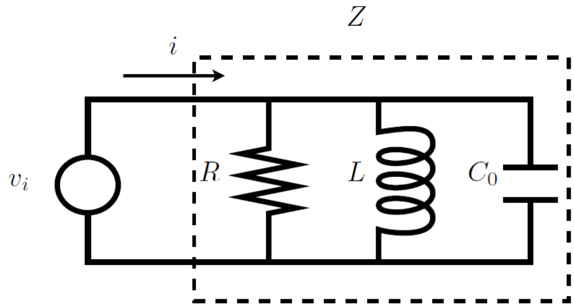
Sistemas Lineales 1

Examen de diciembre de 2017

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

Se considera el circuito de la figura, funcionando en régimen sinusoidal, con tensión de entrada $v_i(t) = V_0 \cos(\omega_0 t)$. Tanto R como L son conocidos, mientras que C es una capacidad de valor ajustable.



(a) Calcular los fasores I_R, I_L e I_C asociados a las corrientes que circulan por cada componente.

(b) Calcular la impedancia vista por la fuente.

(c) Representar en un diagrama fasorial la tensión de alimentación, las corrientes de la parte anterior y la corriente que entrega la fuente.

(d) Dibujar el lugar geométrico de los puntos del plano donde se encuentra el fasor asociado a la corriente que entrega la fuente, al variar C desde 0 a infinito.

(e) Determinar C para minimizar el módulo de la potencia aparente que entrega la fuente.

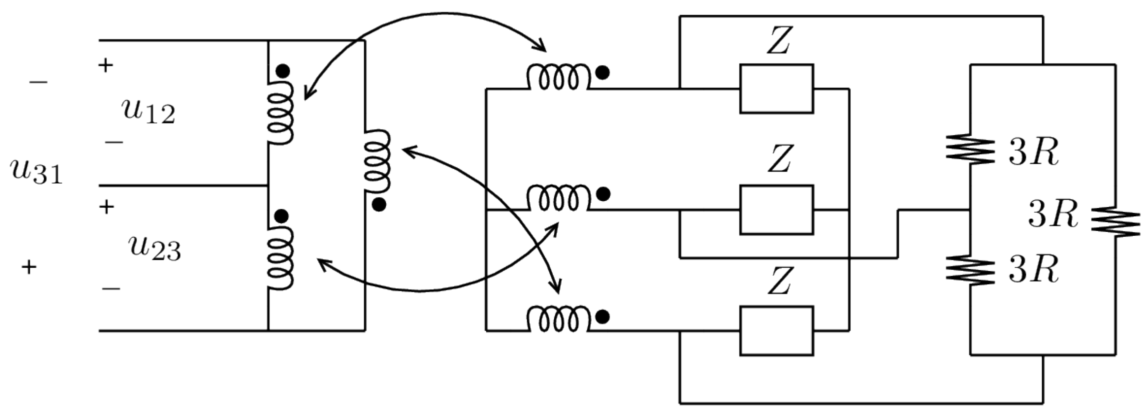
(f) Sabiendo que $R/L > \omega_0$, determinar C para que la corriente enregada por la fuente sea $i_f(t) = I_0 \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)$. Hallar también el valor de I_0.

En el sistema trifásico de la figura, el sistema de tensiones compuestas es equilibrado y perfecto, de valor eficaz V y pulscación ω_0. Las impedancias Z son como en la parte **(g)**. El transformador trifásico es ideal, con relación de transformación N_1/N_2.

(g) Calcular las corrientes de línea que llegan al primario del transformador.

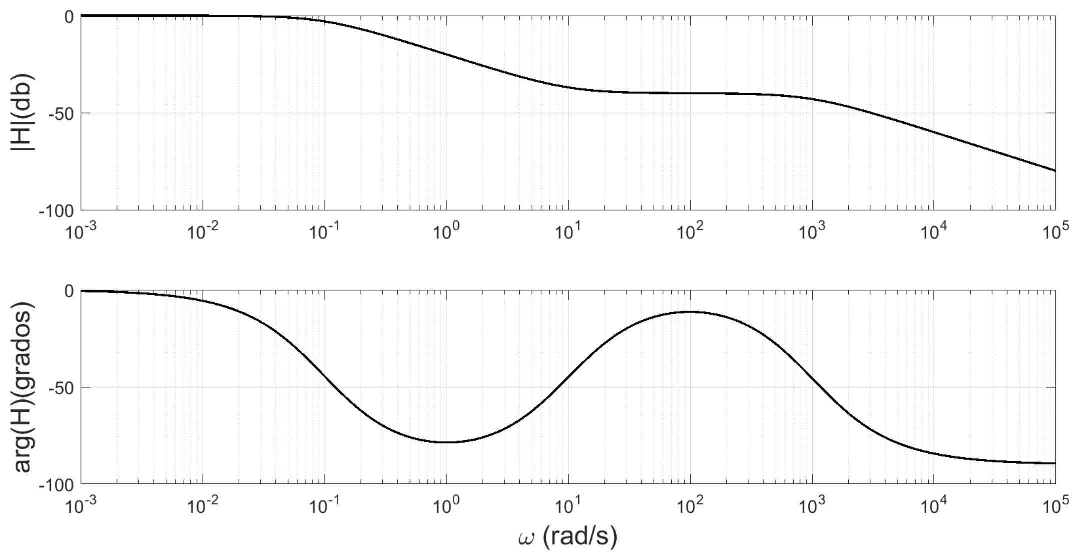
(h) Calcular las potencias activa, reactiva y aparente que entrega el sistema de fuentes.

(i) Compensar la potencia reactiva consumida por la carga, colocando un elemento de compensación en el primario del transformador. Indique qué elemento colocaría, de qué valor, y el esquema de conexión.



Problema 2

Se tienen los siguientes diagramas de Bode de una transferencia en régimen $H(j\omega)$:

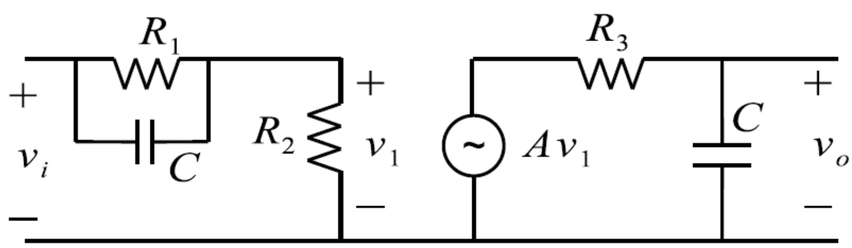


(a) Se sabe que

$$H(j\omega) = \frac{\omega_0(j\omega + \alpha)}{(j\omega + \beta)(j\omega + \gamma)} \quad \text{con } \omega_0,\ \alpha,\ \beta \text{ y } \gamma \text{ reales y positivos.}$$

Justificando, asignar valores razonables a ω_0, α, β y γ.

(b) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal del circuito de la figura.



(c) Se sabe que $100.R_1 = R_3$ y $\omega_0 = \frac{1}{R_1 C} = 10 rad/s$. Hallar la relación entre R_1 y R_2, y el valor de A que aseguran que la transferencia del circuito es la $H(j\omega)$ de la parte a).

(d) Hallar **exáctamente** la frecuencia ω_c a la cual el circuito introduce en régimen una atenuación a la salida de $2db$.

Sistemas Lineales 1
Examen de diciembre de 2017

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

(a) Enunciar y demostar el Teorema de Blondell.

(b) Describir el método de los dos vatímetros.

Pregunta 2

Se considera la transferencia en régimen sinusoidal

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

siendo $-1 < \zeta < 1$ y $\omega_n > 0$.

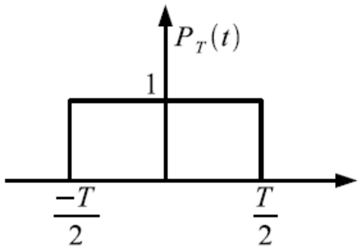
(a) Deducir los diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase, **explicando claramente su obtención**.

(b) A los diagramas de la parte anterior, incorporar el valor exacto de $H(j\omega_n)$, **explicando claramente el rol del parámetro** $\zeta \in (-1, 1)$.

(c) Bosquejar los diagramas reales.

(d) Hallar ζ positivo para que $|H(j\omega_n)| = 35db$.

Pregunta 3

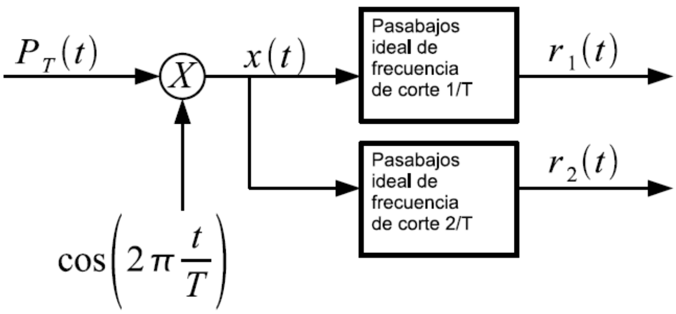


(a) Hallar la Transforamda de Fourier del pulso mostrado en la figura.

(b) Calcular la siguiente integral impropia y verificar que no depende de T:

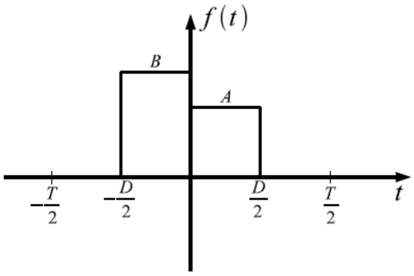
$$\int_{-\infty}^{\text{‘}\infty} \frac{sen(\pi x T)}{\pi x} dx$$

(c) Se considera el sistema de la siguiente figura. Bosquejar aproximadamente los espectros de las señales $x(t)$, $r_1(t)$ y $r_2(t)$. Indicar, **JUSTIFICANDO**, cuál de las dos señales $r_1(t)$ y $r_2(t)$ tiene más energía.



Pregunta 4

Se considera la función periódica de la figura, de periodo T.



(a) Calcular el valor medio de la señal.

(b) Calcular la potencia media.

(c) Para $D = \frac{T}{4}$, hallar la suma $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n^2|$ en función de A y B, siendo c_n el coeficiente de Fourier de orden n. No se pide calcular los coeficientes de Fourier

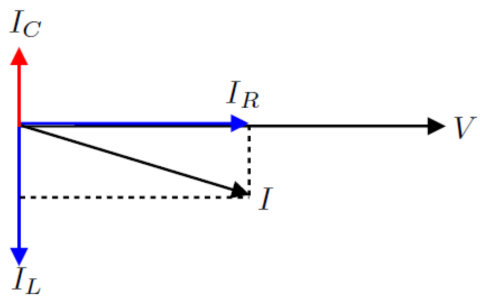
Solución

Problema 1

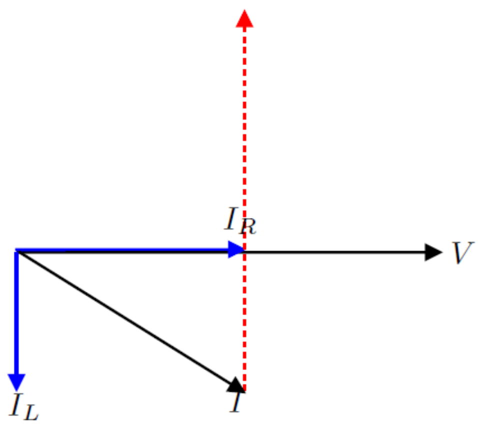
i) $I_R = \frac{V}{R}, I_L = \frac{V}{j\omega L}, I_R = Vj\omega C$.

ii) $Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C$.

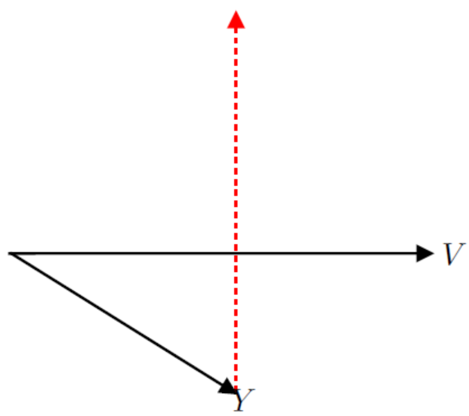
iii) $I = I_R + I_L + I_C$.



iv) La componente real no se ve modificada al variar C:



v) $Y = \frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$ donde la parte real tampoco se ve modificada:



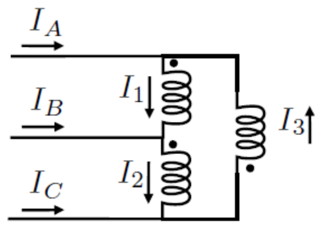
vi) Debo minimizar el módulo de la corriente I. Observando su lugar geométrico se puede ver que esto ocurre cuando $I = I_R$ $(I_L + I_C = 0)$. Entonces : $C = \frac{1}{\omega^2 L}$.

vii) Observando el lugar geométrico de Y, se debe cumplir que $\frac{1}{R} = -(\omega C - \frac{1}{\omega L})$, entonces $C = \frac{1}{\omega^2 L}(1 - \omega \frac{L}{R})$.

En este caso se caso se cumple que la parte real e imaginaria de I tienen el mismo módulo, por lo tanto $I_0 = \sqrt{2} I_R$.

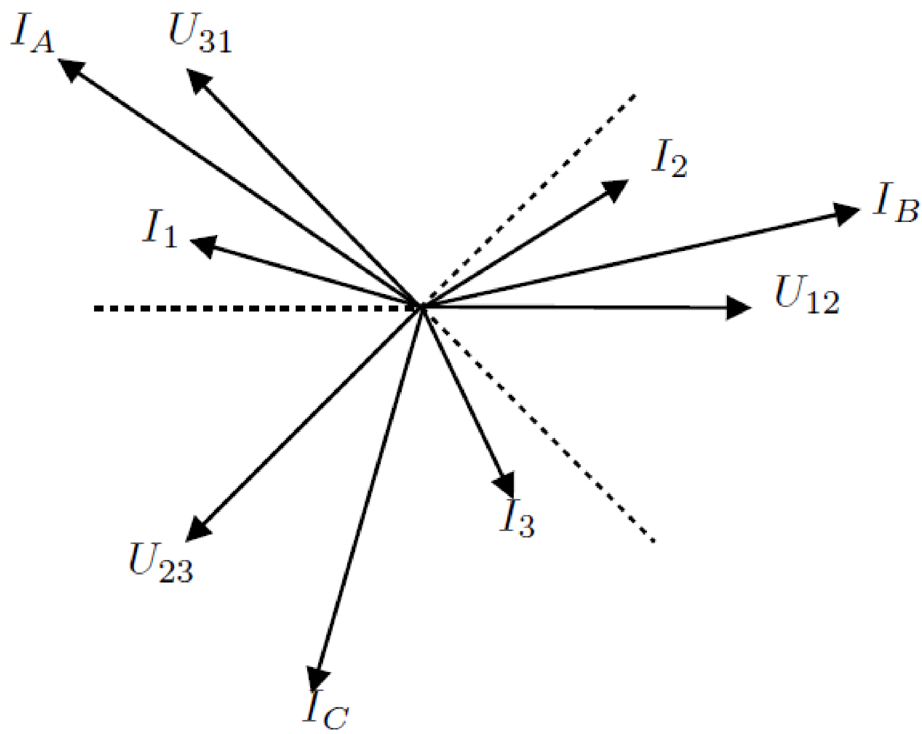
viii) Cada fase del secundario ve el paralelo de Z con R (equivalente estrella de la carga de la letra). Como $Z = R + jR$ restulta que $Z_v = R\frac{1+j}{2+j} = 0.63Re^{j18.43}$.

Nombrando las tensiones y corrientes como en la figura



$I_1 = -\frac{N_2}{N_1} I_1' = -\frac{N_2}{N_1}\frac{V_1'}{Z_v} = -(\frac{N_2}{N_1})^2 \frac{U_{12}}{Z_v}$.

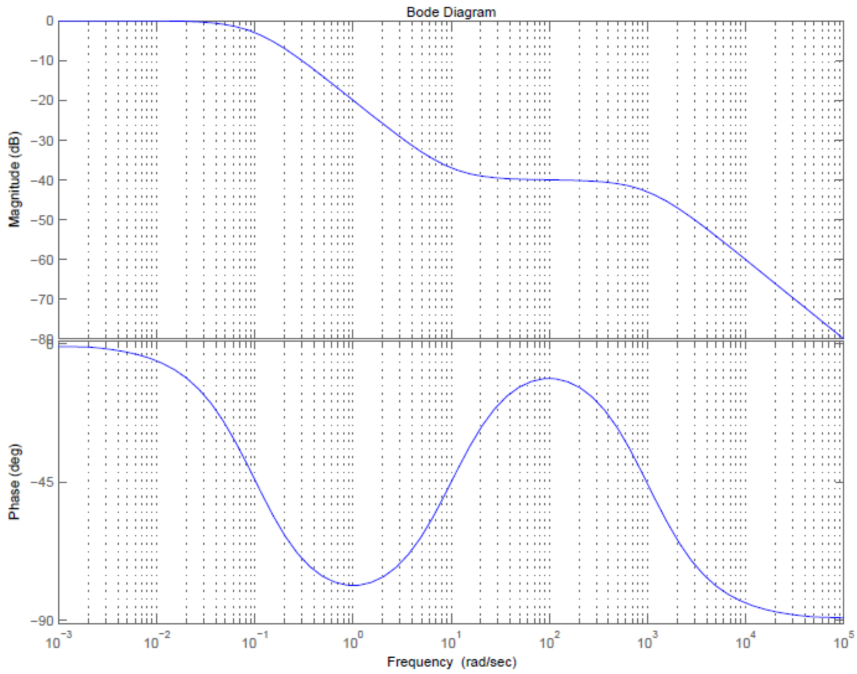
Las corrientes por cada fase de la fuente, se obtienen a partir de las corrientes por el primario del tranformador (I_1, I_2, I_3) según el siguiente diagrama fasorial.



ix) La potencia que entrega el sistema de fuentes es la misma que consumen las cargas, de este modo: $S = 3\frac{(\frac{N_2}{N_1}|U|)^2}{Z_v} = P + jQ$.

x) La fase de Z_v muestra que la carga es inductiva, por esta razón es necesario compensar la reactiva con una batería de condensadores. Si coloco un triángulo de condensadores idénticos, del lado de la fuente, la capacidad que los mismos deben tener es: $C = \frac{Q}{3\omega|U|^2}$

Problema 2



(a) Buscamos ω_0, α, β y γ positivos de forma de aproximar razonablemente los diagramas de bode de módulo y fase dados, con la transferencia

$$H(j\omega) = \frac{\omega_0(j\omega + \alpha)}{(j\omega + \beta)(j\omega + \gamma)}$$

En continua, y en baja frecuencia, el sistema aporta una ganancia constante de $0db$, correspondiente a $H(j0) = \frac{\omega_0.\alpha}{\beta\gamma} = 1$.

Al aumentar la frecuencia, aparece una caida en la ganancia y un retraso de fase, lo que está asociado a la aparición de una singularidad simple en el denominador ($\beta \approx 0,1rad/s$).

Esa caida se estabiliza y la fase tiende a aumentar, lo que es consistente con la presencia de una singularidad simple en el numerador, lo que nos da un valor de $\alpha \approx 10rad/s$.

Al aumentar la frecuencia, encotnramos otra caida en la ganancia, y un nuevo retraso de fase, asociado a una singularidad en el denominador, lo que nos da $\gamma \approx 1000rad/s$.

Finalmente, de la ganancia en continua, obtenemos un valor adecuado para ω_0:

$$\omega_0 = H(j0).\frac{\beta\gamma}{\alpha} = \frac{0,1 \times 1000}{10} rad/s = 10rad/s$$

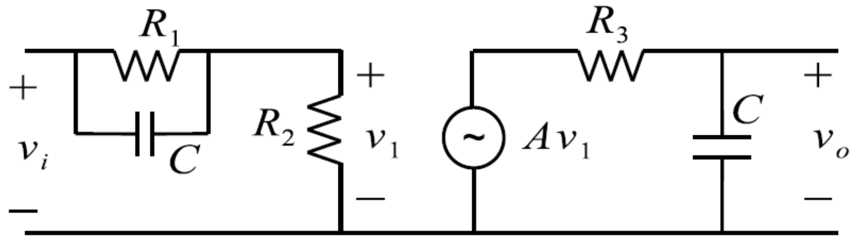
Nótese que las singularidades están a dos décadas o más entre sí, lo que facilita el análisis, ya que se puede hacer un análisis asintótico bastante preciso. En las singularidades, la fase es prácticamente -45^o. Las caidas de ganancia corresponde a $-20db/dec$.

Entonces, obtenemos $\alpha = \omega_0$, $\beta = \omega_0/100$ y $\gamma = 100\omega_0$, de donde

$$H(j\omega) = \frac{\omega_0(j\omega + \omega_0)}{(j\omega + \omega_0/100)(j\omega + 100\omega_0)}$$

(b) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal del circuito de la figura.

El circuito comprende dos mallas, acopladas a traés de la fuente de tensión dependiente de la



tensión v_1. Pasamos al ircuito equivalente en fasores. Aplicando un divisor de tensión en la malla de la entrada, obtenemos

$$V_1(j\omega) = \left[\frac{R_2}{R_1\left\|\frac{1}{Cj\omega}\right. + R_2}\right] V_i(j\omega) = \frac{R_2(1+R_1Cj\omega)}{R_1+R_2+R_2R_1Cj\omega}.V_i(j\omega)$$

Haciendo nuevamente un divisor de tensión a la salida, obtenemos que

$$V_o(j\omega) = \left[\frac{\frac{1}{Cj\omega}}{R_3+\frac{1}{Cj\omega}}\right].A.V_1(j\omega) = \frac{AR_2(1+R_1Cj\omega)}{(R_1+R_2+R_2R_1Cj\omega)(1+R_3Cj\omega)}.V_i(j\omega)$$

De donde

$$H(j\omega) = \frac{A}{R_3C}.\frac{\left(\frac{1}{R_1C}+j\omega\right)}{\left(\frac{R_1+R_2}{R_2R_1C}+j\omega\right)\left(\frac{1}{R_3C}+j\omega\right)}$$

(c) Se sabe que $100.R_1 = R_3$ y $\omega_0 = \frac{1}{R_1C} = 10rad/s$. Hallar la relación entre R_1 y R_2 el valor de A que aseguran que la transferencia del circuito es la $H(j\omega)$ de la parte b).

Entonces, $\alpha = \omega_0 = \frac{1}{R_1C}$. Tenemos que $\frac{1}{R_3C} = \frac{1}{100.R_1C} = \frac{\omega_0}{100}$. De donde $\omega_0 = \frac{A}{R_3C} = \frac{A}{100}\omega_0$ y obtenemos $A = 100$. Podemos escribir

$$H(j\omega) = \frac{\omega_0.(\omega_0+j\omega)}{\left(\frac{R_1+R_2}{R_2}.\omega_0+j\omega\right)\left(\frac{\omega_0}{100}+j\omega\right)} = \frac{\omega_0(j\omega+\omega_0)}{(j\omega+\omega_0/100)(j\omega+100\omega_0)}$$

y obtenemos $\frac{R_1+R_2}{R_2} = 100$ (por ejemplo, $R_1 = 99R_2$).

(d) Hallar **exáctamente** la frecuencia ω_c a la cual el circuito introduce en régimen una atenuación a la salida de $2db$.

Supongamos una entrada sinusoidal $v_i(t) = E\cos(\omega_c t)$. La respectiva salida en régimen será

$$v_o(t) = E.|H(j\omega_c)|\cos(\omega_c t + arg\,(H(j\omega_c)))$$

Para tener una atenuación de $2db$, debe ser $|H(j\omega_c)| = -2db$, de donde $20\log[|H(j\omega_c)|] = -2$ (logaritmo en base 10). Entonces

$$|H(j\omega_c)| = 10^{-\frac{1}{10}} \Rightarrow |H(j\omega_c)|^2 = 10^{-\frac{2}{10}} = \alpha < 1$$

Definamos K tal que $\omega_c = K.\omega_0$. Entonces

$$|H(jK\omega_0)|^2 = \alpha^2 = \frac{\omega_0^2(K^2\omega_0^2+\omega_0^2)}{\left(K^2\omega_0^2+\frac{\omega_0^2}{10^4}\right)(K^2\omega_0^2+10^4\omega_0^2)} = \frac{(K^2+1)}{\left(K^2+\frac{1}{10^4}\right)(K^2+10^4)}$$

Podemos plantear una ecuación bicuadrada en la variable K^2:

$$\alpha^2.\left(K^2+\frac{1}{10^4}\right)(K^2+10^4) = (K^2+1) \Rightarrow \alpha^2K^4 + K^2\left[\alpha^2\left(10^4+\frac{1}{10^4}\right)-1\right] + (\alpha^2-1) = 0$$

Como el término independiente es negativo, hay una raíz positiva y otra negativa (en K^2). Sólo consideramos la positiva, obteniendo:

$$\omega_c \approx 7,6\times10^{-3}\omega_0$$