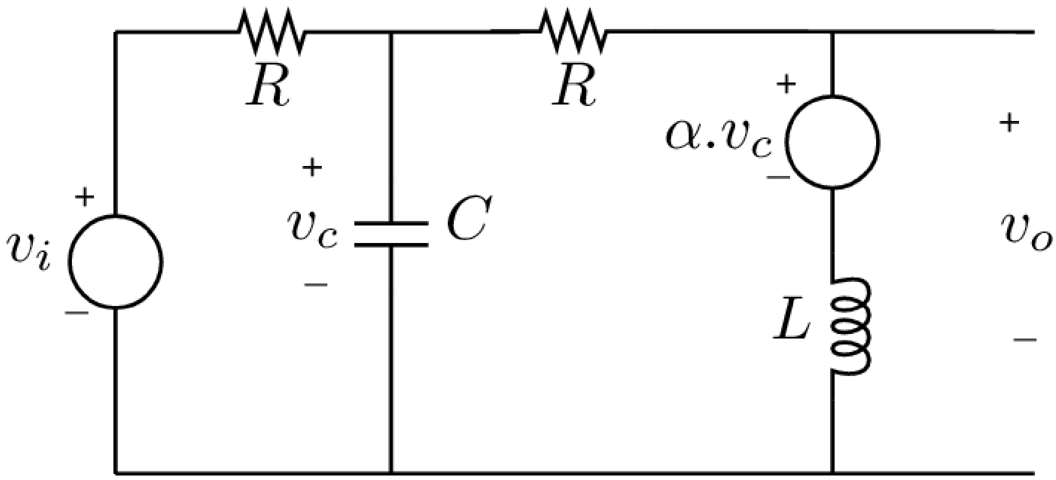
Sistemas Lineales 1

Examen de diciembre de 2015

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1



Se considera el circuito de la figura, funcionando en régimen sinusoidal.

a) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal: $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$, expresándola como un cociente de polinomios en $(j\omega)$.

b) Para $\frac{1}{RC} = \frac{R}{L} = \omega_0$ y $\alpha = -7$, simplificar la expresión de $H(j\omega)$, hallando las frecuencias críticas del numerador y del denominador.

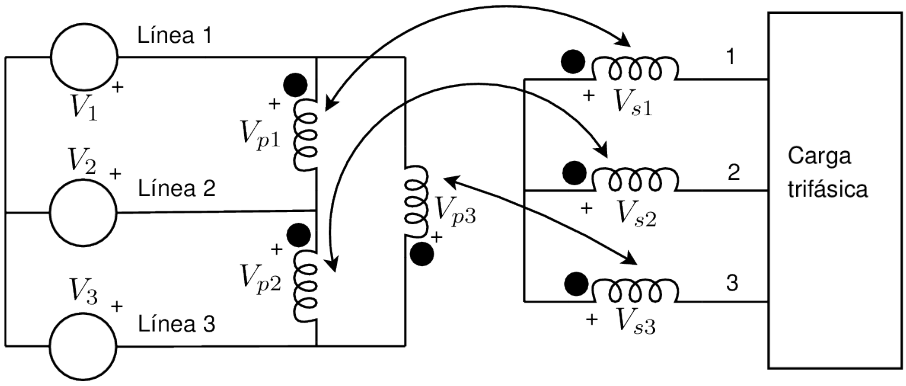
c) Deducir y bosquejar los Diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase, **explicando claramente el proceso de construcción**.

d) Hallar las distancias **exactas**, en decibeles, entre el Diagrama de Bode de módulo real y el asintótico, para las frecuencias críticas.

e) Hallar las respuesta en régimen para la entrada $v_i(t) = 5V.sen\left(\frac{1}{RC}t - \frac{\pi}{2}\right)$, indicando en particular la relación de fase entre la entrada y la respuesta.

f) Indicar, justificando, si existe alguna frecuencia de trabajo para la cual la respectiva respuesta en régimen está en cuadratura con la entrada.

Problema 2



Se tiene una fuente trifásica de 50 Hz, equilibrada y perfecta. Se tiene que

$$v_1(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}6000V\cos(100\pi t), v_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}6000V\cos\left(100\pi t + \frac{2\pi}{3}\right), v_3(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}6000V\cos\left(100\pi t + \frac{4\pi}{3}\right)$$

Se tiene también una carga trifásica, conformada por tres cargas idénticas, de impedancia Z, con factor de potencia de 0,8 inductivo, sin saber cómo están conectadas. Se decide modelar Z como el paralelo de una resistencia R y una inductancia L. Para determinar estos parámetros del modelo, se realiza un ensayo mediante el circuito que se indica en la figura. Los transformadores son ideales, de relación de vueltas primario-secundario:

$$\frac{n_1}{n_2} = 26$$

Se colocan dos vatímetros luego de los secundarios, siguiendo el *Método de los dos vatímetros*. La lectura de ambos vatímetros es

$$W_1 = 510W \qquad , \qquad W_2 = 1290W$$

Se pide:

(a) Determinar R y L (indicar bien cómo modela la carga trifásica).

(b) Realizar un diagrama fasorial en el que se muestren las tensiones de la fuente trifásica, las corrientes por los primarios, las tensiones de los secundarios y las corrientes que entran a la carga.

(c) Hallar las expresiones temporales de las corrientes por las cargas.

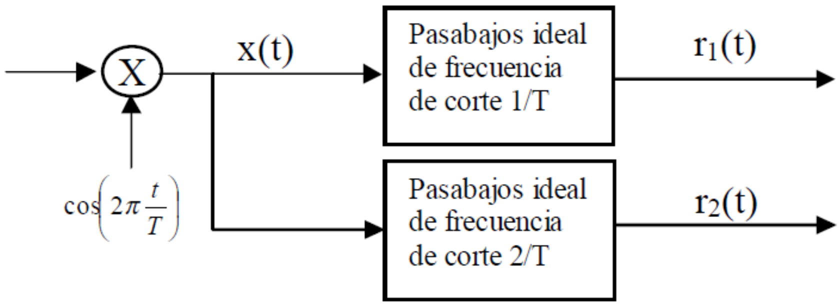
(d) Compensar la potencia reactiva consumida a la fuente trifásica. Indicar qué elementos colocaría, de qué valor y el respectivo esquema de conexión, procurando utilizar elementos del menor valor posible.

Sistemas Lineales 1

Examen de diciembre de 2015

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1



Se considera una señal $e(t)$, de banda acotada W, con $2W \ll \frac{1}{T}$. Se inyecta en el sistema de la figura. Hallar la relación **exacta** entre las energías de las señales $r_1(t)$ y $r_2(t)$.

Pregunta 2

Se considera la señal periódica $g(t)$ que corresponde al seno rectificado de media onda, de periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Hallar:

(a) Hallar:

i) el valor medio de la señal;

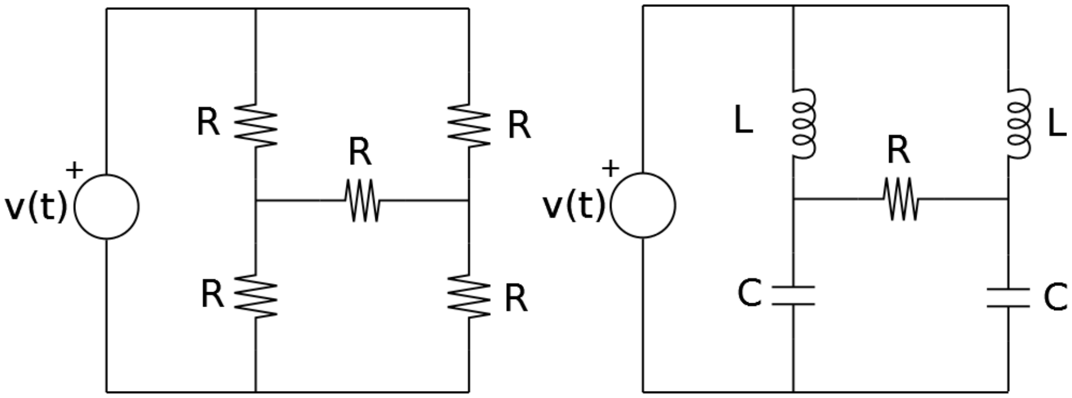
ii) los coeficientes de Fourier $c_n(g)$;

iii) el valor eficaz de la señal;

(b) Se inyecta la señal en un sistema lineal, de respuesta en régimen de tipo pasabajos ideal, con frecuencia de corte ω_C. Hallar una relación entre ω_C y ω_0 que asegure que la potencia media de la respuesta en régimen del sistema es superior al 25% de la potencia media de la entrada (revise bien el resultado obtenido!!).

(Sugerencia: recordar que $sen^2(\omega_0 t) = \frac{1-cos(2\omega_0 t)}{2}$)

Pregunta 3

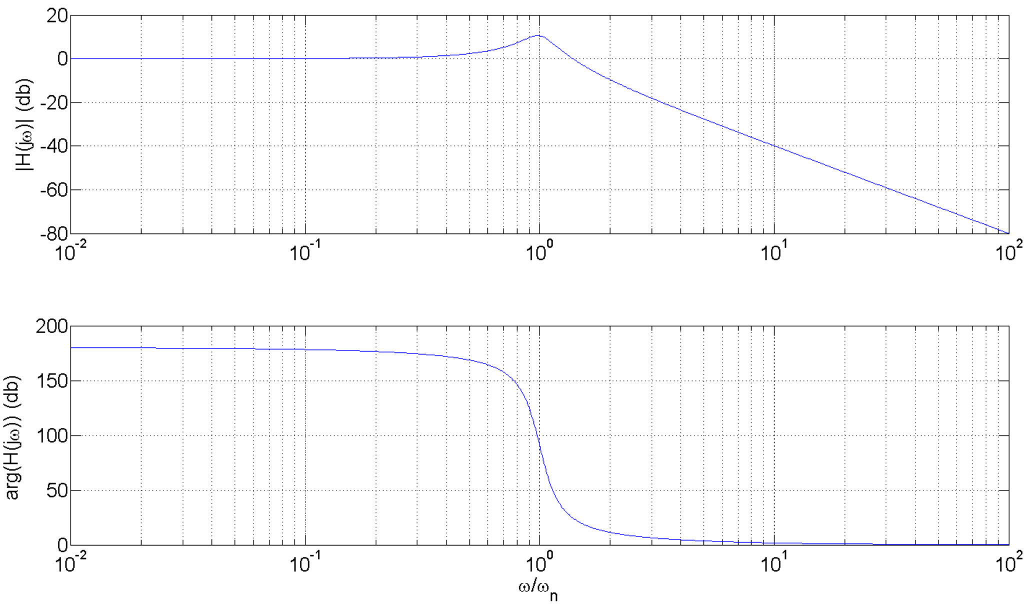


Se consideran los circuitos de la figura, funcionando en régimen sinusoidal.

(a) En el circuito de la izquierda, hallar la resistencia equivalente vista por la fuente.

(b) En el circuito de la derecha, calcular las potencias activa, reactiva y aparente consumidas por cada componente.

Pregunta 4



Se considera el sistema lineal cuyos Diagramas de Bode se muestran en la figura. Indicar cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas (justificando por si o por no).

i) La respuesta en régimen a una entrada sinusoidal de pulsación $\omega_n/2$ está retrasada con respecto de la entrada y tiene aproximadamente la misma amplitud.

ii) Para ninguna frecuencia de trabajo, la amplitud de la respuesta en régimen excede la amplitud de la correspondiente entrada sinusoidal.

iii) Existe una frecuencia de trabajo para la cual la relación de fase **exacta** entre una entrada sinusoidal y su respuesta en régimen es nula.

Solución

Problema 1

a) Consideremos el circuito equivalente en fasores. Planteando el nudo intermedio, obtenemos

$$\frac{V_i - V_2}{R} = V_2 C j\omega + \frac{V_2 - V_o}{R}$$

Despejamos V_2 en función de V_i y V_o.

$$\boxed{V_2 = \frac{V_i + V_o}{2 + RCj\omega}}$$

Por otro lado

$$V_o = \alpha . V_2 + Lj\omega \left(\frac{V_2 - V_o}{R} \right) = \left(\alpha + \frac{Lj\omega}{R} \right) V_2 - \frac{Lj\omega}{R} V_o \Rightarrow \left(\frac{R + Lj\omega}{R} \right) V_o = \left(\frac{\alpha R + Lj\omega}{R} \right) V_2$$

De donde

$$V_o (R + Lj\omega) = (\alpha R + Lj\omega) \left(\frac{V_i + V_o}{2 + RCj\omega} \right)$$

$$V_o \left[R + Lj\omega - \left(\frac{\alpha R + Lj\omega}{2 + RCj\omega} \right) \right] = \left(\frac{\alpha R + Lj\omega}{2 + RCj\omega} \right) V_i$$

$$V_0 \left[(R + Lj\omega)(2 + RCj\omega) - (\alpha R + Lj\omega) \right] = (\alpha R + Lj\omega) V_i$$

Entonces

$$H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R + Lj\omega}{RLC(j\omega)^2 + (L + R^2 C)(j\omega) + (2 - \alpha)R}$$

Ó

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{\frac{1}{RC}\left(j\omega + \frac{\alpha R}{L}\right)}{(j\omega)^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{RC}\right)(j\omega) + \frac{2-\alpha}{LC}}}$$

b) Con $\frac{L}{R} = \frac{1}{RC} = \omega_0$ y $\alpha = -7$, la transferencia en régimen queda

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{RC}(j\omega - 7\omega_0)}{(j\omega)^2 + 2\omega_0 (j\omega) + 9\omega_0^2}$$

pues

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{L}{R}.RC}} = \sqrt{\frac{R}{L}.\frac{1}{RC}} = \omega_0$$

Hallemos las frecuencias críticas. En el denominador, veamos si hay raíces reales o complejas. Si hubiera raíces complejas, se corresponderían con

$$\omega_n = 3\omega_0 \quad , \quad 2\zeta\omega_n = 6\zeta\omega_0 = 2\omega_0 \Rightarrow \zeta = \frac{1}{3} < 1$$

Efectivamente, hay dos raíces complejas conjugadas, de módulo $\omega_n = 3\omega_0$. En el numerador, la única frecuencia crítica es $\omega_1 = 7\omega_0 = \frac{7}{3}\omega_n$.

La transferencia en régimen puede ser escrita así:

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{1}{3}.\frac{\omega_n \left(j\omega - \frac{7}{3}\omega_n\right)}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n (j\omega) + \omega_n^2}}$$

c) Para realizar los Diagramas de Bode asintóticos, vamos a hacer un análisis por bandas. Sabemos que como las frecuencias críticas no están demasiados espaciadas, vamos a tener una mala aproximación en esa zona intermedia. Por otro lado, las aproximaciones de alta y baja frecuencia serán muy buenas.

- $\omega \ll \omega_n \Rightarrow$

$$H(j\omega) \approx \frac{1}{3}.\frac{\omega_n\left(-\frac{7}{3}\omega_n\right)}{\omega_n^2} = -\frac{7}{9} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| & \approx & 20\log(7/9)db \approx \\ arg(H(j\omega) & \approx & \pm 180^o \end{cases}$$

- $\omega_n \ll \omega \ll \frac{7}{3}\omega_n \Rightarrow$

$$H(j\omega) \approx \frac{1}{3}.\frac{\omega_n\left(-\frac{7}{3}\omega_n\right)}{(j\omega)^2} = \frac{7}{9}\frac{\omega_n^2}{\omega^2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| & \approx & 20\log(7\omega_n^2/9) - 40\log(\omega)\, db \\ arg(H(j\omega) & \approx & 0^o\ (\pm 360^o) \end{cases}$$

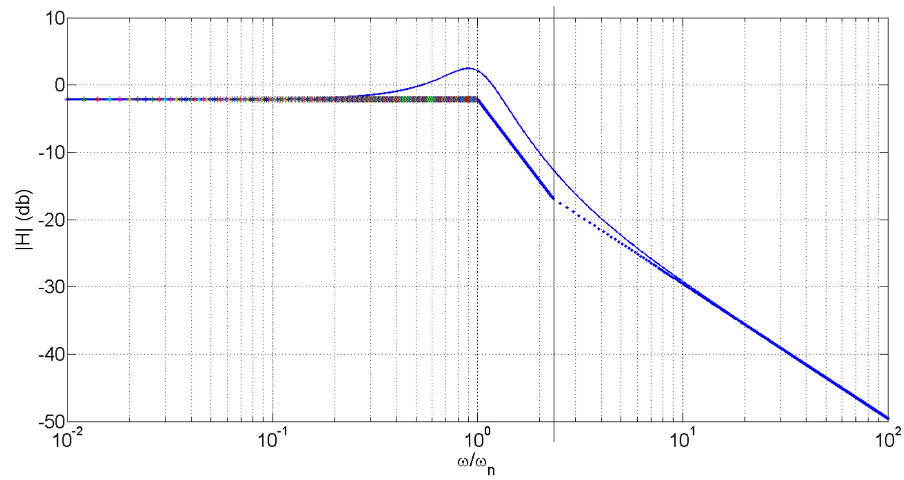
- $\omega \gg \frac{7}{3}\omega_n \Rightarrow$

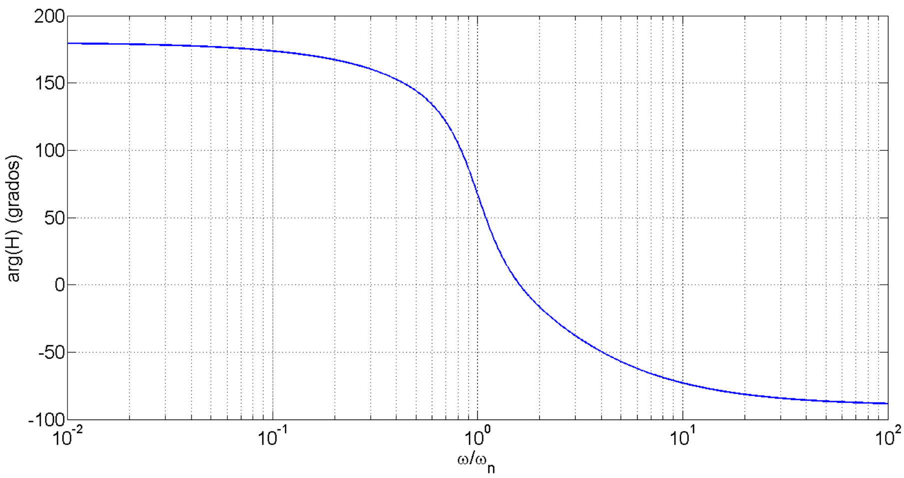
$$H(j\omega) \approx \frac{1}{3}.\frac{\omega_n\,(j\omega)}{(j\omega)^2} = \frac{\omega_n}{3(j\omega)} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| & \approx & 20\log(\omega_n/3) - 20\log(\omega)\, db \\ arg(H(j\omega) & \approx & -90^o\ (+270^o) \end{cases}$$

Para definir bien sentido del cambio de fase en ω_n, evaluamos la transferencia en dicha frecuencia:

$$H(j\omega_n) = \frac{1}{3}.\frac{\omega_n\left(j\omega - \frac{7}{3}\omega_n\right)}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} = \frac{1}{3}.\frac{j-\frac{7}{3}}{2\zeta j} = \frac{j-\frac{7}{3}}{2j} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega_n)| & \approx & 1,27\ \ (2,1db) \\ arg(H(j\omega_n) & \approx & 66,8^o \end{cases}$$

La siguiente figura muestra los Diagramas de Bode obtenidos. Se muestra también el diagrama real de módulo





d) La distancia en decibeles, con signo, entre el diagrama real y el asintótico de módulo las calculamos así:

$$d_\omega(db) = 20\log\left(\frac{|H_{real}(j\omega)|}{|H_{as}(j\omega)|}\right)$$

Para $\omega = \omega_n$, tenemos que

$$|H_{real}(j\omega_n)| = \left|\frac{j-\frac{7}{3}}{2j}\right| \quad , \quad |H_{as}(j\omega_n)| = \frac{7}{9}$$

resulta

$$d_{\omega_n}(db) \approx 20\log(1,63) \approx 4,25db$$

Para $\omega = \frac{7}{3}\omega_n$, tenemos que

$$\left|H_{real}\left(j\frac{7}{3}\omega_n\right)\right| = \left|\frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{1636}}\right| \quad , \quad \left|H_{as}\left(j\frac{7}{3}\omega_n\right)\right| = \frac{1}{7}$$

resulta

$$d_{\frac{7}{3}\omega_n}(db) \approx 20\log(1,7) \approx 4,67db$$

e) Sabemos que para una entrada sinusoidal $v_i(t) = A.\cos(\omega_i t + \varphi)$, la respectiva respuesta en régimen es

$$v_o(t) = A.\left|H(j\omega_i)\right|.\cos\left[\omega_i t + \varphi + arg\left(H(j\omega_i)\right)\right]$$

Entonces, para $\omega_i = \frac{1}{RC} = \omega_0 = \frac{\omega_n}{3}$, la ganancia y el desfasaje que introduce el sistema valen

$$\left|H\left(j\frac{\omega_n}{3}\right)\right| \approx 0,85 \approx -1,33db \quad , \quad arg\left[H\left(j\frac{\omega_n}{3}\right)\right] \approx 157^o$$

Observar que los valores son consistentes con las gráficas.

f) De la continuidad del diagrama de Bode de fase, y considerando que recorre en forma descendente el intervalo $(+180^o, -90^o)$, podemos afirmar que existe una frecuencia para la cual la respuesta en régimen adelanta en 90^o a la señal de entrada. Dicha frecuencia es cercana a ω_0.

Problema 2

a) Antes de elegir el modelo a plantear para la impedancia, veamos cómo es la tensón en bornes de la misma. Los primarios de los transformadores ven la tensión compuesta de la fuente trifásica:

$$V_{p1} = V_1 - V2 \Rightarrow V_{p1} = \sqrt{3}V_1 e^{-j30^o}$$

Este resultado es conocido: la tenesión compuesta es $\sqrt{3}$ veces más grande que la tesión de la fuente, y presenta un retraso o adelanto de 30 grados. En este caso es un retraso porque la fase de los fasores de las fuentes crecen en sentido antihorario. Las tensiones de los secundarios están en fase con las del primario,pues los transformadores son ideales y se cumple que:

$$\frac{V_{pi}}{n_1} = \frac{V_{si}}{n_2} \Rightarrow V_{si} = \frac{n_2}{n_1}V_{pi} \quad , \; i = 1,2,3$$

$$n_1 I_{pi} + n_2 I_{si} = 0 \Rightarrow I_{pi} = -\frac{n_2}{n_1}I_{si} \quad , \; i = 1,2,3$$

Finalmente, a los efectos de la carga, los secundarios conforman un sistemas trifásico de fuentes en estrella, de valor V_{si}, $i = 1,2,3$. Los vatímetros conectados luego del secundarios mediarán la potencia consumida por la carga (o entregada por los ecundarios). A partir del método de los dos vatímetros, sabemos que la potencia activa total consumida por la carga es:

$$P_T = W_1 + W_2 = 1800W$$

Como las cargas son idénticas, cada carga consume $P = 600W$. Considerando el factor de potencia inductivo $\cos(\varphi) = 0,8$, la potencia reactiva consumida por cada carga es

$$Q = \sqrt{|S|^2 - P^2} = \sqrt{\frac{P}{\cos^2(\varphi)} - P^2} = P\sqrt{\frac{1-\cos^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)}} = 450VAR$$

Como conocemos la tensión de fase de la carga, proponemos un modelo en estrella, en la que cada rama consiste en el paralelo de una resistencai R y una reactancia positiva $X = L\omega$, $\omega = 100\pi rad/s$. Al estar la carga en estrella, podemos usar el equivalente monofásico y obtener directamente que

$$P = \frac{|V_{s1}|^2}{R} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{|V_{p1}|^2}{R} = 3\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{|V_1|^2}{R}$$

De donde

$$R = 3\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{|V_1|^2}{P} \approx 88\Omega$$

En forma análoga,

$$Q = 3\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{|V_1|^2}{X} \Rightarrow L = 3\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{|V_1|^2}{Q\omega} \approx 0,37\, Hy$$

Finalmente,

$$Z = R||Lj\omega = \frac{RLj\omega}{R + Lj\omega} = 71\Omega\angle 37^o$$

b) Ya calculamos las tensiones involucradas. Ahora calcularemos las corrientes. La corriente que entra cada carga es la opuesta de la respectiva corriente de secundario, y vale

$$I_{Z1} = \frac{V_{s1}}{Z} \approx 3,25A\angle{-67^o} \quad , \quad I_{Z2} = I_{Z1}e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad , \quad I_{Z3} = I_{Z1}e^{j\frac{4\pi}{3}}$$

Las corrientes por el primario serán, entonces,

$$I_{p1} = -\frac{n_2}{n_1}I_{s1} = \frac{n_2}{n_1}I_{Z1} \approx 0,125A\angle{-67^o} \quad , \quad I_{p2} = I_{p1}e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad , \quad I_{p3} = I_{p1}e^{j\frac{4\pi}{3}}$$

Finalmente, las corrientes por las fuentes se obtienen de las corrientes por los primarios así:

$$I_1 = I_{p1} - I_{p3} \approx 0,22A\angle{-37^o} \quad , \quad I_2 = I_1e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad , \quad I_3 = I_1e^{j\frac{4\pi}{3}}$$

En el siguiente diagrama fasorial se muestran las tensiones y corrientes de la fuente, los transformadores y la carga. Para una mejor visualización no se respetó la escala,pero sí los ángulos relativos y las colinealidades. **c)** Las expresiones temporales de las corrientes por las cargas son las siguientes:

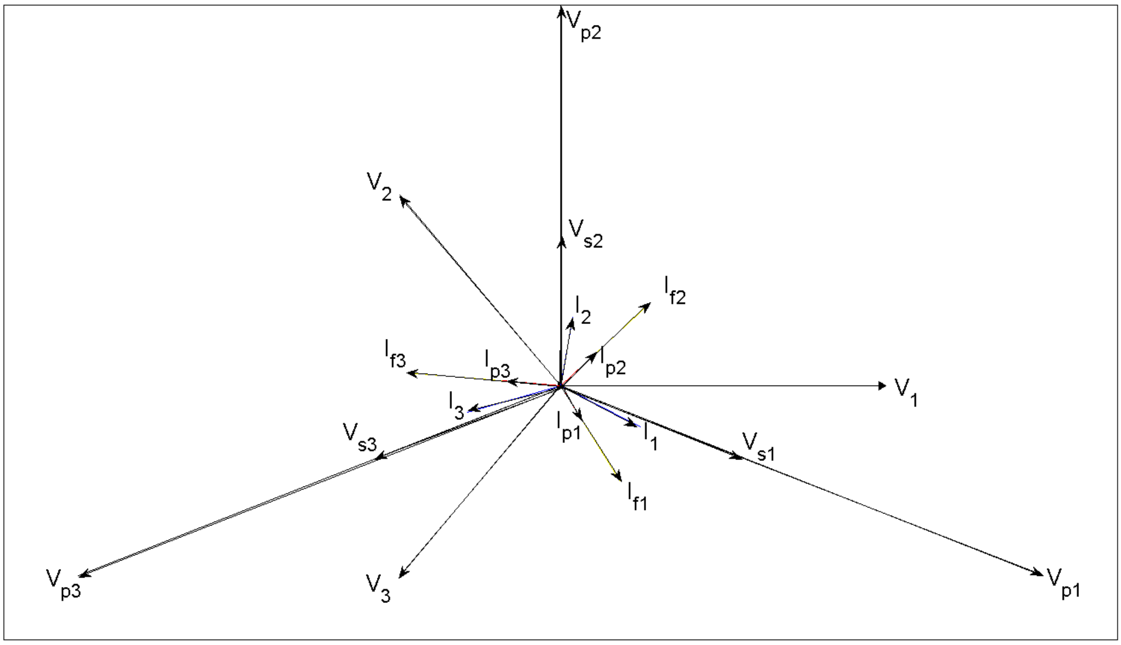
$$i_{z1}(t) = 3,25A\cos\left(100\pi t - 67^o\right), i_{z1}(t) = 3,25A\cos\left(100\pi t + 53^o\right), i_{z1}(t) = 3,25A\cos\left(100\pi t + 173^o\right)$$

d) Para compensar la potencia reactiva consumida por la carga a la fuente, podemos proceder así. La solución más sencilla es conectar una estrella de condensadores en paralelo con la carga, en el secundario del transformador trifásico. El valor de estos condensadores sería

$$\frac{1}{jC\omega} = -Lj\omega \Rightarrow C = \frac{1}{L\omega^2} \approx 27\mu F$$

Si hacemos la compensación de reactiva en niveles de tensión mayores, obtendremos valores más pequeños para los condensadores. En el mismo sentido, para un mismo nivel de reactiva, colocando condensadores en triángulo obtenemos valores más pequeños. Por eso, lo mejor que podemos hacer es colocar un triángulo de condensadores en paralelo con los primarios de los transformadores, que entreguen una reactiva total de $Q = 450VAR$. Obtenemos entonces

$$C \approx 40nF$$



V_{p2}
V_2
V_{s2}
I_{f2}
I_2
I_{f3}
I_{p3}
I_{p2}
V_1
I_3
I_{p1}
I_1
V_{s3}
V_{s1}
I_{f1}
V_{p3}
V_3
V_{p1}