Sistemas Lineales 1

Examen Febrero del 2007

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

(a) En el circuito de la Figura 1, hallar la transferencia $H(j\omega) = \dfrac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$

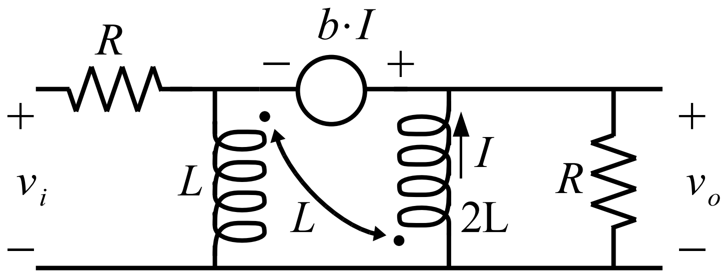


Figura 1:

(b) Realizar los diagramas de Bode de $H(j\omega)$ sabiendo que $b = 5000\,R$.

(c) **En esta parte se sugiere tener mucho cuidado con los redondeos al plantear ecuaciones de segundo grado; recordar que la raíz cuadrada los números se restan.**

I) Hallar la frecuencia angular a la cual se da la ganancia máxima y hallar el respectivo valor de ganancia.

II) Hallar la selectividad del sistema, definida como $\dfrac{|f_2 - f_1|}{f_0}$ donde f_0 es la frecuencia en Hz correspondiente a la frecuencia angular de la parte I) y f_2 y f_1 son las frecuencias a las cuales la ganancia del sistema cae a $3db$ del valor máximo.

III) Hallar la frecuencia mínima ω_c para la cual la distorsión en amplitud es menor que $3db$ entre ω_c e infinito.

Justifique claramente cualquier aproximación realizada.

Problema 2

Sea el circuito de la Figura 2 en régimen sinusoidal, trabajando a frecuencia ω. La fuente ideal V_s y la impedancia Z_s conforman el modelo de una fuente real.

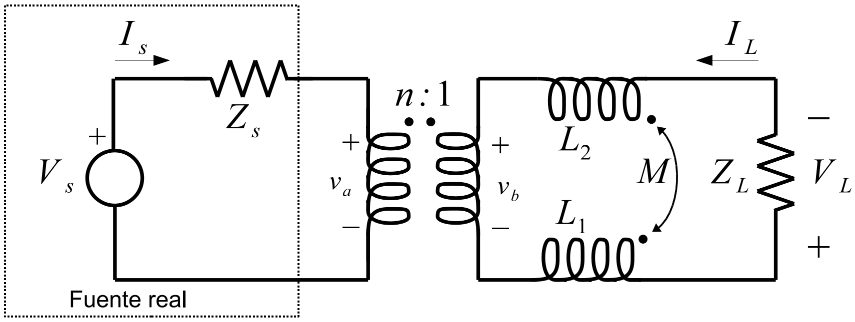


Figura 2:

(a) Indicar la relación de fase entre I_s, fasor de corriente entregada por la fuente, e I_L, fasor de corriente por la impedancia Z_L con el sentido indicado en la Figura 2.

(b) Hallar la impedancia vista desde el lado ”a” del transformador ideal.

(c) Si Z_L tiene **resistencia nula y reactancia positiva,** bosquejar un diagrama fasorial donde aparezcan representados los fasores V_s, I_s, I_L y V_L, discutiendo según el signo de la reactancia total que ve la fuente V_s.

(d) Para $Z_s = R_s + jX_s$ y $Z_L = R_L + jX_L$, hallar R_L y X_L en función de los parámetros del circuito para que la potencia activa entregada por la fuente **real** sea máxima.

(e) Para $L_1\omega = L_2\omega = 100\Omega$, $M\omega = 50\Omega$, $Z_L = (100 + j50)\Omega$ y $Z_s = (1 + j0)\Omega$, compensar la potencia reactiva consumida por el circuito a la fuente real, colocando una componente adecuada (que se diseñará) en bornes del primario del transformador ideal.

Sistemas Lineales 1

Examen Febrero del 2007

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

(a) Mostrar que $V(t) = Y(t) * Y(t) = Y(t).t$, siendo $Y(t)$ el escalón de Heaviside.

(b) Hallar $S(t) = V'''(t)$.

(c) Sea $U(t) = V(-t)$. Hallar $U'(t)$.

(d) Sea $T(t) = V(t) + V(-t)$. **Hallar $T(t) * S(t)$ de dos maneras diferentes.**

Pregunta 2

Sea un sistema de fuentes de voltaje sinusoidal perfecto, que alimenta cargas idénticas Z en estrella. Se tiene un vatímetro, que consta de una bobina amperimétrica bA (de impedancia despreciable) y una bobina voltimétrica bV (de impedancia infinita). Se sabe que la lectura del vatímetro es $W = V.I.\cos(\varphi)$, en que:

- V es el voltaje eficaz en bornes de la bobina voltimétrica,
- I es la corriente eficaz que circula por la bobina amperimétrica,
- φ es el ángulo entre los fasores V e I.

Se coloca el vatímetro según se indica en la Figura 3.

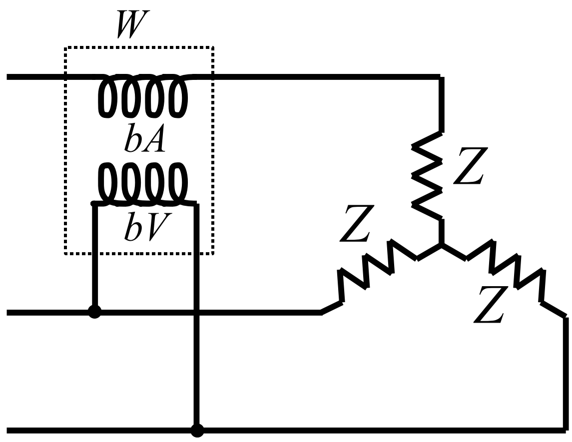


Figura 3:

(a) Construir un diagrama fasorial para voltajes en las fases, voltajes compuestos y corrientes de fases.

(b) Probar que la lectura del vatímetro W da una **medida** de la **potencia reactiva** en la carga.

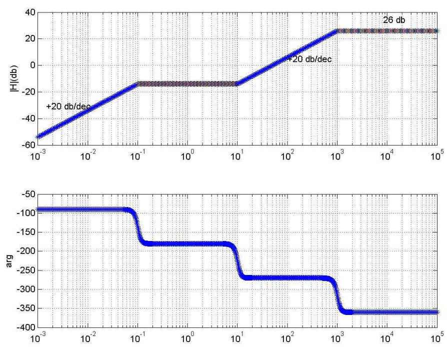
(c) Calcular **exactamente** la potencia reactiva en el sistema de cargas en función de la lectura W del vatímetro.

Pregunta 3

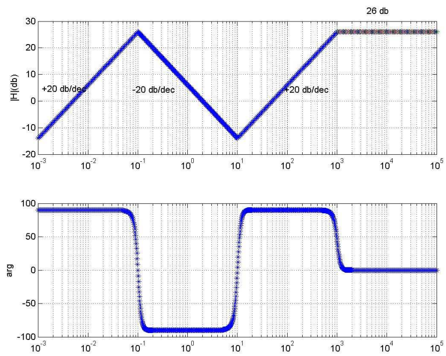
Sea $H(j\omega)$ la transferencia en régimen de un sistema lineal. Se sabe que:

- $H(j0) = 0$
- $\lim_{|\omega| \to +\infty} |H(j\omega)| = 20$
- $H(j\omega)$ es real racional de segundo orden.
- $H(j\omega)$ no tiene ninguna singularidad con parte real estrictamente positiva.

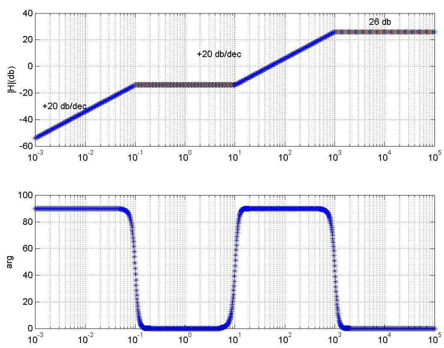
Indicar, justificando clara y detalladamente, cuáles de los siguientes son los Diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$.



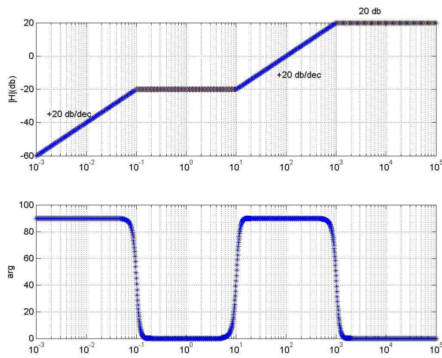
(a) Bode 1



(b) Bode 2



(c) Bode 3



(d) Bode 4

Pregunta 4

Sea $g(t)$ una función de $\mathcal{L}_1$, y $G(f)$ su Transformada de Fourier: $G(f) = A(f) + jB(f)$.

(a) Indicar cuál es la T. de Fourier de g(-t). Justificar.

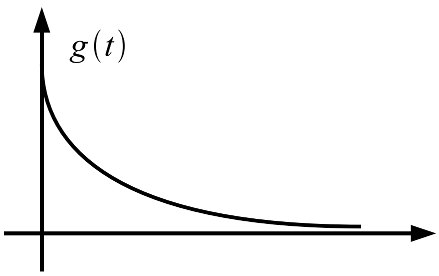
(b) Si $g(t)$ es real, probar que $G\bar{(}f) = G(-f)$

Aplicación: Sea $g(t) = Y(t)e^{-at}$, con $a > 0$

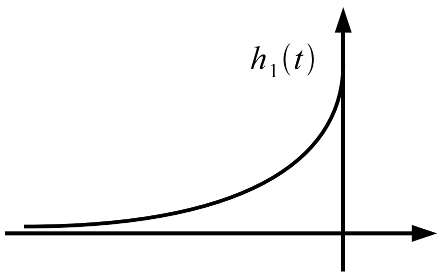
(c) Hallar $A(f)$ y $B(f)$.

(d) Verificar que $A(f)$ es par y $B(f)$ es impar.

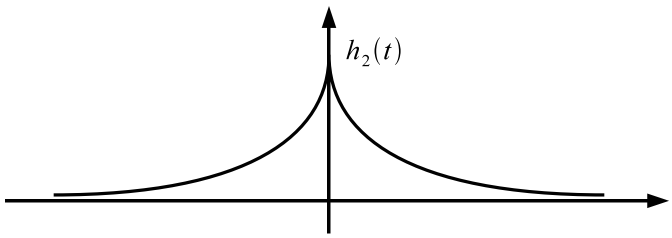
(e) Calcular las T. de Fourier de $h_1(t)$, $h_2(t)$ y $h_3(t)$.



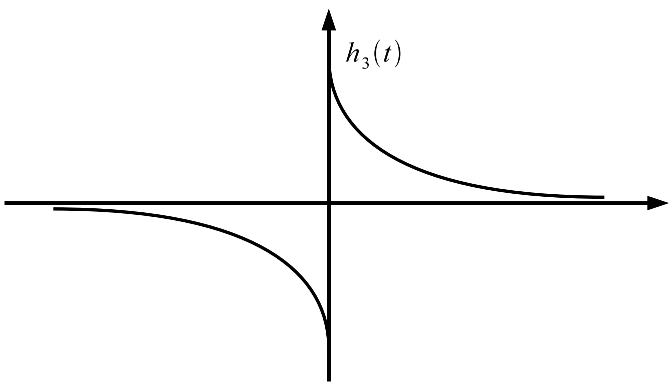
(e) $g(t)$



(f) $h_1(t)$



(g) $h_3(t)$



(h) $h_4(t)$

Solución

Problema 1

(a) Por la malla exterior de la Figura 4 obtenemos:

$$V_o = V_i - R\left(I_1 - I + \frac{V_o}{R}\right) + bI \;\Rightarrow\; 2V_o = V_i + I(R+b) - RI_1 \tag{1}$$

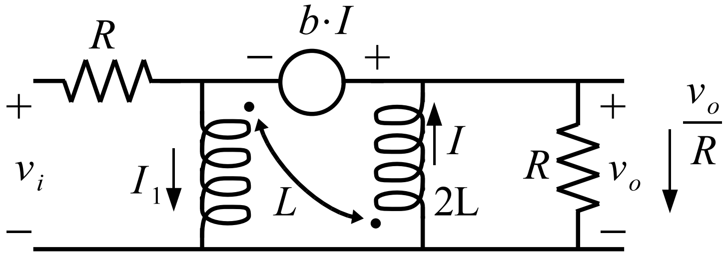


Figura 4:

De las ecuaciones del transformador, obtenemos:

$$V_o - bI = Lj\omega(I_1 + I) \tag{2}$$
$$V_o = Lj\omega(I_1 + 2I) \tag{3}$$

Restando las ecuaciones 2 y 3 obtenemos:

$$2V_o - bI = -Lj\omega I \;\Rightarrow\; I = \frac{2V_o}{b - Lj\omega} \tag{4}$$

Ahora, despejando I_1 de la ecuación 3 y sustituyendo en 4 obtenemos:

$$I_1 = \frac{-V_o}{Lj\omega} - \frac{4V_o}{b - Lj\omega} = -V_o\frac{3Lj\omega + b}{Lj\omega(b - Lj\omega)} \tag{5}$$

Sustituyendo 4 y 5 en 1 obtenemos:

$$2V_o = V_i + (R+b)\frac{2V_o}{b - Lj\omega} + R\,V_o\frac{3Lj\omega + b}{Lj\omega(b - Lj\omega)} \tag{6}$$

$$\Rightarrow\; V_o\left(2 - (R+b)\frac{2}{(b - Lj\omega)} - R\frac{3Lj\omega + b}{Lj\omega(b - Lj\omega)}\right) = V_i$$

$$\Rightarrow\; \boxed{H(j\omega) = \frac{Lj\omega(b - Lj\omega)}{-2(Lj\omega)^2 - 5RLj\omega - bR} = -\frac{1}{2}\frac{j\omega\,(b/L - j\omega)}{(j\omega)^2 + \frac{5R}{2L}j\omega + \frac{bR}{2L^2}}} \tag{7}$$

(b) Sustituyendo $b = 5000\,R$ en (7) obtenemos:

$$H(j\omega) = -\frac{1}{2}\frac{j\omega\,(5000\,R/L - j\omega)}{(j\omega)^2 + \frac{5R}{2L}j\omega + \frac{5000\,R^2}{2L^2}}$$

Llamemos $\omega_0 = 5000\dfrac{R}{L}$ a la raíz del numerador, y veamos las raíces del denominador:

$$j\omega_{1,2} = \frac{-\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 10^4}}{2}\frac{R}{L} \approx (-2{,}5 \pm 100j)\frac{R}{L}$$

Como se puede observar, el denominador tiene raíces complejas conjugadas, de módulo $\omega_1 = \sqrt{2500\dfrac{R^2}{L^2}} = 50\dfrac{R}{L} = \dfrac{\omega_0}{100}$, por otra parte, el parámetro ζ vale:

$$2\zeta\omega_1 = \frac{5R}{2L} \;\Rightarrow\; \zeta = \frac{1}{40} = 0{,}025$$

Reescribiendo $H(j\omega)$ en función de estos parámetros, tenemos:

$$\boxed{H(j\omega) = -\frac{1}{2}\frac{j\omega(\omega_0 - j\omega)}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_1 j\omega + \omega_1^2}}$$

Estudiamos $H(j\omega)$ de a tramos:

- Para $\omega \ll \omega_1$,

$$H(j\omega) \approx -50\frac{j\omega}{\omega_1} \;\Rightarrow\; \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx 20\log\left(\frac{50}{\omega_1}\right) + 20\log(\omega)\,dB \\ Arg(H(j\omega)) \approx -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Para $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_0$,

$$H(j\omega) \approx \frac{j\omega_0}{2\omega} \;\Rightarrow\; \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx 20\log\left(\frac{\omega_0}{2}\right) - 20\log(\omega)\,dB \\ Arg(H(j\omega)) \approx \frac{\pi}{2} \text{ o } \frac{-3\pi}{2} \end{cases}$$

  Evaluando la transferencia en ω_1, sabemos cual es el argumento:

$$H(j\omega_1) \approx -\frac{1}{2}\frac{j\omega_1\omega_0}{2\zeta j\omega_1^2} = -1000 \;\Rightarrow\; \text{el argumento es } \frac{-3\pi}{2}$$

- Para $\omega_0 \ll \omega$,

$$H(j\omega) \approx \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx -20\log(2)\ dB \\ Arg(H(j\omega)) \approx -2\pi \end{cases}$$

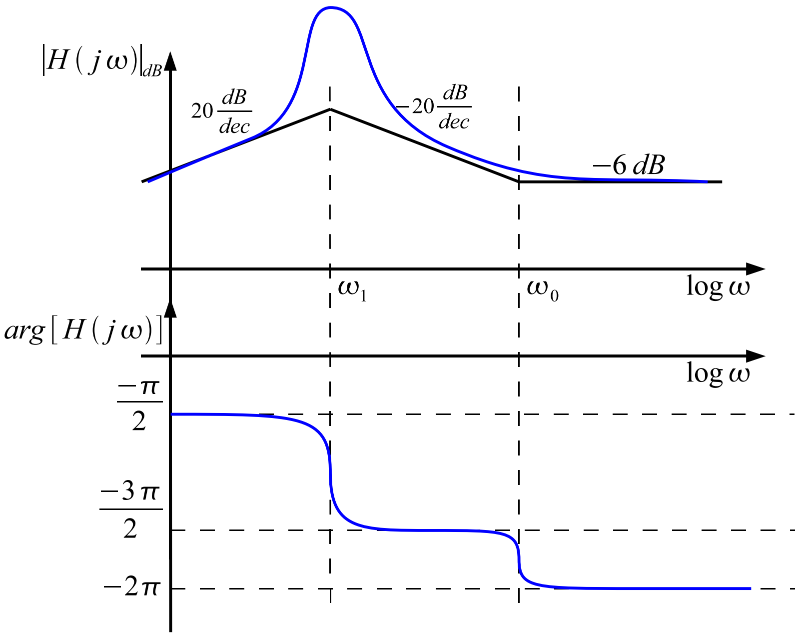


Figura 5: Diagrama de Bode

(c) I) Debido a la distancia entre el cero y el polo, podemos despreciar el efecto del cero en las cercanías del polo. Claramente el máximo se da para $\omega = \omega_1$ y $|H(j\omega_1)| = 1000$ como se calculo en la parte anterior. La ganancia máxima será entonces de $60\,dB$.

II) Para calcular la selectividad, tenemos que encontrar los puntos donde $|H(j\omega)|^2 = \frac{1000^2}{2} = 5\times10^6$. Como trabajaremos entorno a ω_1, seguiremos despreciando el efecto del cero. En las condiciones anteriores tenemos:

$$|H(j\omega)|^2 = 5\times10^6 \;\Rightarrow\; 10^4\omega_1^2\omega^2 = 2\times10^7\left((\omega^2-\omega_1^2)^2 + 4\zeta\omega_1^2\omega^2\right) \tag{8}$$

Operando, obtenemos:

$$200\omega_2 - (400 + 1 - 0{,}5)\omega_1^2\omega^2 + 200\omega_1^2 = 0 \tag{9}$$

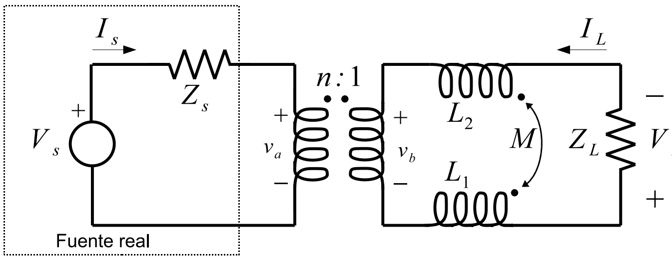
Las raíces de la ecuación 9 son:

$$\omega_{2,3}^2 \approx \frac{400{,}5 \pm 20}{400}\omega_1^2 \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{f_2 - f_1}{f_0} = \frac{\omega_2 - \omega_3}{\omega_1} = 0{,}05}$$

III) Nuevamente como el cero está alejado del polo, se puede despreciar el efecto del segundo en el primero, y como ya sabemos, la frecuencia a la cual el bode real está a $3\,dB$ del asintótico en un cero o un polo simple, es en el propio cero o polo respectivamente; podemos decir entonces que en ω_0 el módulo está a $3\,dB$ por encima del valor en infinito, o sea $\omega_0 = \omega_c$

Problema 2

(a) I_L está en contra fase con I_sm debido al vínculo que impone el transformador ideal.



(b) En primer lugar, calculemos la impedancia vista en bornes del secundario (Z_{v1} indicada en la Figura 6)

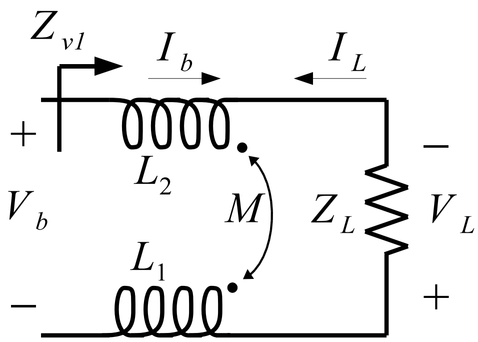


Figura 6:

Si plantamos la malla, obtenemos:

$$V_b = I_b j\omega(L_2 - M) + I_b Z_L + I_b j\omega(L_1 - M) \tag{10}$$

$$\Rightarrow\; Z_{v1} = Z_L + (L_1 + L_2 - 2M)j\omega$$

Finalmente pasando la impedancia vista para el lado del primario, obtenemos:

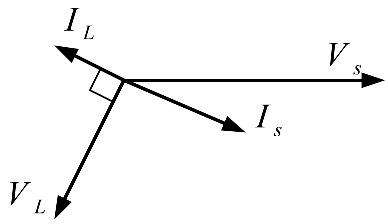
$$\boxed{Z_v = n^2 Z_{v1} = n^2\left[Z_L + (L_1 + L_2 - 2M)j\omega\right]}$$

(c) Sabemos que $Z_L = jX_L$ con $X_L \in \mathcal{R}^+$ entonces la impedancia vista desde el lado "a" del transformador, será $Z_v = jn^2\left[X_L + (L_1 + L_2 - 2M)\omega\right]$. Luego, podemos calcular la corriente I_s como:

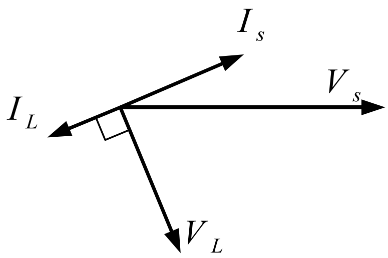
$$I_s = \frac{V_s}{Z_v + Z_s} = \frac{V_s}{R_s + j\underbrace{\left[X_s + n^2\left[X_L + (L_1 + L_2 - 2M)\omega\right]\right]}_{X}} \tag{11}$$

Observando la ecuación (11), podemos distinguir 3 casos posibles:

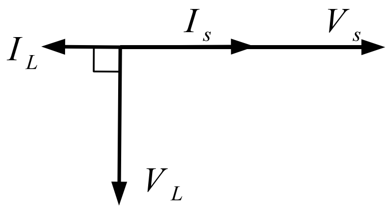
- Si $X > 0$, $Z_v + Z_s$ es inductiva y el diagrama fasorial será de la forma:



- Si $X < 0$, $Z_v + Z_s$ es capacitiva y el diagrama fasorial será de la forma:



- Si $X = 0$, $Z_v + Z_s$ es resistiva y el diagrama fasorial será de la forma:



(d) Para obtener la maxima potencia activa de la fuente **real**, se debe verificar que $Z_v = \bar{Z}_s$.

$$\Rightarrow \begin{cases} n^2 R_L = R_s \\ n^2 \left[X_L + (L_1 + L_2 - 2M)\omega\right] = -X_s \end{cases}$$

(e) Z_s es resistiva, de modo que colocaremos una reactancia en bornes del primario (es decir en paralelo al bobinado "a"), que compense la reactancia total vista por la fuente. Utilizando los valores dados en la letra, podemos calcular la impedancia vista desde el primario obteniendo, $Z_v = n^2(100 + j200)\Omega$. Si calculamos la potencia reactiva consumida por dicha carga, obtenemos:

$$Q = -\left|V_a\right|^2 \frac{200}{n(100^2 + 200^2)}$$

Imponiendo que el condensador que se coloca en bornes del primario compense dicha potencia reactiva (es decir consuma una cantidad de reactiva opuesta), obtenemos el valor del condensador:

$$\boxed{C = \frac{1}{n\omega} \frac{200}{100^2 + 200^2}}$$