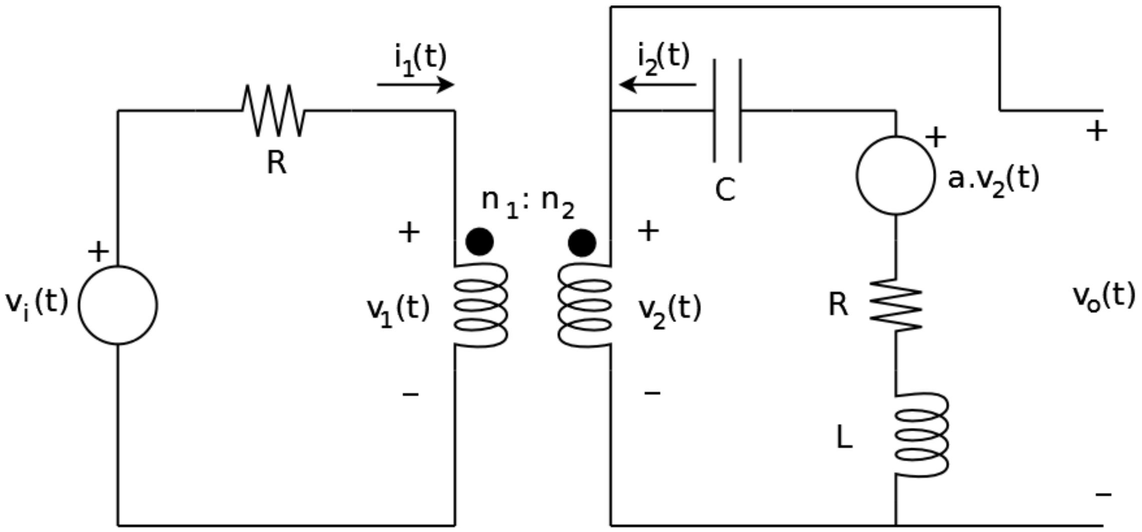
Sistemas Lineales 1

Examen de diciembre de 2016

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1



Se considera el circuito de la figura, funcionando en régimen sinusoidal. El transformador es ideal y a es un parámetro a determinar.

(a) Hallar la impedancia vista por la fuente en régimen sinusoidal:

$$Z_v(j\omega) = \frac{V_i(j\omega)}{I_1(j\omega)}$$

Se sugiere primero hallar $Z_{eq}(j\omega)$, la impedancia vista desde el primario del transformador.

(b) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal: $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$, expresándola como un cociente de polinomios en $(j\omega)$.

(c) Para $RC = \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_0}$ y $\frac{n_1}{n_2} = 3$, hallar a para que $H(j\omega)$ sea de la siguiente forma

$$H(j\omega) = K_1.\frac{\omega_0^2 + \omega_0(j\omega) + (j\omega)^2}{(j\omega + K_2\omega_0)^2}$$

con K_1 y K_2 reales positivos a definir.

(d) Hallar los diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase de $H(j\omega)$.

(e) i) Hallar las distancias **exactas**, en decibeles, entre el diagrama de Bode de módulo real y el asintótico, para la frecuencia ω_0 y también para una octava por encima y por debajo de ella.

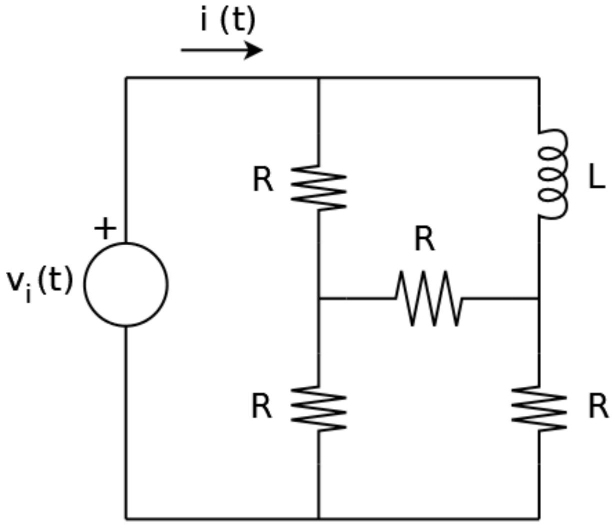
ii) Hallar la respuesta en régimen para la entrada $v_i(t) = A.\cos(2\omega_0 t + 30^o)$.

iii) Se quiere saber si existe alguna frecuencia de trabajo a la cual ante una entrada sinusoidal, el sistema responde en régimen con una sinusoide en cuadratura con la entrada. ¿Cómo estudiaría este problema?

Problema 2

Se considera el circuito de la figura, funcionando en régimen sinusoidal.

(a) Hallar la impedancia $Z(j\omega)$ vista por la fuente de tensión.



Se eligen valores adecuados de L y R, de forma tal que de ahora en adelante se tiene $Z(j\omega) = (30 + j3,4)\Omega$.

(b) Hallar las potencias activa, reactiva y aparente consumidas por la impedancia $Z(j\omega)$, para $v_i(t) = \sqrt{2}.220.V\cos(100\pi t)$.

(c) Si $L = 17mH$, hallar la amplitud de la expresión temporal de la corriente por la bobina.

(d) Compensar la potencia reactiva consumida a la fuente por la carga $Z(j\omega)$, indicando qué elemento colocaría, de qué valor y el respectivo el esquema de conexión.

(e) Se arma una carga trifásica, conectando en estrella tres impedancias idénticas de valor $Z(j\omega)$. Se alimenta dicha carga con una fuente trifásica equilibrada y perfecta, de tensión compuesta de $380V$ eficaces y $50Hz$.

i) Hallar las potencias activa, rectiva y aparente consumida a la fuente trifásica.

Se desea compensar la potencia reactiva consumida por la carga a la fuente trifásica.

ii) ¿Qué elementos colocaría? (Justificar!!).

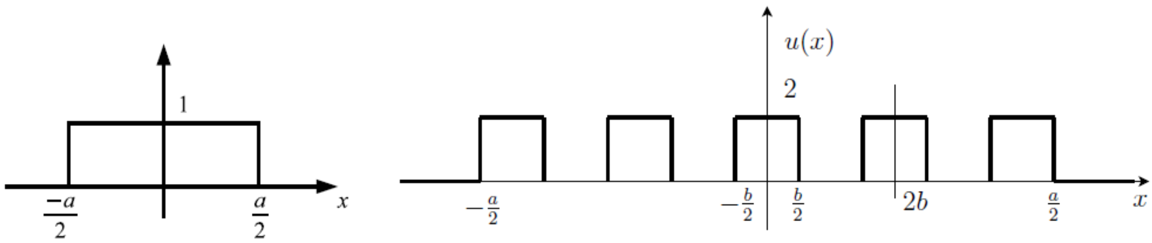
iii) Indicar cómo los conectaría, si se quiere que sean del mínimo valor posible. (Justificar!!).

Sistemas Lineales 1

Examen de diciembre de 2016

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1



(a) $P_a(x)$ (b) $u(x)$

(a) Se considera la función $P_a(x)$ que se muestra en la figura. Calcular su transformada de Fourier y bosquejarla.

(b) Se define $u(x)$ como se muestra en la figura, con $9b = a$. Probar que $u(x)$ se puede expresar como

$$u(x) = 2P_a(x).\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2nb) * P_b(x)\right]$$

(c) Calcular la transformada de Fourier de $u(t)$ y bosquejar prolijamente su espectro en la banda $[-\frac{1}{b}, \frac{1}{b}]$.

Sugerencia: recordar la identidad

$$\mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)\right] = \frac{1}{T}.\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Pregunta 2

Se considera la transferencia en régimen sinusoidal

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2(\zeta\omega_n)j\omega) + \omega_n^2}$$

siendo $0 < \zeta^2 < 1$ y $\omega_n > 0$.

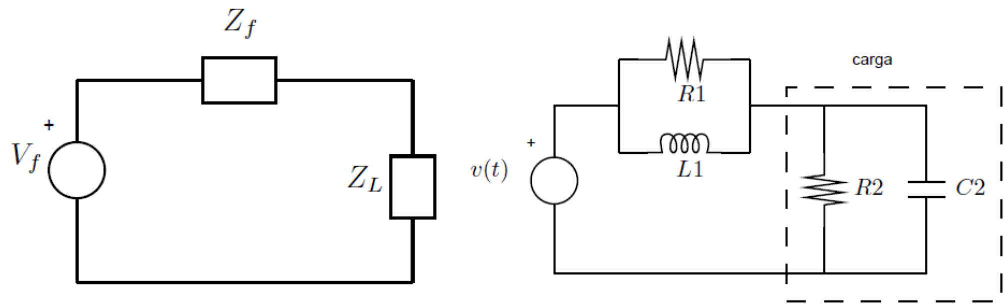
(a) Deducir los diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase, explicando claramente su obtención.

(b) A los diagramas de la parte anterior, incorporar el valor exacto de $H(j\omega_n)$, explicando claramente el rol del parámetro ζ.

(c) Bosquejar los diagramas reales.

(d) Hallar ζ positivo para que $|H(j\omega_n)| = 28db$.

Pregunta 3



(a) (b)

(a) El circuito de la izquierda de la figura está funcionando en régimen sinusoidal. Deducir el valor que debe tener la impedancia Z_L en función de Z_f para que se disipe la máxima potencia posible en Z_L.

(b) El circuito de la derecha está funcionando en régimen sinusoidal, con $v(t) = V_0 . \cos(\omega_0 t)$. Para $R_1 = R_2$, hallar la relación entre L_1 y C_2 que asegure que se disipa la máxima potencia posible en la carga.

Pregunta 4

(a) Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función C^∞. Expresar la distribución $T(t) = \alpha(t).\delta''(t)$ como combinación lineal de δ, δ' y δ'' .

(b) Calcular

$$\left\langle (t^2 - t)\delta''(t), \cos(t) - \sin(t) \right\rangle$$

justificando primero que esta distribución puede actuar sobre funciones de soporte no acotado.

Solución

Problema 1

a) Siguiendo la sugerencia, calculamos la impedancia vista desde el primario del transformador.

$$Z_{eq} = \frac{V_1(j\omega)}{I_1(j\omega}$$

Las ecuaciones del transformador ideal son las siguientes:

$$\frac{V_1}{n_1} = \frac{V_2}{n_2} \qquad , \qquad n_1 I_1 + n_2 I_2 = 0$$

de acuerdo a las polaridades y sentidos de la figura. Entonces

$$V_1 = \frac{n_1}{n_2} V_2 \qquad , \qquad I_1 = c$$

de donde

$$Z_{eq} = \frac{\frac{n_1}{n_2} V_2}{\frac{n_1}{n_2} V_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{V_2}{-I_2}$$

De la malla del secundario obtenemos

$$V_2 = -I_2 \frac{1}{Cj\omega} + aV_2 - I_2(R + Lj\omega) \Rightarrow (1-a)V_2 = -I_2 \left(\frac{1}{Cj\omega} + R + Lj\omega\right)$$

de donde

$$\boxed{Z_{eq}(j\omega) = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \left[\frac{1 + RC(j\omega) + LC(j\omega)^2}{(1-a)Cj\omega}\right]}$$

La impedancia vista por la fuente es, entonces,

$$\boxed{Z_v(j\omega) = R + Z_{eq}(j\omega)}$$

b) En la malla del primario, podemos obtener V_1 en función de V_i planteando el divisor de tensión:

$$V_1(j\omega) = \frac{Z_{eq}}{r + Z_{eq}} V_i(j\omega)$$

Operando, llegamos a

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right) \left[1 + RC(j\omega) + LC(j\omega)^2\right]}{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 + \left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 + (1-a)\right] RC(j\omega) + \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 LC(j\omega)^2}}$$

c) A partir de ahora, $RC = \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_0}$ y $\frac{n_1}{n_2} = 3$. Entonces

$$H(j\omega) = \frac{3\left[1 + \frac{j\omega}{\omega_0} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}\right]}{9 + [10-a]\frac{j\omega}{\omega_0} + 9\frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}} = \frac{3\left[\omega_0^2 + \omega_0(j\omega) + (j\omega)^2\right]}{9\omega_0^2 + [10-a]\omega_0(j\omega) + 9(j\omega)^2}$$

El numerador ya tiene la forma deseada. Tenemos que hallar a de forma de lograr una raíz real doble en el denominador.

$$9\omega_0^2 + [10-a]\omega_0(j\omega) + 9(j\omega)^2 = K\left(j\omega + K_2\omega_0\right)^2 = K\left[(j\omega)^2 + 2K_2\omega_0(j\omega) + K_2^2\omega_0^2\right]$$

Identificando coeficientes, llegamos a

$$K = 9 \quad , \quad K.K_2^2 = 9 \quad , \quad 2.K.K_2 = 10 - a$$

Entonces $K = 9$, $K_2 = 1$ y $a = -8$. Con los valores hallados,

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{1}{3}.\frac{(j\omega)^2 + \omega_0(j\omega) + \omega_0^2}{(j\omega + \omega_0)^2}}$$

d) Para obtener los diagramas de Bode asintóticos, hacemos un análisis por bandas. La única frecuencia crítica es ω_0, tanto en el denominador como en el numerador. Seguramente la aproximación asintótica sea mala en unentorno de ω_0. En el denominador tenemos una raíz real doble. en el denominador, tenemos dos raÂº’ices complejas conjugadas, de módulo ω_0 y factor de amortiguamiento $\zeta = \frac{1}{2}$, por lo que no aporta sobretiro.

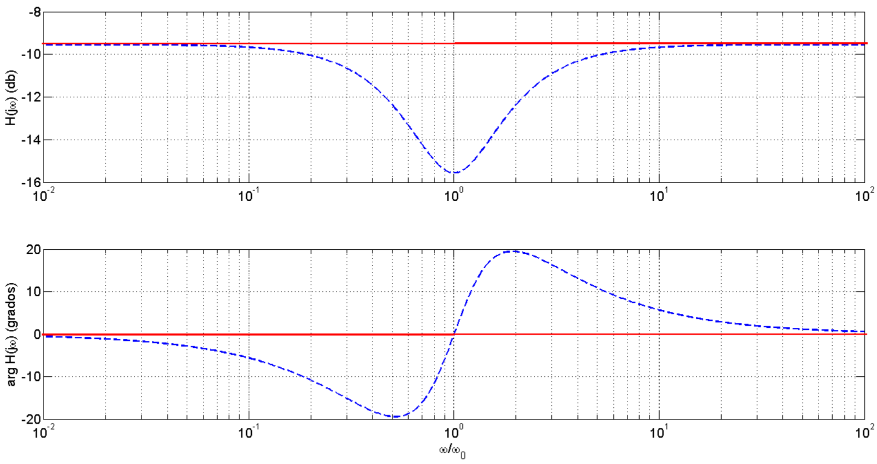
- $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow$

$$H(j\omega) \approx \frac{1}{3}.\frac{\omega_0^2}{(\omega_0)^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| & \approx & -20\log(3)db \approx -9,54 \\ arg(H(j\omega) & \approx & 0^o \end{cases}$$

- $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow$

$$H(j\omega) \approx \frac{1}{3}.\frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| & \approx & -20\log(3)db \approx -9,54 \\ arg(H(j\omega) & \approx & 0^o \end{cases}$$

La siguiente figura muestra los diagramas de Bode asintóticos (rojos) y reales (azules y punteados) de $H(j\omega)$. Como vemos, las aproximaciones de alta y baja frecuencia coinciden y son malas en un



entorno de ω_0.

e)-i) Calculemos $H(j\omega_0)$.

$$H(j\omega_0) = \frac{1}{3}.\frac{(j\omega_0)^2 + \omega_0(j\omega_0) + \omega_0^2}{(j\omega_0 + \omega_0)^2} = \frac{1}{3}.\frac{-1 + j + 1}{(j+1)^2} = \frac{1}{3}.\frac{j}{2j} = \frac{1}{6} \approx -15,56\, db\angle 0^o$$

La distancia con el diagrama real de módulo es: $|-9,54db + 15,56db| \approx 6db$. Miremos una octava por arriba de ω_0:

$$H(j2\omega_0) = \frac{1}{3}.\frac{(j2\omega_0)^2 + \omega_0(j2\omega_0) + \omega_0^2}{(j2\omega_0 + \omega_0)^2} = \frac{1}{3}.\frac{-4 + 2j + 1}{2j + 1} \approx -12,4db\angle 19^o$$

La distancia entre el real y asintótico de módulo vale $|-9,54db + 12,4db| \approx 2,9db$. Una octava por debajo sucede algo similar:

$$H(j\omega_0/2) = \frac{1}{3}.\frac{(j\omega_0/2)^2 + \omega_0(j\omega_0/2) + \omega_0^2}{(j\omega_0/2 + \omega_0)^2} = \frac{1}{3}.\frac{\frac{1}{4} + \frac{j}{2} + 1}{\frac{j}{2} + 1} \approx -12,4db\angle -19^o$$

y la distancia con el diagrama real de módulo es idéntica al caso de una octava por arriba. Obsérvese la consistencia de los valores anteriores con lo mostrado en la figura.

e)-ii) Para la entrada $v_i(t) = A\cos(2\omega_0 t + 30^o)$, la respectiva respuesta en régimen será

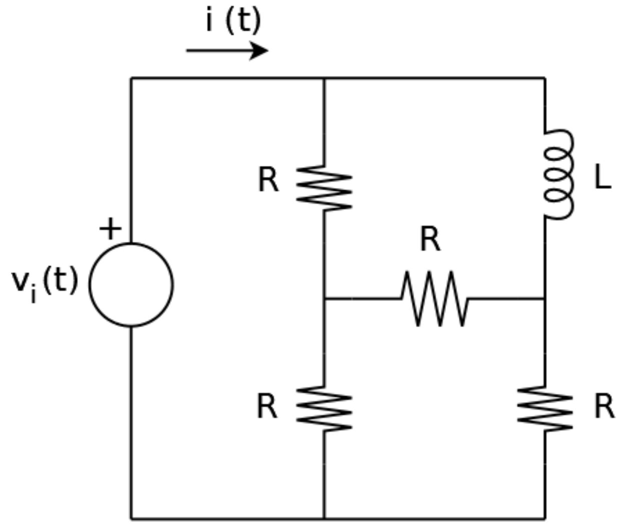
$$v_o(t) = A.|H(j2\omega_0)|.\cos\left[2\omega_0 t + 30^o + arg\ H(j2\omega_0)\right] \approx A.0,2404.\cos\left[2\omega_0 t + 49^o\right]$$

e)-ii) Para saber si hay alguna frecuencia de trabajo a la cual el sistema responde en cuadratura, tendría que cumplirse que existe ω_C tal que $\angle H(j\omega_C) = \pm\frac{\pi}{2}$. Si esto fuera cierto, entonces existiría una constante α real tal que

$$\frac{(j\omega_C)^2 + \omega_0(j\omega_C) + \omega_0^2}{(j\omega_C + \omega_0)^2} = j\alpha \Rightarrow (j\omega_C)^2 + \omega_0(j\omega_C) + \omega_0^2 = j\alpha\left[(j\omega_C)^2 + 2\omega_0(j\omega_C) + \omega_0^2\right]$$

Identificando las partes reales e imaginarias, se llega a que en este caso no existe tal frecuencia ω_C.

Problema 2



a) Para hallar la impedancia vista por la fuente, pasamos al circuito equivalente en fasores. Podemos identificar previamente un triángulo de resistencias idénticas. Usando la transfiguración sugerida, obtenemos que

$$Z(j\omega) = \left[\left(R + \frac{R}{3}\right) || \left(Lj\omega + \frac{R}{3}\right)\right] + \frac{R}{3} = \left[\left(\frac{4}{3}R\right) || \left(\frac{3Lj\omega + R}{3}\right)\right] + \frac{R}{3} =$$

$$= \frac{\left(\frac{4}{3}R\right)\cdot\left(\frac{3Lj\omega+R}{3}\right)}{\left(\frac{4}{3}R\right) + \left(\frac{3Lj\omega+R}{3}\right)} + \frac{R}{3} = \frac{1}{3}.\frac{4R.(3Lj\omega + R)}{4R + 3Lj\omega + R} + \frac{R}{3}$$

$$= \frac{1}{3}.\left[\frac{4R^2 + 12RLj\omega + 5R^2 + 3RLj\omega}{5R + 3Lj\omega}\right] = \frac{R}{3}.\left[\frac{15Lj\omega + 9R}{5R + 3Lj\omega}\right] = \left[\frac{5Lj\omega + 3R}{5R + 3Lj\omega}\right].R$$

$$= \left[\frac{(5Lj\omega + 3R)(5R - 3Lj\omega)}{25R^2 + 9L^2\omega^2}\right].R$$

Se eligen valores adecuados de L y R, de forma tal que de ahora en adelante se tiene

$$Z(j\omega) = (30 + j3,4)\Omega \approx= 30,2\Omega\angle 6,5^o$$

(b) Trabajamos en valores eficaces. Para hallar la potencia activa, usamos la expresión

$$P = re\left(V.\bar{I}\right) = re\left(|V|^2.\frac{1}{\bar{Z}}\right) = re\left(|V|^2.\bar{Z}\bar{Z}\right) = |V|^2.\frac{re(Z)}{|Z|^2}$$

(en valores eficaces). De igual forma

$$Q = im\left(V.\bar{I}\right) = im\left(|V|^2.\frac{1}{\bar{Z}}\right) = im\left(|V|^2.\bar{Z}\bar{Z}\right) = |V|^2.\frac{im(Z)}{|Z|^2}$$

Finalmente, $S = P + jQ$.

También podemos calcular la corriente que entrega la fuente:

$$I(j\omega) = \frac{V(j\omega}{Z(j\omega)} \Rightarrow I(j\omega) \approx 7,2A\angle - 6,5^o$$

Entonces, la activa sale de la identidad:

$$P = re(Z).|I|^2 \approx 1592W$$

y la reactiva vale

$$Q = im(Z).|I|^2 \approx 180,5VAR$$

Observamos que, consistentemente con lo esperado, la impedancia consume reactiva, siendo de tipo inductiva. Finalmente

$$S = P + jQ \approx (1592 + j180,5)VA$$

(c) Para hallar el la amplitud del fasor de la corriente por la bobina, observamos que toda la reactiva se consume en ella. Entonces

$$Q = L\omega.|I_L|^2 \Rightarrow |I_L| = \sqrt{\frac{Q}{L.\omega}} \approx 5,8A$$

Entonces, la amplitud de la expresión temporal de la corriente es $\sqrt{2}.24A$.

(d) La carga es inductiva. Entonces, para compensar la reactiva consumida, colocamos un condensador en paralelo con la carga y la fuente, de forma tal que entregue la reactiva que consume la carga. Para calcular el condensador, hacemos lo siguiente:

$$Q_C = -|V|^2C\omega = -Q \Rightarrow C = \frac{Q}{|V|^2\omega} \approx 12\mu F$$

(e) El circuito trifásico descrito implica que el equivalente monofásico es el de la parte anterior, ya que la tensión de fase vale la tensión compueta divida por $\sqrt{3}$.

$$V_F = \frac{U}{\sqrt{3}} \approx 220V$$

Entonces, las potencias activa, reactiva y aparente son el triple de las calculadas anteriormente.

Para compensar la reactiva consumida a la fuente, podemos colocar tres condensadores en estrella, en paralelo con la carga, del mismo valor que el calculado antes. Sin embargo, conviene colocar en triángulo tres condensadores de un tercio el valor anterior. Este resultado sale de transfigurar la estrella a un triángulo equivalente, observando que triplicar la impedancia de un condensador equivale a reducir a un tercio la capacidad.