivada segunda como distribución T''_f.

b) Halle los coeficientes de Fourier de T''_f, que denotaremos $c_n(T''_f)$.

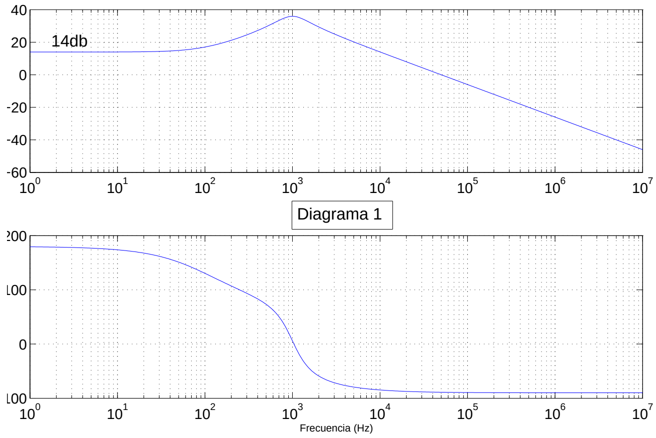
c) Halle los coeficientes de Fourier de $f(t)$, que denotaremos $c_n(f)$.

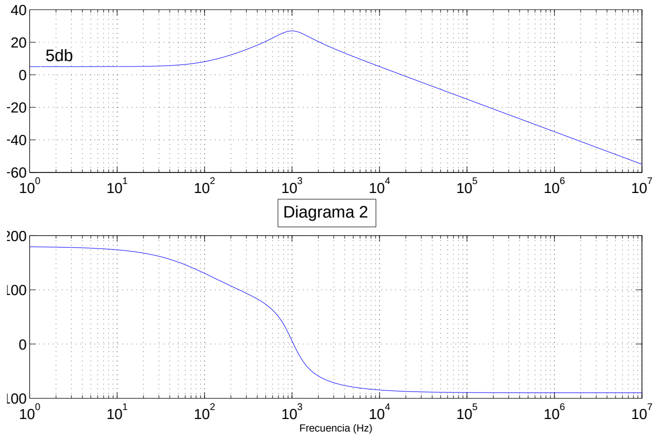
Pregunta 3

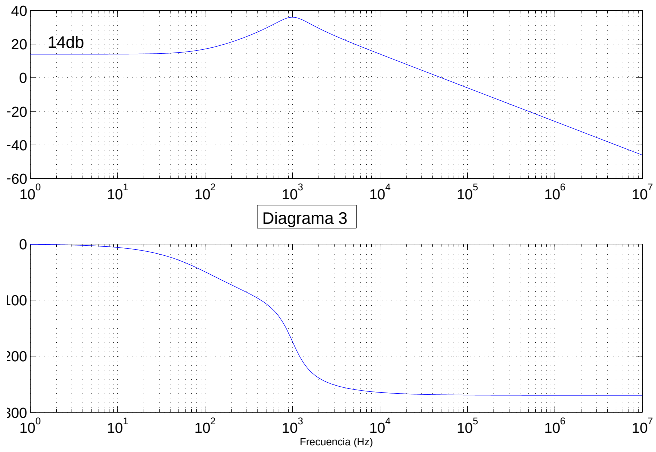
Un circuito lineal funcionando en régimen sinusoidal presenta las siguientes características:

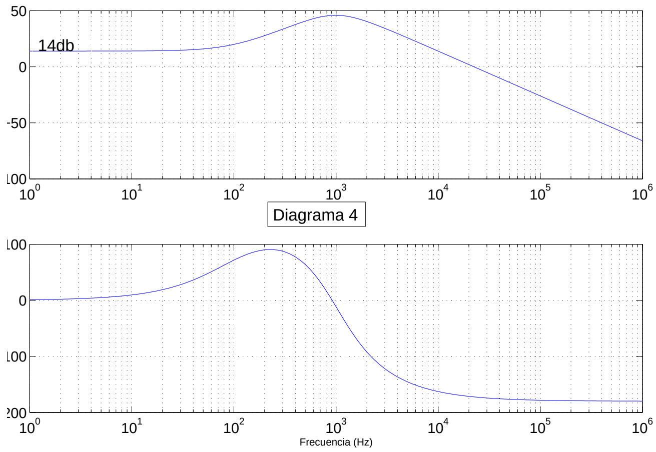
- existe una frecuencia entre 1 y 10 MHz tal que el sistema, al ser excitado por una sinusoide de dicha frecuencia y 1 V de amplitud, responde con una señal de 0,01 V de amplitud.
- para señales de muy baja frecuencia, el sistema multiplica por 5 la amplitud de la entrada.
- existe una frecuencia menor a 1KHz tal que el sistema, para una señal de entrada sinusoidal de dicha frecuencia, el sistema introduce un adelanto de fase de aproximadamente 45 grados.

Para cada uno de los siguientes Diagramas de Bode indicar si representan adecuadamente o no el sistema bajo consideración.









Pregunta 4

a) Consideremos una impedancia $Z_L = R_L + jX_L = |Z_L|.e^{j\varphi_L}$. Definir el *factor de potencia* de la impedancia Z_L.

b) Dado un circuito en régimen sinusoidal compuesto por una fuente de amplitud $|V_f|$ que alimenta la serie de una impedancia inductiva $Z_f = R_f + jX_f$ con Z_L. Hallar la impedancia óptima (Z_{Lopt}), en función de V_f y Z_f, que maximiza la potencia activa disipada en Z_L, con la restricción de que Z_L tiene factor de potencia inductivo constante.

c) Hallar $|Z_{Lopt}|$ y representar en el plano complejo las impedancias Z_f y la Z_{Lopt}.

Solución

Problema 1

(a) Buscamos un modelo serie, por lo que la impedancia que representa al motor tendrá la forma:

$$Z_M(j\omega) = R_S + L_S j\omega$$

El valor de la resistencia es inmediato de la identidad: $P = R_s.|I_S|^2$. El factor de potencia del motor sale d

$$\cos\varphi = \frac{P}{|V_S|.|I_S|} \Rightarrow \varphi = arcos\left(\frac{P}{|V_S|.|I_S|}\right)$$

(positivo, pues es carga inductiva). Para calcular la parte reactiva de la impedancia, observemos que

$$Q = |V_s|.|I_S|\sin\varphi = L_S\omega.|I_S|^2$$

De donde,

$$L_S = \frac{\sqrt{|V_S|^2.|I_S|^2 - P^2}}{\omega.|I_S|^2}$$

(b) Planteamos el nudo de corrientes a la entrada del motor:

$$\frac{V_f - V_M}{R} = V_M.\left[Cj\omega + \frac{1}{R_S + L_S j\omega}\right] \Rightarrow \frac{V_f}{R} = V_M.\left[\frac{1}{R_S} + Cj\omega + \frac{1}{R_S + L_S j\omega}\right]$$

Despejando, obtenemos

$$H(j\omega) = \frac{R_S + L_S j\omega}{R + R_S + [L_S + RR_S C](j\omega) + RL_S C(j\omega)^2} = \frac{\left(\frac{1}{RC}\right)\left((j\omega) + \frac{R_S}{L_S}\right)}{(j\omega)^2 + \left[\frac{1}{RC} + \frac{R_S}{L_S}\right](j\omega) + \left(1 + \frac{R_S}{R}\right)\frac{1}{L_S C}}$$

(c) Considerando que

$$\frac{R_S}{L_S} = \omega_0 \quad , \quad \frac{1}{RC} = 1099\omega_0 \Rightarrow \frac{1}{L_S C} = \frac{R}{R_S}1099\omega_0^2$$

De donde

$$H(j\omega) = \frac{1099\omega_0.\,(j\omega + \omega_0)}{(j\omega)^2 + 1100\omega_0(j\omega) + \left(1 + \frac{R}{R_S}\right)\omega_0^2}$$

Para obtener la transferencia deseada, debemos imponer

$$\left(1 + \frac{R}{R_S}\right)\omega_0^2 = 10^5 \Rightarrow \frac{R}{R_S} = \frac{10^5}{1099} - 1$$

(d) Para obtener los Diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase, realizamos la aproximación por bandas de

$$H(j\omega) = 1099.\frac{\omega_0.(j\omega + \omega_0)}{(j\omega + 100\omega_0).(j\omega + 1000\omega_0)}$$

- $\omega \ll \omega_0$

$$H(j\omega) \approx \frac{1099\omega_0(\omega_0)}{(100\omega_0)(1000\omega_0)} = \frac{1099}{10^5}$$

- $\omega_0 \ll \omega \ll 100\omega_0$

$$H(j\omega) \approx \frac{1099\omega_0(j\omega)}{(100\omega_0)(1000\omega_0)} = \frac{1099(j\omega)}{10^5\omega_0}$$

- $100\omega_0 \ll \omega \ll 1000\omega_0$

$$H(j\omega) \approx \frac{1099\omega_0(j\omega)}{(j\omega)(1000\omega_0)} = \frac{1099}{1000}$$

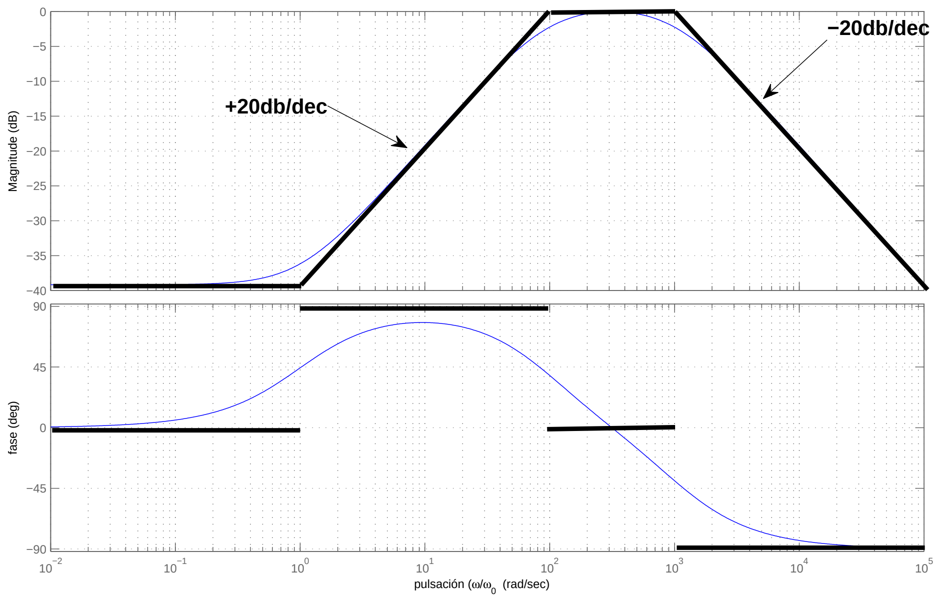


Figura 7: Diagramas de Bode asintóticos y reales de $H(j\omega)$ (recordar que de acuerdo a las singularidades de H, el Diagrama de Bode de Fase es continuo).

- $\omega \gg 1000\omega_0$

$$H(j\omega) \approx \frac{1099\omega_0(j\omega)}{(j\omega)(j\omega)} = \frac{1099.\omega_0}{j\omega}$$

(e) i) Debemos buscar una frecuencia $\omega_1 = a.\omega_0$ que satisfaga $|H(j\omega_1)| = 1$.

$$|H(j\omega_1)|^2 = 1 = \frac{1099^2(a^2+1)}{(a^2+10^4).(a^2+10^6)}$$

De donde se debe cumplir que

$$a^4 + [10^6 + 10^4 - 1099^2].a^2 + 10^{10} - 1099^2 = 0$$

Pero esta ecuación debe tener raíces positivas para tener sentido, lo que no ocurre. Por lo tanto, no existe ninguna frecuencia a la cual el sistema presenta ganancia de $0db$. Observar que el Diagrama asintótico podría confundirnos, debido justamente a las aproximaciones realizadas para su obtención.

ii)

$$|H(j10^4\omega_0)| = \frac{1099\sqrt{10^8+1}}{\sqrt{10^8+10^4}\sqrt{10+10^6}} \approx \frac{1}{10}.\frac{1099}{1000} \approx 0,109$$

iii) Buscamos $\omega_2 = a\omega_0$ tal que $arg\,[H(j\omega_2)] = 0$. Igualamos a un número $\alpha > 0$ a determinar:

$$H(j\omega_2) = \alpha \Leftrightarrow 1099.(ja+1) = \alpha.\,(ja+100)\,.\,(ja+1000)$$

De donde

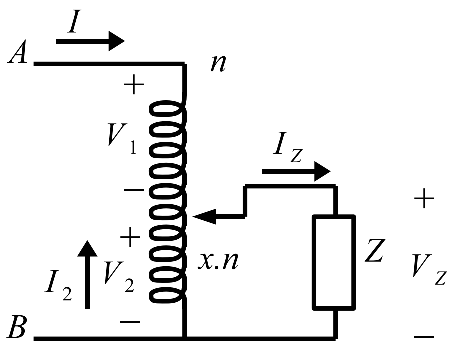
$$\begin{cases} 1099.a &= \alpha.a{,}1100 \Rightarrow \alpha = \frac{1099}{1100} \\ 1099 &= \alpha.(10^5 - a^2) = \frac{1099}{1100}.(10^5 - a^2) \Rightarrow a = \sqrt{10^5 - 1100} \approx 314,5 \end{cases}$$

De donde $\omega_2 \approx 314,5\omega_0$.

iv) Si para una entrada de $10V$ la salida en régimen presenta una atenuación de $20db$, la amplitud de la salida en régimen es de $1V$. De acuerdo al Diagrama de Bode de amplitud, existen un par de frecuencias a las cuales el sistema presenta esa atenuación. Una de ellas es mayor que $100\omega_0$ y vale aproximadamente $\omega_3 = 10^4\omega_0$. Hemos usado la aproximación asintótica, ya que vemos que es muy buena en ese rango de frecuencias, debido a la separación existente entre las singularidades. Observemos que la parte d)ii) se condice con este resultado.

Problema 2

(a) I) En primer lugar, aplicamos las ecuaciones para el transformador. Por último, podemos



Teniendo en cuenta las tensiones y corrientes definidas en la figura, tenemos,

$$I(1-x)n = xnI_2 \tag{1}$$

$$\frac{V_1}{n(1-x)} = \frac{V_2}{xn} \tag{2}$$

Operamos con la ecuaciones anteriores, para escribir $I_Z = I + I_2$ y $V_Z = V_2$ en términos de V e I:

$$V = V_1 + V_2 \;\Rightarrow\; V = V_Z\left(1 + \frac{V_1}{V_2}\right) = V_Z\frac{1}{x} \tag{3}$$

$$I_Z = I\left(1 + \frac{I_2}{I}\right) \;\Rightarrow\; I = I_Z\, x \tag{4}$$

calcular la impedancia vista,

$$Z_{AB} = \frac{V}{I} = \frac{V_Z}{I_Z}\frac{1}{x^2} \;\Rightarrow\; \boxed{Z_{AB} = \frac{Z}{x^2}}$$

II) La potencia aparente entregada por la fuente, será $S_f = V\,\bar{I}$; por otro lado, la potencia aparente consumida en la carga $S_Z = V_Z\,\bar{I_Z}$. Utilizando las ecuaciones deducidas en la parte i) tenemos,

$$S_Z = V_Z\,\bar{I_Z} = xV\,\frac{\bar{I}}{x} \;\Rightarrow\; S_Z = S_f$$

como se quería probar.

(b) Observando el circuito de la Figura 8, tenemos que para que el sistema sea equilibrado perfecto, $Z_{AB} = R_1 + j\omega L_1$. Recordando que $Z_{AB} = \frac{Z}{x^2}$, tenemos

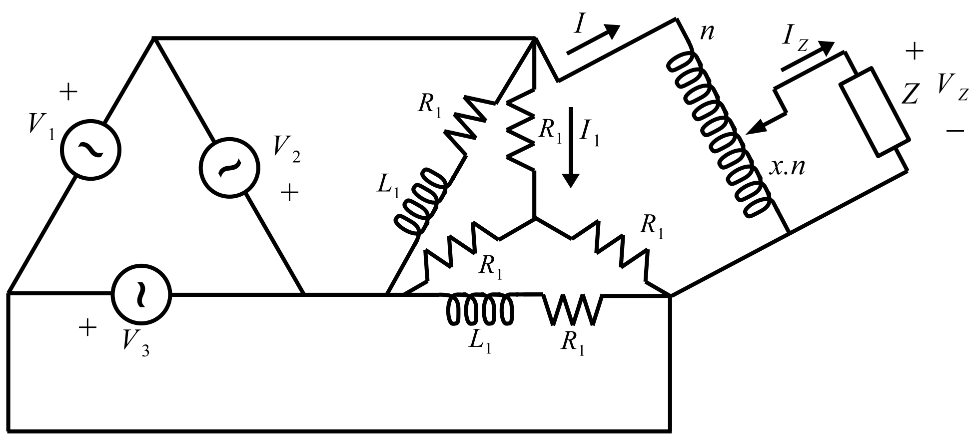


Figura 8:

$$Z_{AB} = R_1 + j\omega L_1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}(R_v + j\omega L_0) = R_1 + j\omega L_1$$

$$\Rightarrow Arg\left\{\frac{1}{x^2}(R_v + j\omega L_0)\right\} = Arg\left\{R_1 + j\omega L_1\right\} \Rightarrow \frac{L_0\omega}{R_v} = \frac{L_1\omega}{R_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_v = R_1\frac{L_0}{L_1}} \tag{5}$$

En segundo lugar, imponemos

$$|Z_{AB}| = |R_1 + j\omega L_1| \Rightarrow x^4(R_1^2+\omega^2 L_1^2) = (R_v^2+\omega^2 L_0^2) \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[4]{\frac{\left(R_1^2\frac{L_0^2}{L_1^2}\right) + \omega^2 L_0^2}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}}} = \sqrt{\frac{L_0}{L_1}}$$

Como se puede ver, $L_0 \leq L_1$ nos asegura que $x \in [0, 1]$, de modo que existe solución.

(c) Si llamamos v_1, v_2 y v_3 a las **<u>tensiones de fase</u>**, es claro que $v_i = \frac{V_i}{\sqrt{3}}e^{-j30^o}$, las corrientes pedidas las podemos calcular como:

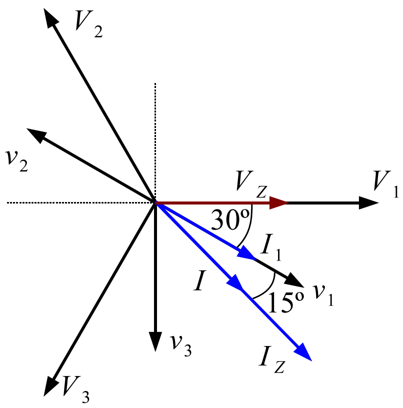


Figura 9: Diagrama fasorial

$$I_1 = \frac{v_1}{R_1} = \frac{V_1}{\sqrt{3}R_1}e^{-j30} = \frac{220V}{\sqrt{3}\ 100\Omega}\angle -30^o \tag{6}$$

$$I = \frac{V_1}{Z_{AB}} = \frac{V_1}{R_1 + j\omega L_1} = \frac{220V}{\sqrt{2}\ 100\Omega}\angle -45^o \tag{7}$$

$$I_Z = \frac{I}{x} = \frac{220V}{\sqrt{2}\ 100\Omega}\sqrt[4]{\frac{2(100\Omega)^2}{(100\Omega)^2\frac{1}{4} + (50\Omega)^2}}\angle -45^o \tag{8}$$

En la Figura 9 se muestra el diagrama fasorial con las tensiones y las corrientes calculadas.

(d) I) La potencia reactiva consumida, será:

$$Q = 3\, Im\left\{V_1\, \bar{I}\right\}$$

Utilizando los resultados de la parte anterior, evaluamos obteniendo,

$$Q = 3\,\frac{(220V)^2}{2\ 100\Omega} = 726VAr$$

II) Para compensar la potencia reactiva, colocamos capacitores **en paralelo**[b] **a las cargas** $R_1 + j\omega L_1$ de modo que la potencia reactiva total consumida sea nula.

$$|Q_C| = 3\,|V_1|^2\, C\omega \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{2\pi 50\ 2\ 100} = 15{,}9\mu F}$$

[b]es decir, en triángulo