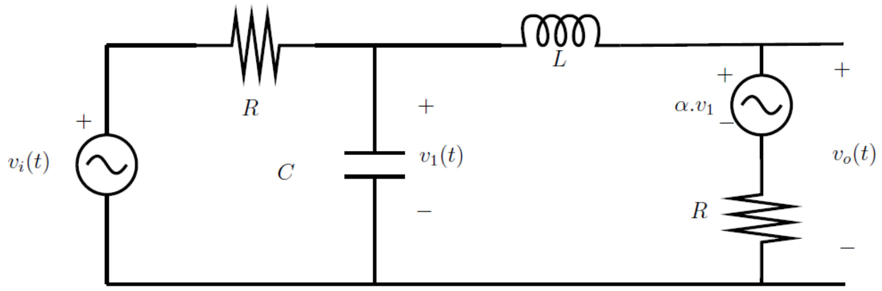
Sistemas Lineales 1

Examen de diciembre de 2018

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1



Se considera el sistema de la figura.

a) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$, observando que resulta ser real racional estrictamente propia, de orden 2 en el denominador y orden 1 en el numerador.

b) Simplificar la expresión de $H(j\omega)$ para $\alpha = -14$ y

$$\frac{R}{L} = \frac{1}{RC} = \frac{\omega_0}{4} > 0$$

y dibujar los Diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase de $H(j\omega)$, explicando detalladamente el proceso de obtención de los mismos.

c) Hallar $H(j\omega_0)$.

d) Hallar la ganancia en continua del sistema, expresada en db.

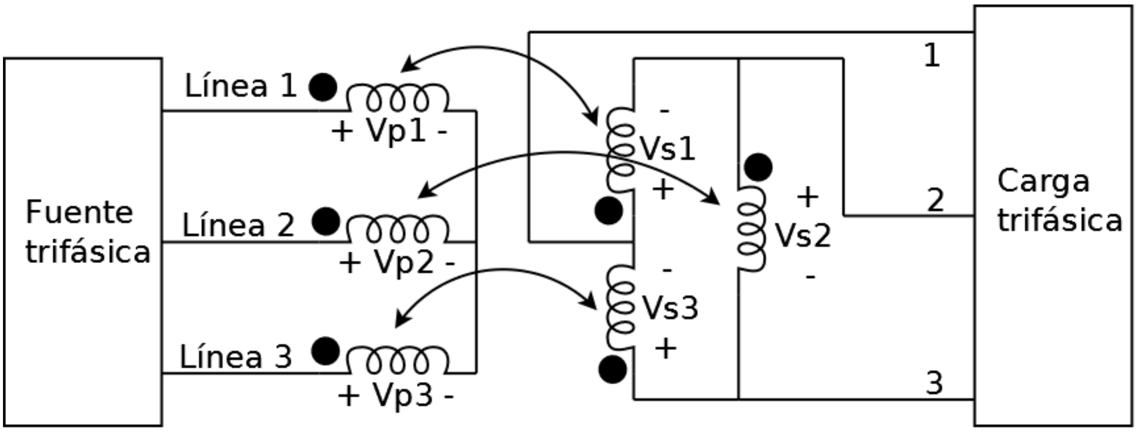
e) Hallar, si existe, una frecuencia de trabajo ω_1 a la cual el sistema presente una ganancia de $0db$.

f) Hallar, si existe, una frecuencia de trabajo a la cual la salida en régimen del sistema esté en contrafase con la entrada.

g) Hallar, si existe, una frecuencia de trabajo ω_3 que cumpla que si la entrada del sistema es $v_i(t) = A\cos(\omega_3 t)$, la salida en régimen del sistema es de la forma $v_o(t) = A.\cos(\omega_3 t + \varphi)$, con φ a determinar.

Justificar las aproximaciones que se realizan.

Problema 2



Se tiene un sistema trifásico de fuentes 50Hz. Es equilibrado y perfecto y entrega una tensión compuesta (entre líneas) de $10392\,V$ eficaces. Se tiene también una carga trifásica equilibrada con factor de potencia de 0,8 inductivo. Se decide modelar la carga como tres impedancias Z idénticas, cuyo esquema de conexión puede elegirse. Estas impedancias Z están formadas por el paralelo de una resistencia R y una inductancia L. Para determinar estos parámetros del modelo, se realiza un ensayo mediante el circuito que se indica en la figura. Los transformadores son ideales, de relación de vueltas primario-secundario:

$$\frac{n_1}{n_2} = 26$$

Se colocan dos vatímetros luego de los secundarios, siguiendo el *método de los dos vatímetros*. La lectura de ambos vatímetros es

$$W_1 = 510W \qquad , \qquad W_2 = 1290W$$

Se pide:

(a) Determinar R y L (indicar bien cómo modela la carga trifásica).

(b) Realizar un diagrama fasorial en el que se muestren las tensiones de la fuente, las corrientes por los primarios, las tensiones de los secundarios y las corrientes que entran a la carga.

(c) Compensar la potencia reactiva consumida a la fuente trifásica. Indicar qué elementos colocaría, de qué valor y el respectivo esquema de conexión.

Sistemas Lineales 1

Examen de diciembre de 2018

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

Se considera un sistema de entrada $x(t)$ y respuesta $y(t)$, definido por la ecuación diferencial

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = x$$

(a) Obtener la respuesta al impulso $h(t)$.

(b) Obtener la transferencia $H(f)$.

(c) A partir de las partes anteriores, obtener la respuesta en régimen $y(t)$ a la entrada $x(t) = \cos(3t)$.

Sugerencia: puede usarse que $\mathcal{F}[Y(t)e^{-\alpha t}](f) = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$.

Pregunta 2

(a) Hallar la transformada de Fourier de un pulso de ancho $2T$, centrado en 0 y de altura 1.

(b) Calcular la integral impropia

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(\alpha x)}{x} dx$$

con $\alpha > 0$ y mostrar que el resultado no depende de α.

Pregunta 3

Se condidera un circuito lineal, de transferencia en régimen $H(j\omega)$, que tiene un comportamiento de tipo pasabajos, de frecuencia de corte $40MHz$. Se excita este sistema con una tensión periódica, que consiste en una onda cuadrada simétrica (igual porción de periodo en cada nivel de tensión), de $10MHz$ y $20V$ de amplitud.

Para cada una de las siguientes afirmaciones, indicar si es verdadera o falsa, fundamentando la respuesta.

(a) La salida tiene valor medio nulo.

(b) La salida es una señal periódica.

(c) La salida es prácticamente una sinusoide pura.

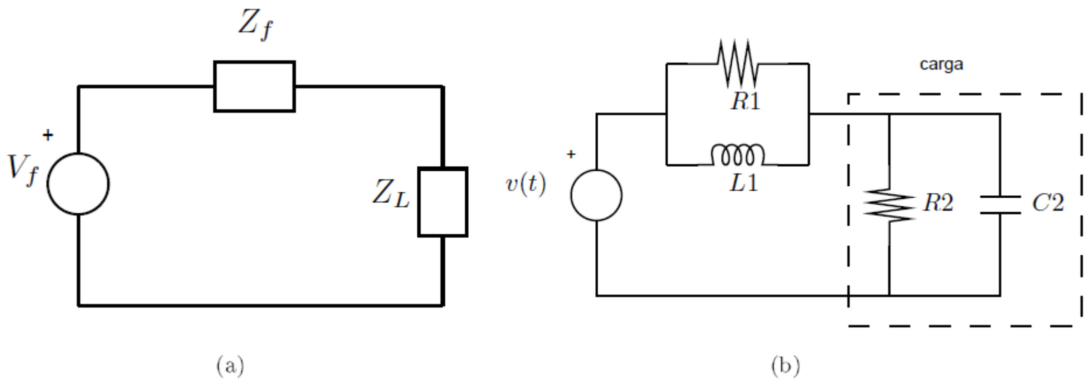
(d) La salida contiene armónicos pares no nulos.

(e) La potencia media de la salida es menor que la de la entrada.

(f) La potencia media de la salida es igual a la de la entrada.

Pregunta 4

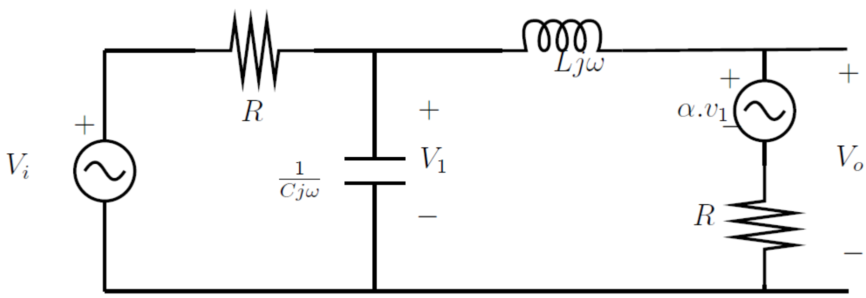
(a) El circuito de la figura de la izquierda está funcionando en régimen sinusoidal, V_f y Z_f conocidos y Z_L a determinar. Deducir la relación entre Z_f y Z_L que asegure que se disipa la máxima potencia activa en la impedancia Z_L.



(b) Para el circuito de la figura de la derecha, con excitación $v(t) = V_0.\cos(\omega_0 t)$, con L_1 dado y $R_1 = R_2$, hallar el valor del condensador C_2 que asegure que se disipa la máxima potencia activa en la carga.

Solución

Problema 1



a) Consideremos el circuito en fasores de arriba, para una frecuencia de trabajo genérica ω. Apliquemos el método de los nudos. Entonces, podemos plantear la Ley de Kirchoff de corrientes en el nudo central.

$$\frac{V_i - V_1}{R} = V_1 Cj\omega + \frac{V_1 - V_o}{Lj\omega} \Rightarrow V_i Lj\omega = V_1(Lj\omega + RLC(j\omega)^2 + R) - RV_o$$

Por otro lado, planteamos el nudo en V_o

$$\frac{V_1 - V_o}{Lj\omega} = \frac{V_o - \alpha.V_1}{R} \Rightarrow V_1 = \frac{(R + Lj\omega)}{(R + \alpha Lj\omega))} V_o$$

(Observar que en la primera ecuación, podría haber sido más sencillo plantear la corriente por la inductancia como $\frac{V_o - \alpha.V_1}{R}$). Sustituyendo V_1 en la primera ecuación, despejamos el cociente V_o/V_i.

$$H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{(R + \alpha Lj\omega)}{RLC(j\omega)^2 + (R^2C + L)(j\omega) + (2 - \alpha)R} = \frac{\alpha L}{RLC} \cdot \frac{\left((j\omega) + \frac{R}{\alpha L}\right)}{(j\omega)^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC}\right)(j\omega) + \frac{2-\alpha}{LC}}$$

b) Para $\alpha = -14$

$$H(j\omega) = \frac{-14}{RC} \cdot \frac{\left((j\omega) - \frac{R}{14L}\right)}{(j\omega)^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC}\right)(j\omega) + \frac{16}{LC}}$$

Para $\frac{R}{L} = \frac{1}{RC} = \frac{\omega_0}{4} > 0$, tenemos que

$$\frac{1}{LC} = \frac{\omega_0^2}{16} \Rightarrow \frac{2 - \alpha}{LC} = \frac{16}{LC} = \omega_0^2$$

Entonces

$$H(j\omega) = -\frac{7}{2} \cdot \frac{\omega_0 \left(j\omega - \frac{\omega_0}{56}\right)}{(j\omega)^2 + \left(\frac{\omega_0}{2}\right)(j\omega) + \omega_0^2} = -\frac{7}{2} \cdot \frac{\omega_n \left(j\omega - \frac{\omega_n}{56}\right)}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

con $\omega_n = \omega_0$ y $\zeta = \frac{1}{4}$, por lo que el denominador es de segundo orden, con raíces complejas conjugadas.

Para la construcción de los Diagramas de Bode asintóticos, las frecuencias críticas son: $\frac{\omega_n}{56}$ y ω_n. Realizamos una aproximación por bandas:

- $\omega \ll \frac{\omega_n}{56}$, entonces

$$H(j\omega) \approx -\frac{7}{2} \cdot \frac{\omega_n \left(-\frac{\omega_n}{56}\right)}{\omega_n^2} = \frac{7}{112} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| & \approx & 20 \log(\frac{7}{112})\ db \\ arg\ H(j\omega) & \approx & 0^o\ (\pm 2k\pi) \end{cases}$$

- $\frac{\omega_n}{56} \ll \omega \ll \omega_n$, entonces

$$H(j\omega) \approx -\frac{7}{2}.\frac{\omega_n\,(j\omega)}{(\omega_n^2)} = -\frac{7j\omega}{2\omega_n} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| & \approx & 20\log(\frac{7}{2\omega_n}) + 20\log(\omega)\; db \\ arg\; H(j\omega) & \approx & -90^o\; (\pm 2k\pi) \end{cases}$$

- $\omega \gg \omega_n$, entonces

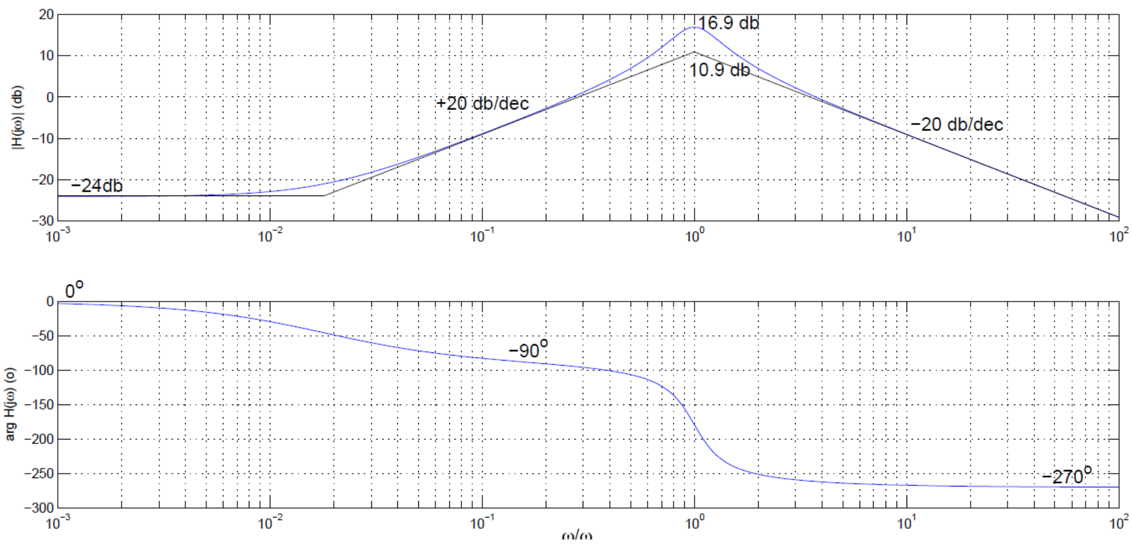
$$H(j\omega) \approx -\frac{7}{2}.\frac{\omega_n\,(j\omega)}{(j\omega)^2} = -\frac{7\omega_n}{(2j\omega)} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| & \approx & 20\log(\frac{7\omega_n}{2}) - 20\log(\omega)\; db \\ arg\; H(j\omega) & \approx & +90^o\; (\pm 2k\pi) \end{cases}$$

A partir de este análisis, construimos los Diagramas de Bode asintóticos. Debemos determinar si la variación de fase de π radianes en la Ãºltima transición es con adelanto o atraso de fase. Para ello, calculamos el argumento de H en una frecuencia intermedia. Elegimos $\omega = \omega_n$.

$$H(j\omega_n) = -\frac{7}{2}.\frac{\omega_n\,(j\omega_n - \frac{\omega_n}{56})}{(j\omega_n)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega_n) + \omega_n^2} = -\frac{7}{2}.\frac{(j - \frac{1}{56})}{2\zeta j} = 7j\left(j - \frac{1}{56}\right) \approx -7$$

$$\Rightarrow arg\; H(j\omega_n) \approx \pm\pi$$

de donde vemos que la fase se retrasa π radianes, lo que es consistente con $\zeta > 0$. La siguiente figura muestra los Diagramas de Bode asintóticos y reales de H.



c) $H(j\omega_0) \approx 7\angle 180^o$.

d) La ganancia en continua del sistema, corresponde con el valor asintótico en baja frecuencia $H(j0) = \frac{7}{112} \approx -24db$.

e) Si a alguna frecuencia de trabajo ω_1 el sistema presenta una ganancia de $0db$, entonces se debe cumplir que $|H(j\omega_1)| = 1$. Entonces

$$|H(j\omega_1)|^2 = \frac{49}{4}.\frac{\omega_n^2\left(\omega^2 - \frac{\omega_n^2}{56^2}\right)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{49}{4}\omega_n^2\omega^2 - \frac{49\omega_n^4}{112^2} = \omega_n^4 + \omega^4 - 2\omega_n^2\omega^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2 \Rightarrow$$

$$\omega^4 + \omega^2\omega_n^2\left(4\zeta^2 - 2 - \frac{49}{4}\right) + \omega_n^4\left(1 + \frac{49}{112^2}\right) = 0$$

Tenemos entonces una ecuación bicuadrada en ω, que se puede ser escrita así, poniendo $x = (\omega/\omega_n)^2$:

$$x^2 + x\left(4\zeta^2 - 2 - \frac{49}{4}\right) + \left(1 + \frac{49}{112^2}\right) = 0$$

Nos interesan las raíces positivas. De la observación del Diagrama de Bode de módulo, vemos que deben haber dos soluciones, una menor a 1 y otra mayor a 1. Las respectivas raíces resultan ser:

$$x = \begin{cases} 13,9 \\ \\ 0,07 \end{cases} \Rightarrow \omega_1 = \begin{cases} 3,7\omega_n \\ \\ 0,27\omega_n \end{cases}$$

f) De la continuidad del argumento de H y sus valores asintóticos de baja y alta frecuencia se deduce que sí existe. Los cálculos anteriores muestran que será una frecuencia muy cercana a ω_n, la que puede tomarse por una buena aproximación, dada la separación entre las frecuencias críticas, superior a una década.

g) La frecuencia buscada aquí es una de las halladas en la parte e), ya que una ganancia de $0db$ equivale a la igualdad de las amplitudes entre la entrada y la salida. Para la mayor de ellas, el respectivo valor es aproximadamente $\varphi = 98{,}5^o = -261{,}5^o$.

Problema 2

(a) Para modelar la carga trifásica con tres cargas idénticas, tenemos que decidir si vamos a hacer un modelo en estrella o en triángulo. Esta elección no es crítica y requiere simplemente que luego se trabaje de forma consistente. Considerando que en el circuito los secundarios de los transformadores dan directamente la tensión compuesta que ve la carga, usaremos un modelo en triángulo. Además, tenemos que elegir cómo modelar cada carga del triángulo. Usaremos para la carga un modelo paralelo ($Z = R||Lj\omega$). Si bien esto lo expresa la letra, debe quedar claro que en principio es una elección arbitraria.

Con base en el *método de los dos vatímetros*, sabemos que la potencia total trifásica consumida por la carga es $P_T = W_1 + W_2 = 1800W$, por lo que cada carga consume $P = 600W$. Como ya dijimos, la tensión en bornes de la carga (en triángulo) es la de los secundarios de los transformadores. Hallemos estas tensiones. Al estar el sistema equilibrado, las tensiones del primario tienen el mismo módulo y están desfasadas 120^o entre sí. Como la fuente trifásica entrega una tensión compuesta de $10392V$ eficaces, el módulo de la tensión del primario $|V_P|$ será $\sqrt{3}$ menor, prácticamente igual a $6000V$ eficaces. Por lo tanto, en los secundarios, obtenemos una tensión de valor eficaz $|V_S|$ igual a $6000 * n_2/n_1 \approx 230V$. Con el modelo en triángulo, y con $Z = R||Lj\omega$, tenemos que R disipa toda la activa, por lo que:

$$P = 600W = \frac{|V_S|^2}{R} \Rightarrow R = \frac{|V_S|^2}{P} \approx 88\Omega$$

Con el factor de potencia podemos sacar la potencia reactiva, ya que

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{|S|} \Rightarrow |S| = \frac{P}{\cos(\varphi)} = 750VA$$

De la identidad $|S|^2 = P^2 + Q^2$ obtenemos que la potencia reactiva vale

$$Q = \sqrt{|S|^2 - P^2} = 450VAR$$

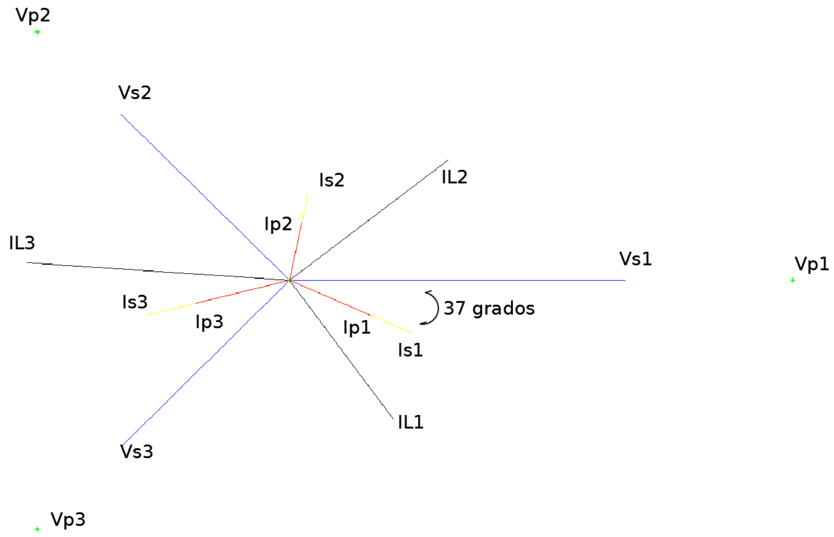
La reactiva es positiva, ya que el factor de potencia es inductivo. Toda la reactiva la consume la inductancia, por lo que

$$Q = 450VAR = \frac{|V_S|^2}{L\omega} \Rightarrow L = \frac{|V_S|^2}{Q\omega} \approx 0,37Hy$$

El argumento Φ de Z podemos calcularlo directamente de la proporción reactiva/activa:

$$tan(\Phi) = \frac{Q}{P} \Rightarrow \Phi = atan\left(\frac{Q}{P}\right) \approx 37^o$$

(b) Dibujamos el diagrama fasorial que ingluye corrientes y tensiones del primario, tensiones del secundario y corrientes de línea que entran a la carga. Las proporciones entre ambas lados del trafo no se mantuvieron, para que en el bosquejo se pudiera visualizar bien. Se tuvo en cuenta que las corrientes del primario son, a menos de una constante de proporcionalidad, opuestas a las del secundario, es decir, colineales con las corrientes que circulan por las cargas, por lo que el ángulo entre las tensiones y las corrientes del primario es el de la impedancia de carga. Las corrientes por las líneas salen por diferencia, teniendo un módulo $\sqrt{3}$ veces más grande que las corrientes del secundario, y estando desfasadas 30^o respecto de éstas.



(c) La potencia activa consumida a las fuentes es la misma que la consumida por la carga, ya que los transformadores ideales no consumen nada. Siendo el sistema inductivo, para compensar la reactiva debemos colocar condensadores que entreguen la reactiva necesaria para que la tensión y la corriente de cada fuente sean colineales. Colocamos un triángulo de condensadores en paralelo con la carga. Si lo ponemos del lado de los secundarios, la tensión en bornes de cada condensador será de $230V$ eficaces, lo que requiere un valor de condensador tal que

$$Q_C = -|V_S|^2.C\omega = -Q = -450VAR \Rightarrow C = \frac{450VAR}{(230V)^2\omega} \approx 27\mu F$$

Si pusiéramos los condensadores del lado de los primarios, la tensión en bornes en cada condensador sería de $10392V$ eficaces, por lo que el valor de condensador necesario sería de

$$C = \frac{450VAR}{(10392V)^2\omega} \approx 13nF$$