Sistemas Lineales 1

Examen Febrero del 2006

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

(a) En el circuito de la Figura 1 hallar la transferencia $H(\omega) = \dfrac{V_0(j\omega)}{V_i(j\omega)}$.

(b) Calcular $H\left(\dfrac{j\omega_0}{\sqrt{2}}\right)$, $H(j\omega_0)$ y $H(j\omega_0\sqrt{2})$ con $\omega_0 = \frac{R}{L} = \frac{1}{RC}$.

(c) Realizar los Diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$ y bosquejar los reales. Explicar **detalladamente** su construcción.

(d) Calcular:

$$\lim_{\omega \to \omega_0^+} H(j\omega) \qquad \lim_{\omega \to \omega_0^-} H(j\omega)$$

(e) Se conecta una fuente sinusoidal $v_i(t) = 1V\cos(\omega_0 t)$ a la entrada del sistema:

i) realizar un diagrama fasorial con las caídas de voltaje y las corrientes en todos los elementos, incluir V_0 y V_i en dicho diagrama.

ii) agregar la caída de voltaje V_1 (caída en la serie de la resistencia y el condensador) al diagrama.

(f) Hallar $v_0(t)$ cuando a la entrada conectamos una fuente $v_i(t) = 1V\cos\left(\sqrt{2}\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$

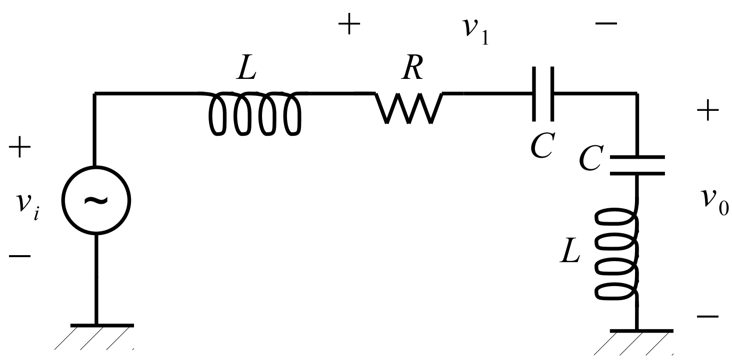


Figura 1:

Problema 2

Se considera el circuito de la Figura 2 donde el sistema de fuentes de corriente es **perfecto**. Los transformadores involucrados son **ideales**.

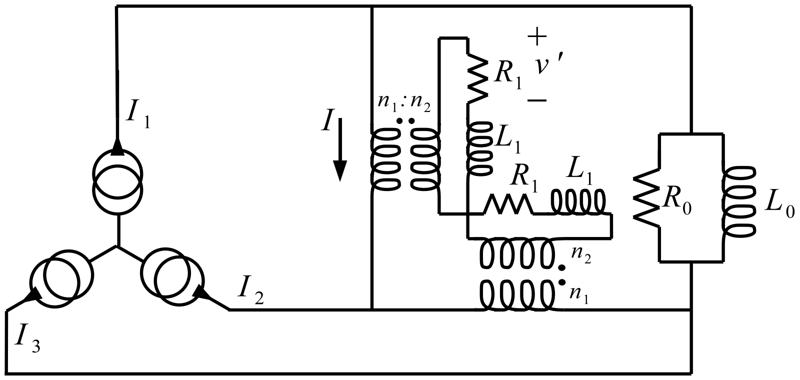


Figura 2:

(a) Hallar las relaciones entre los parámetros del circuito para que las tensiones compuestas U_{12}, U_{23} y U_{31} constituyan un sistema perfecto. **Justifique claramente su trabajo.**

Se tienen los siguientes datos numéricos

$$\begin{cases} i_1(t) = \sqrt{2} \cdot 5 \cos(100\pi\, t)\, A \\ i_2(t) = \sqrt{2} \cdot 5 \cos\left(100\pi\, t - \frac{2\pi}{3}\right) A \\ i_3(t) = \sqrt{2} \cdot 5 \cos\left(100\pi\, t + \frac{2\pi}{3}\right) A \end{cases} \qquad \begin{array}{c} n_1 = 100 \\ n_2 = 50 \\ R_0 = 10\Omega \\ L_0 = 30mHy \end{array}$$

(b) Calcular los valores de R_1 y L_1 de manera que se cumplan las relaciones halladas en la parte anterior.
Nota: estos valores se mantienen el resto del ejercicio.

(c) Hallar los fasores asociados a las tensiones compuestas y ubicarlos en un diagrama fasorial junto a los fasores de las fuentes.

(d) Hallar las expresiones temporales de $v_{12}(t)$, $v_{23}(t)$ y $v_{31}(t)$.

(e) Hallar el fasor asociado a la corriente I.

(f) En un nuevo diagrama fasorial que incluya al fasor I, ubicar a grandes rasgos (dándole importancia al sentido) los fasores v' (tensión en R_1) y v'' (tensión en L_1). **Justificar.**

(g) Se desea compensar la potencia reactiva consumida al sistema de fuentes mediante la conexión de condensadores.

  I) Indicar cómo los conectaría si se busca mantener invariante la potencia activa suministrada por el sistema de fuentes. **Justificar.**

  II) Calcular el valor de dichos condensadores.

Sistemas Lineales 1

Examen Febrero del 2006

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

Considere el circuito de la Figura 3.

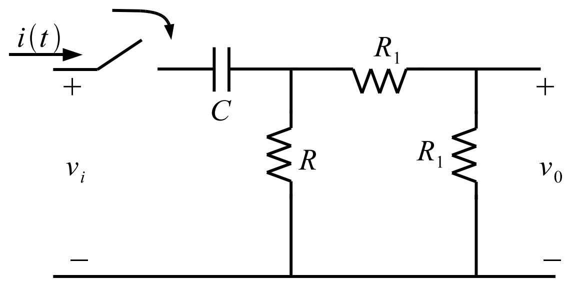


Figura 3:

(a) Deducir la ecuación diferencial que debe satisfacer la tensión $v_c(t)$ a partir del instante $t = 0$ en que se cierra la llave.

(b) Concluir que si la tensión de entrada $v_i(t)$ es constante, entonces el capacitor se comporta en régimen como un circuito abierto. Encontrar la respectiva respuesta en régimen $v_0(t)$.

(c) Sin hallar explícitamente la transferencia en régimen permanente del circuito $\left(H(j\omega) = \frac{v_0(j\omega)}{v_{in}(j\omega)}\right)$, mostrar que esta debe permanecer en cero en $\omega = 0$.

(d) Se considera el Diagrama de Bode de módulo de $H(j\omega)$. ¿Qué efecto tiene la resistencia R en la máxima distancia entre el Diagrama real y el asintótico?

Pregunta 2

En el circuito de la Figura 4, la fuente de tensión sinusoidal de amplitud E y pulsación ω, tiene una impedancia propia $Z_f = R_f + jX_f$, y alimenta una carga $Z = R + jX$.
Se desea diseñar Z para que extraiga la máxima potencia activa P_o del circuito.

(a) Hallar R, X, y P_o

(b) Con la carga Z así diseñada, se cambia la frecuencia de la fuente y se trabaja a una octava.

I) Calcular en ese caso la potencia activa P_1 en la carga.

II) El valor de P_1, ¿cómo depende de que la octava sea por encima o por debajo?

III) Si $X_f = R_f$, calcular la relación $\frac{P_1}{P_0}$.

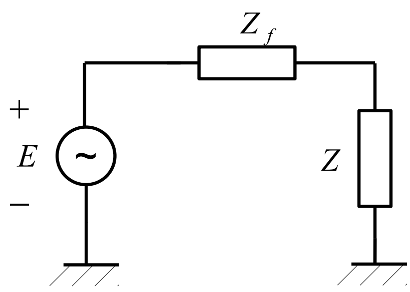


Figura 4:

Pregunta 3

La expresión $\langle T(t), \cos(\omega t)\rangle$ tiene sentido para cualquier distribución $T \in \mathcal{D}'$ de soporte acotado y cualquier número real ω. Definamos entonces las funciones:

$$U(\omega) = \langle T(t), \cos(\omega t)\rangle \qquad V(\omega) = \langle T(t), \sin(\omega t)\rangle$$

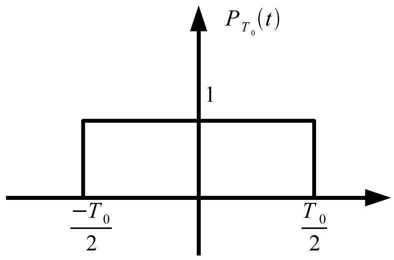
(a) Escribir $\langle T'(t), \cos(\omega t)\rangle$ en función de $V(\omega)$.

(b) Sea $W(\omega) = \langle T(at), \cos(\omega t)\rangle$ con a real. Hallar una relación entre $W(\omega)$ y $U(\omega)$.

(c) Consideremos el caso en que $T(t) = P_{T_0}(t)$.

I) Mostrar que la respectiva $U(\omega)$ tiene infinitos ceros y hallar la distancia entre dos ceros consecutivos cualesquiera.

II) Hallar $T'(t)$ y $V(\omega)$.



Pregunta 4

Sea $T(t)$ una distribución temperada y $U(f)$ su transformada de Fourier: $U(f) = \mathcal{F}[T(t)]$.

(a) Indicar (sin necesidad de probar) a qué corresponde derivar $U(f)$.

(b) Hallar $\mathcal{F}[T(at)](f)$ en función de $U(f)$. Verificar entonces que si T es una distribución impar $(T(t) = -T(-t))$, entonces $\mathcal{F}[T(t)](f) = -\bar{\mathcal{F}}[T(t)](-f)$.

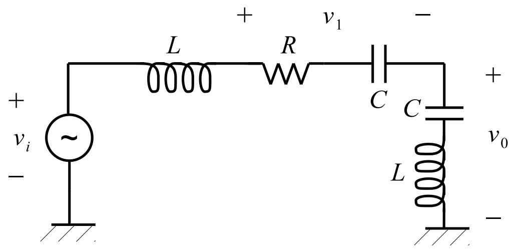
(c) Consideremos la distribución impar $T(x) = vp\left(\frac{1}{x}\right)$, llamada valor principal. Se sabe que $\mathcal{F}[Y(t)](f) = vp\left(\frac{1}{j2\pi f}\right) + \frac{1}{2}.\delta(f)$. A partir de los resultados anteriores, hallar:

$$\mathcal{F}\left[vp\left(\frac{1}{j2\pi t}\right)\right](f)$$

Solución

Problema 1

(a) Planteando el divisor de tensiones, obtenemos:



$$V_o = \frac{Lj\omega + \frac{1}{j\omega C}}{R + 2Lj\omega + \frac{2}{Cj\omega}} V_i$$

$$\Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{1}{2}\frac{LC(j\omega)^2 + 1}{2LC(j\omega)^2 + RCj\omega + 2}} \tag{1}$$

(b) Con las relaciones dadas en la letra, $\omega_0 = \frac{R}{L} = \frac{1}{RC} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ podemos reescribir la transferencia calculada en (1) como:

$$H(j\omega) = \frac{1}{2}\frac{(j\omega)^2 + \omega_0^2}{(j\omega)^2 + \frac{j\omega\omega_0}{2} + \omega_0^2} \tag{2}$$

Evaluando (2) obtenemos los valores buscados:

$$H\left(\frac{j\omega_0}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1/2}{1 + \frac{j}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\angle - 0,615$$

$$H(j\omega_0) = 0$$

$$H(j\sqrt{2}\omega_0) = \frac{-1}{-2 + j\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\angle 0,615$$

(c) La transferencia presenta ceros en $\pm j\omega_0$ y polos complejos conjugados, con $\omega_n = \omega_0$ y $\zeta = \frac{1}{4}$. Analizamos la transferencia para los distintos rangos de frecuencia:

- Para $\omega \ll \omega_0$,

$$H(j\omega) \approx \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx -6\,dB \\ Arg(H(j\omega)) \approx 0 \end{cases}$$

- Para $\omega \gg \omega_0$,

$$H(j\omega) \approx \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx -6\,dB \\ Arg(H(j\omega)) \approx 0 \end{cases}$$

Notar que la transferencia se anula para la frecuencia ω_0, de modo que $|H(j\omega)|_{dB} \xrightarrow{\omega \to \omega_0} -\infty$. Por otro lado el argumento presenta una discontinuidad entorno a ω_0, donde presenta un salto de π. Teniendo en cuenta los valores asintóticos y las singularidades observadas, obtenemos un bosquejo del Diagrama de Bode real, mostrado en la Figura 5.

(d) Calculamos los limites para el valor del argumento de la transferencia, cuando $\omega \to \omega_0^{\pm}$:

$$\lim_{\omega \to \omega_0^+} arg(H(j\omega)) = \lim_{\omega \to \omega_0^+} arg(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\omega \to \omega_0^-} arg(H(j\omega)) = \lim_{\omega \to \omega_0^-} arg(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

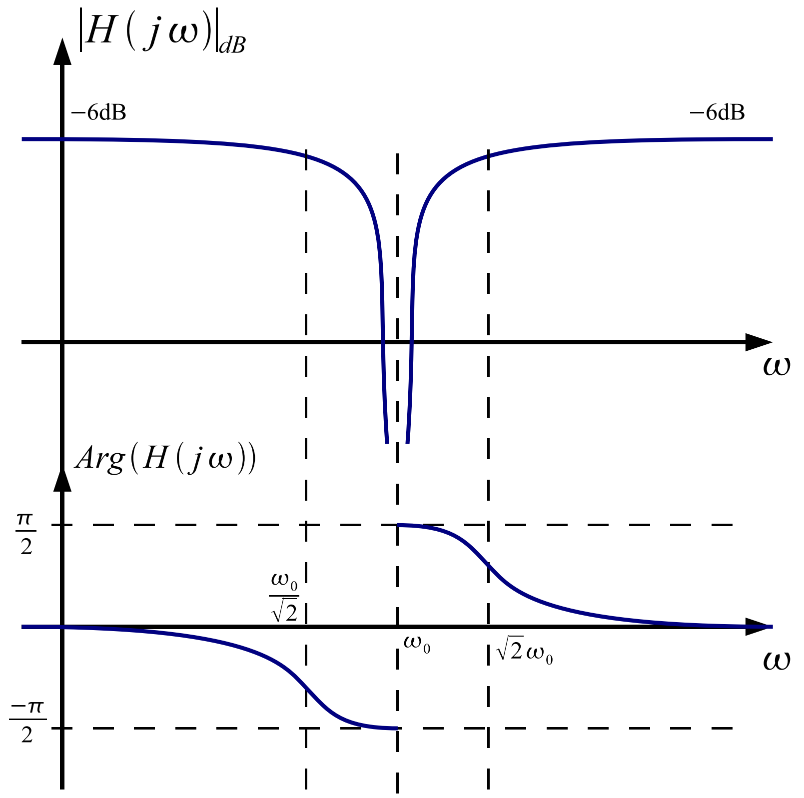


Figura 5: Diagrama de Bode

(e) Si a la entrada del sistema se conecta una tensión $v_i(t) = 1V \cos(\omega_0 t)$, como $H(j\omega_0) = 0 \Rightarrow V_0 = 0$.

Observar que $Z = Lj\omega_0 + \frac{1}{jC\omega_0} = 0$ entonces, $I = \frac{V_i}{R}$ y $V_R = V_i$, finalmente, V_1 lo podemos calcular como $V_R + V_C$. En la Figura 6 se muestra el diagrama fasorial.

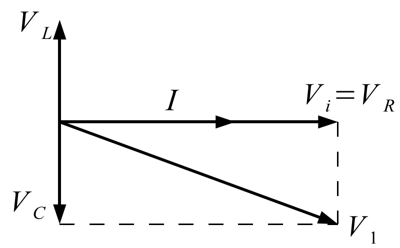


Figura 6:

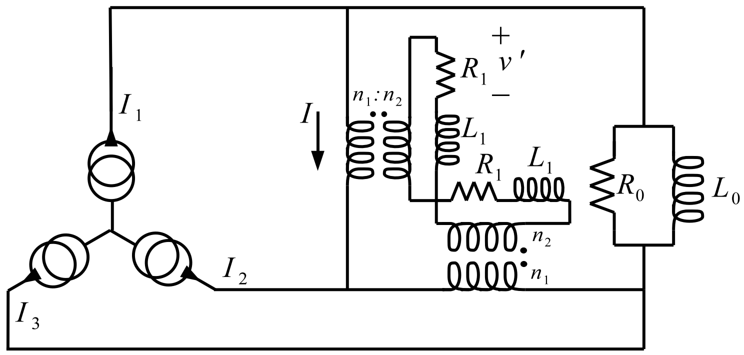
(f) Si la entrada vale $v_i(t) = 1V \cos\left(\sqrt{2}\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$, la salida será:

$$v_0(t) = |H(j\sqrt{2}\omega_0)| \cos\left(\sqrt{2}\omega_0 t + \frac{\pi}{4} + arg(H(j\sqrt{2}\omega_0))\right)$$

usando la parte b, obtenemos:

$$\boxed{v_o(t) = \frac{1}{\sqrt{6}} V \cos\left(\sqrt{2}\omega_0 t + \frac{\pi}{4} + 0,615\right)}$$

Problema 2



- Sistema de fuentes de corriente perfecto.
- Transformadores ideales.

Figura 7:

(a) Dado un sistema de fuentes perfecto, para tener un sistema de tensiones compuestas perfecto, debo imponer que las cargas de las tres fases sean iguales.
En una de las fases tenemos,

$$Z = R_0 \| L_0 j\omega = \frac{R_0 L_0 j\omega}{R_0 + L_0 j\omega} = \frac{R_0 (L_0\omega)^2}{R_0^2 + (L_0\omega)^2} + j\frac{R_0^2 L_0\omega}{R_0^2 + (L_0\omega)^2}$$

Para las dos fases restantes, que contienen transformadores ideales, la impedancia vista desde el primario vale:

$$Z' = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 (R_1 + L_1 j\omega)$$

Imponiendo que la impedancia vista en todas las fases sea la misma, obtenemos:

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 R_1 &= \frac{R_0 (L_0\omega)^2}{R_0^2 + (L_0\omega)^2} \\ \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 L_1\omega &= \frac{R_0^2 L_0\omega}{R_0^2 + (L_0\omega)^2} \end{aligned}} \tag{3}$$

(b) Sabemos que:

$$\begin{cases} i_1(t) = \sqrt{2}\cdot 5\cos(100\pi\, t)\, A \\ i_2(t) = \sqrt{2}\cdot 5\cos\left(100\pi\, t - \frac{2\pi}{3}\right) A \\ i_3(t) = \sqrt{2}\cdot 5\cos\left(100\pi\, t + \frac{2\pi}{3}\right) A \end{cases} \qquad \begin{aligned} n_1 &= 100 \\ n_2 &= 50 \\ R_0 &= 10\Omega \\ L_0 &= 30mHy \end{aligned}$$

Con las condiciones halladas en la parte anterior, y los valores dados, tenemos:

$$\boxed{R_1 = 1{,}18\Omega} \qquad \boxed{L_1 = 3{,}97mHy}$$

(c) En primer lugar, transfiguramos la carga a su equivalente estrella:

$$Z_{tri} = \frac{Z_{est}}{3} = \frac{R_0 L_0 j\omega}{3(R_0 + L_0 j\omega)}$$

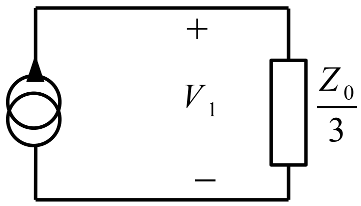


Figura 8:

Analizando el circuito monofásico equivalente, se deducen las tensiones de fase:

$$V_1 = \frac{R_0 L_0 j\omega}{3(R_0 + L_0 j\omega)} I_1 = 11,43V\angle 46,7^o$$

$$V_2 = V_1\, e^{-j\frac{2\pi}{3}} \qquad V_3 = V_1\, e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

Finalmente como $U_{12} = V_1 - V_2$, $U_{23} = V_2 - V_3$, $U_{31} = V_3 - V_1$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} U_{12} = \sqrt{3}\ 11,43V\angle 46,7^o + 30^o \\ U_{23} = \sqrt{3}\ 11,43V\angle 46,7^o - 90^o \\ U_{31} = \sqrt{3}\ 11,43V\angle 46,7^o + 150^o \end{array}}$$

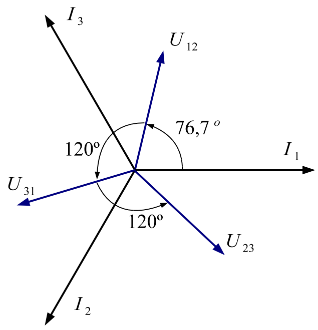


Figura 9:

(d) Utilizando la parte anterior, podemos calcular fácilmente las expresiones temporales para las tensiones compuestas:

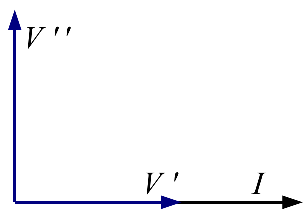
$$\boxed{\begin{array}{c} v_{12} = \sqrt{6}\ 11,43V\cos(100\pi\, t + 46,7^o + 30^o)\, V \\ v_{23} = \sqrt{6}\ 11,43V\cos(100\pi\, t + 46,7^o - 90^o)\, V \\ v_{12} = \sqrt{6}\ 11,43V\cos(100\pi\, t + 46,7^o + 150^o)\, V \end{array}}$$

(e) I es la corriente por el primario del transformador de una de las fases,

$$\Rightarrow\ I = \frac{U_{12}}{Z_0} = \frac{R_0 + L_0 j\omega}{R_0 L_0 j\omega} U_{12}\ \Rightarrow\ \boxed{I = 2,88A\angle 30^o}$$

(f)

Analizando una de las fases que tiene el transformador, vemos que la corriente por el secundario (I'), será colineal con la corriente por el primario (I), luego la caída de tensión en la resistencia (V') es colineal con la corriente I' y la tensión en bornes de la bobina (V'') se encuentra 90º adelantada a I'.



(g) La potencia activa dependerá de la corriente suministrada a la carga. Al excitar con un sistema de fuentes de corriente, debo conectar los condensadores en serie, de esta forma, la corriente por la carga permanece incambiada.
Como la carga es reactiva, debo conectar condensadores, como se muestra en la Figurar 10

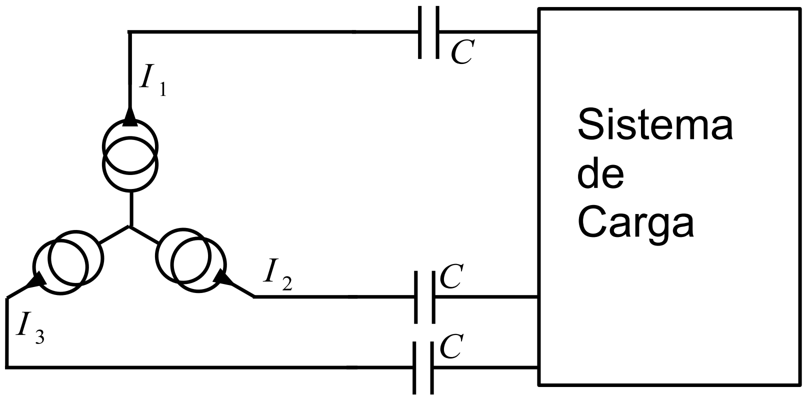


Figura 10: Esquema de conexión de los condensadores

(h) Nuevamente analizamos el circuito equivalente monofásico, e imponemos:

$$0 = Im\left(\frac{Z_0}{3}\right) - \frac{1}{C\omega} = \frac{R_0^2 L_0 \omega}{3(R_0^2 + (L_0\omega)^2)} - \frac{1}{C\omega} \Rightarrow \boxed{C = 1,9nF}$$