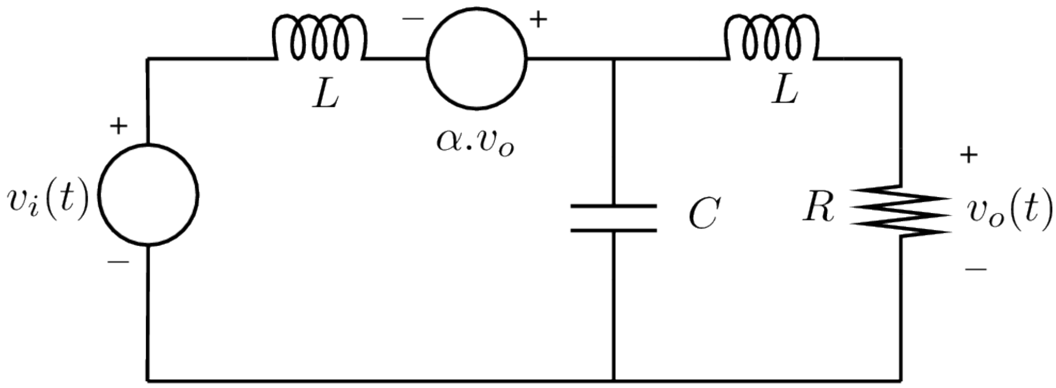
Sistemas Lineales 1

Examen de diciembre de 2014

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1



Se considera el circuito en régimen sinusoidal de la figura.

a) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal: $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$, expresándola como un cociente de polinomios en $(j\omega)$.

b) Simplificar la expresión de $H(j\omega)$ sabiendo que: $\frac{R}{L} = \frac{1}{RC} = \omega_0 > 0$.

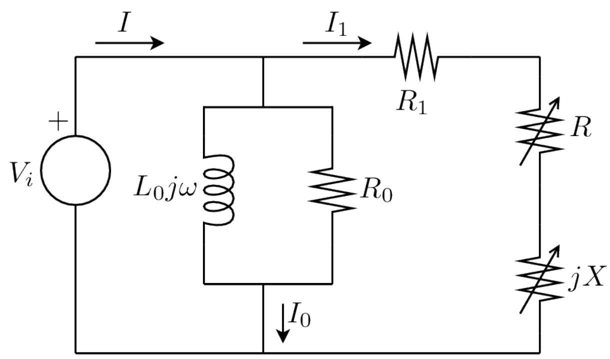
c) Determinar el valor de α sabiendo que $-\omega_0$ es raíz del denominador

d) Deducir y bosquejar los Diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase, explicando el proceso de construcción.

e) i) Hallar
$$\lim_{\omega \to \sqrt{2}\omega_0^{\pm}} arg\,[H(j\omega)]$$

ii) Hallar $|H(j10\omega_0|$ y expresarlo en decibeles.

Problema 2



En el circuito de la figura, es posible variar el valor de la resistencia R y la reactancia X, fijando el punto de funcionamiento del circuito. Esta reactancia puede tomar cualquier valor real, en tanto la resistencia es no negativa. Obsérvese que la corriente I_0 es la misma para cualquier punto de funcionamiento. Se tienen los siguientes datos:

$$v_i(t) = 220\sqrt{2}V\cos(100\pi\, t) \quad , \quad L_0 = 1Hy \quad , \quad R_0 = 220\Omega \quad , \quad R_1 = 1,2\Omega$$

a) Para un determinado punto de funcionamiento se conoce la potencia activa y reactiva consumida a la fuente

$$P = 2500W \quad ; \quad Q = 100VAR$$

  i) Hallar el valor de los parámetros R y X, indicando con qué componente (tipo y valor) obtendría esa reactancia. (Recordar que $|S| = |V|.|I|$).
  ii) Realizar una diagrama fasorial que incluya el fasor de la tensión de entrada V_{in} y al fasor de la corriente I entregada por la fuente.
  iii) Ubicar en el diagrama anterior el lugar geométrico que describe el fasor I al variar $X \geq 0$, al variar el punto de funcionamiento del sistema, manteniendo la potencia activa constante e igual a $P = 2500W$. **Justificar debidamente**.

b) Se da un nuevo punto de funcionamiento, con $X \geq 0$, $P = 2500W$ y $|I| = 15A$.

  i) Hallar el valor de X y R para este punto de funcionamiento, indicando con qué componente (tipo y valor) obtendría esa reactancia..
  ii) Calcular el factor de potencia en el punto de funcionamiento.
  iii) Hallar los fasores I (corriente de entrada), I_0 (corriente por la rama 0), I_1 (corriente por la rama 1) y presentarlos de manera conjunta en un diagrama fasorial.
  iv) Compensar la potencia reactiva consumida a la fuente. Indicar qué elemento se va a colocar, el valor del mismo y dónde se colocaría.
  v) Hallar las expresiones temporales de $i(t)$ e $i_0(t)$.

c) Se arma un circuito trifásico que tiene conectada una carga en triángulo, que en cada fase consiste en la misma carga del circuito de la figura, en el punto de funcionamiento de la parte b), sin compensar. Se alimenta el circuito con un sistema equilibrado y perfecto de fuentes que entrega una tensión compuesta de $220V$ eficaces. ¿Cuál es la potencia activa total consumida a la carga?

(Sugerencia general: trabaje con las expresiones analíticas y sustituya al final para obtener los resultados numéricos).

Sistemas Lineales 1

Examen de diciembre de 2014

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

Se sabe que la respuesta al impulso de un sistema lineal es $h(t) = \delta'(t) + Y(t)e^{-t}$.

i) Hallar r_1, la respuesta del sistema a la entrada $e_1(t) = Y(t)sen(\omega_0 t)$, $\omega_0 > 0$.

ii) **Probar** que la respuesta r_2 del sistema a la entrada $e_2(t) = Y(t)\omega_0 cos(\omega_0 t)$ es la derivada de la señal r_1.

Pregunta 2

De un sistema lineal se sabe lo siguiente:

- el sistema filtra las altas frecuencias a partir de una frecuencia de corte superior f_C.
- frente a una onda cuadrada simétrica, de excursión total A, de frecuencia f_o, de potencia media P_m y valor medio nulo, responde en régimen con una señal de potencia media mayor que $0,8P_m$ y menor que $0,92P_m$.

Indicar cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas (**JUSTIFICAR PARA CADA OPCIÓN**).

a) $f_C < f_o$.

b) $3f_o < f_C$

c) $5f_o < f_C$

(Se recuerda que los coeficientes de Fourier de la onda cuadrada de amplitud A valen $c_n = -\frac{jA}{n\pi}$).

Pregunta 3

Se tiene la siguiente transferencia en régimen sinusoidal:

$$H(j\omega) = k.\frac{j\omega + \omega_0}{j\omega + k.\omega_0}$$

a) Se desea que exista al menos una frecuencia de trabajo para la cual el sistema introduzca un adelanto de fase de 45^o. ¿Cuál de las siguientes opciones se debe cumplir?

   i) $k < 1$

   ii) $k > 1$

b) Para k cumpliendo la condición anterior, hallar la distancia exacta -en decibeles- entre el Diagrama de Bode de módulo real y el asintótico en $\omega = \omega_0$. Dejarla expresada en función de k.

Pregunta 4

a) Enunciar y demostrar el Teorema de Blondell, para cargas en estrella o triángulo, explicando claramente cómo usa las hipótesis.

b) Describir claramente el Método de los dos vatímetros para medir potencia en un sistema trifásico, incluyendo el contexto de aplicación, el esquema de conexionado y la fundamentación teórica.

Solución

Problema 1

a) Consideremos el circuito equivalente en fasores y denotemos por V_1 al fasor de la tensión en bornes del condensador. Planteando el nudo intermedio, obtenemos[a]

$$\frac{V_i + \alpha V_o - V_1}{Lj\omega} = V_1 Cj\omega + \frac{V_o}{R}$$

Despejamos V_1 en funciï¿½n de V_i y V_o.

$$V_1 \left[Cj\omega + \frac{1}{Lj\omega}\right] = \frac{V_i}{Lj\omega} + V_o\left[\frac{\alpha}{Lj\omega} - \frac{1}{R}\right]$$

Entonces

$$V_1 \left[\frac{LC(j\omega)^2 + 1}{Lj\omega}\right] = \frac{V_i}{Lj\omega} + V_o\left[\frac{\alpha R - Lj\omega}{RLj\omega}\right] = \frac{RV_i}{RLj\omega} + V_o\left[\frac{\alpha R - Lj\omega}{RLj\omega}\right]$$

De donde

$$V_1 = \left[\frac{1}{RLC(j\omega)^2 + 1}\right]\left[RV_i + (\alpha R - Lj\omega)V_o\right]$$

La relación entre V_1 y V_o está dada por un divisor de tensión:

$$V_o = V_1\left[\frac{R}{R + Lj\omega}\right] = \left[\frac{1}{RLC(j\omega)^2 + 1}\right]\left[RV_i + (\alpha R - Lj\omega)V_o\right]\left[\frac{R}{R + Lj\omega}\right]$$

Despejando

$$V_o\left[1 - \frac{(\alpha R - Lj\omega)}{(R + Lj\omega)(1 + LC(j\omega)^2)}\right] = \frac{RV_i}{(R + Lj\omega)(1 + LC(j\omega)^2)}$$

$$V_o\left[(R + Lj\omega)(1 + LC(j\omega)^2) - (\alpha R - Lj\omega)\right] = RV_i$$

$$V_o\left[(1-\alpha)R + 2L(j\omega) + RLC(j\omega)^2 + L^2C(j\omega)^3\right] = RV_i$$

Entonces

$$H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{(1-\alpha)R + 2L(j\omega) + RLC(j\omega)^2 + L^2C(j\omega)^3}$$

Simplificando

$$H(j\omega) = \frac{\frac{R}{L^2C}}{(j\omega)^3 + \frac{RLC}{L^2C}(j\omega)^2 + \frac{2L}{L^2C}(j\omega) + (1-\alpha)\frac{R}{L^2C}} = \frac{\frac{R}{L^2C}}{(j\omega)^3 + \frac{R}{L}(j\omega)^2 + \frac{2}{LC}(j\omega) + (1-\alpha)\frac{R}{L^2C}}$$

b) Sabiendo que: $\frac{R}{L} = \frac{1}{RC} = \omega_0 > 0$, tenemos que

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad , \quad \frac{R}{L^2C} = \omega_0^3$$

Obtenemos

$$H(j\omega) = \frac{\omega_0^3}{(j\omega)^3 + \omega_0(j\omega)^2 + 2\omega_0^2(j\omega) + (1-\alpha)\omega_0^3} = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^3 + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right) + (1-\alpha)}$$

c) El denominador podemos escribirlo como función de $x = \frac{j\omega}{\omega_0}$ y debe tener raíz $x = -1$. O sea

$$x^3 + x^2 + 2x + (1-\alpha) = (1+x)p(x)$$

con $p(x)$ un polinomio de orden 2. Imponiendo la solución deseada, resulta

$$0 = (-1)^3 + (-1)^2 + 2(-1) + (1-\alpha) = -1 + 1 - 2 + (1-\alpha) = -1 - \alpha \Rightarrow \alpha = -1$$

[a]La corriente por la resistencia también se puede escribir como $\frac{V_1 - V_o}{Lj\omega}$, lo que simplifica mucho las cuentas. Se sugiere verificarlo.

De diversas maneras, puede obtenerse que $p(x) = x^2 + 2$, por lo que la expresión de H es

$$H(j\omega) = \frac{\omega_0^3}{[(j\omega) + \omega_0]\,[(j\omega)^2 + 2\omega_0^2]}$$

d) Para realizar los Diagramas de Bode asintóticos, vamos a hacer un análisis por bandas. Las singularidades del sistema son ω_0 y $j \pm \sqrt{2}\omega_0$. Sabemos que como las singularidades del denominador no están demasiados espaciadas, vamos a tener una mala aproximación en esa zona. Además, al haber raíces imaginarias puras, el módulo de la transferencia diverge al aproximarse a $\sqrt{2}\omega_0$. Esto también se va a reflejar en una discontinuidad en la fase. Por otro lado, las aproximaciones de alta y baja frecuencia serán muy buenas.

- $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow$

$$H(j\omega) \approx \frac{\omega_0^3}{[\omega_0]\,[2\omega_0^2]} = \frac{1}{2} = \begin{cases} |H(j\omega)| & \approx & -6db \\ arg(H(j\omega) & \approx & 0 \end{cases}$$

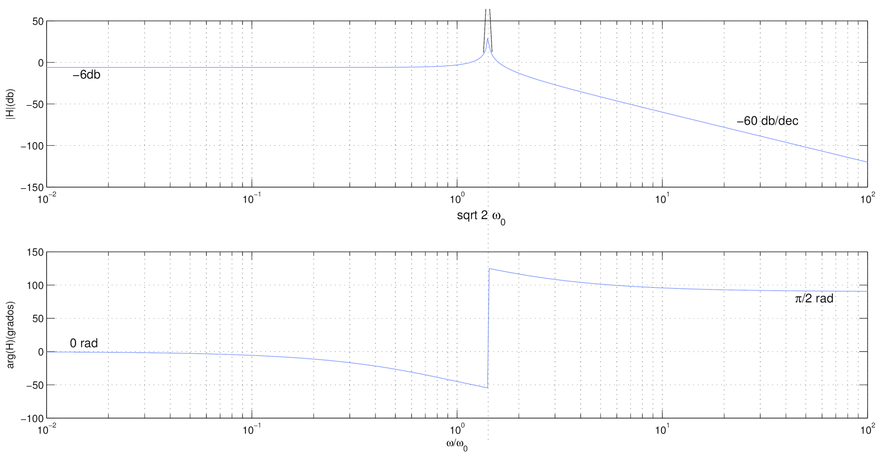
- $\omega_0 \ll \omega \ll \sqrt{2}\omega_0 \Rightarrow$

$$H(j\omega) \approx \frac{\omega_0^3}{[j\omega]\,[2\omega_0^2]} = \frac{\omega_0/2}{j\omega} = \begin{cases} |H(j\omega)| & \approx & 20\log(\omega_0/2) - 20\log(\omega)\ db \\ arg(H(j\omega) & \approx & -90^o\ (+270^o) \end{cases}$$

- $\omega \gg \sqrt{2}\omega_0 \Rightarrow$

$$H(j\omega) \approx \frac{\omega_0^3}{[j\omega]\,[(j\omega)^2]} = \frac{\omega_0^3}{(j\omega)^3} = \begin{cases} |H(j\omega)| & \approx & 60\log(\omega_0) - 60\log(\omega)\ db \\ arg(H(j\omega) & \approx & -270^o\ (+90^o) \end{cases}$$

La siguiente figura muestra los Diagramas de Bode obtenidos.



e)-i) Calculemos los límites laterales solicitados.

- $$\lim_{\omega \to \sqrt{2}\omega_0^+} arg\,[H(j\omega)] = \lim_{\omega \to \sqrt{2}\omega_0^+} arg\left(\frac{\omega_0^3}{[(j\omega) + \omega_0]\,[(j\omega)^2 + 2\omega_0^2]}\right) =$$
$$= -arg\left(j\sqrt{2}\omega_0 + \omega_0\right) - \lim_{\omega \to \sqrt{2}\omega_0^+} arg\left[(j\omega)^2 + 2\omega_0^2\right] =$$
$$= -arg\left(1 + j\sqrt{2}\right) - \lim_{\omega \to \sqrt{2}\omega_0^+} arg\left[2\omega_0^2 - \omega^2\right] \approx 125^o$$

- $$\lim_{\omega \to \sqrt{2}\omega_0^-} arg\,[H(j\omega)] = -arg\left(1 + j\sqrt{2}\right) - \lim_{\omega \to \sqrt{2}\omega_0^-} arg\left[2\omega_0^2 - \omega^2\right] \approx -54,5^o$$

e)-ii)

$$|H(j10\omega_0)| = \left|\frac{\omega_0^3}{[(j10\omega_0) + \omega_0]\,[(j10\omega_0)^2 + 2\omega_0^2]}\right| = \left|\frac{1}{[j10 + 1]\,[(j10)^2 + 2]}\right| = \frac{1}{1000} \approx -60db$$

Problema 2

a) La potencia activa total consumida por el circuito corresponde a las resistencias:

$$P = \frac{|V_i|^2}{R_0} + \frac{|V_i|^2(R+R_1)}{(R+R_1)^2+|X(\omega)|^2}$$

Si llamamos $\tilde{P}$ a la porción de la potencia activa que depende del punto de funcionamiento:

$$\tilde{P} = P - \frac{|V_i|^2}{R_0} = \frac{|V_i|^2(R+R_1)}{(R+R_1)^2+|X(\omega)|^2}$$

En esta expresión, conocemos los valores de todos los términos involucrados. De forma similar, obtenemos una expresión para la porción de la potencia reactiva que depende del punto de funcionamiento:

$$\tilde{Q} = Q - \frac{|V_i|^2}{L_0\omega} = \frac{|V_i|^2 X(\omega)}{(R+R_1)^2+|X(\omega)|^2}$$

El cuadrado de la potencia total aparente de la carga que depende del punto de funcionamiento es

$$\tilde{P}^2+\tilde{Q}^2 = \frac{|V_i|^4}{(R+R_1)^2+|X(\omega)|^2} \Rightarrow (R_0+R_1)^2+|X(\omega)|^2 = \frac{|V_i|^4}{\tilde{P}^2+\tilde{Q}^2}$$

O, escrito de otra forma,

$$\frac{|V_i|^2}{(R+R_1)^2+|X(\omega)|^2} = \frac{\tilde{P}^2+\tilde{Q}^2}{|V_i|^2}$$

De donde

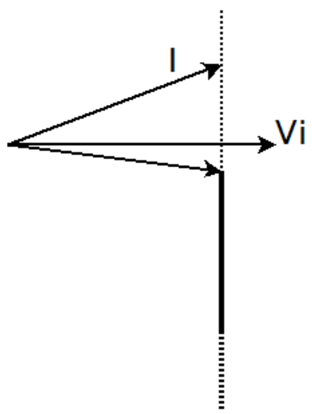
$$\tilde{P} = \frac{\tilde{P}^2+\tilde{Q}^2}{|V_i|^2}(R+R_1) \Rightarrow R = \frac{|V_i|^2\tilde{P}}{\tilde{P}^2+\tilde{Q}^2} - R_1$$

$$\tilde{Q} = \frac{\tilde{P}^2+\tilde{Q}^2}{|V_i|^2}X(\omega) \Rightarrow X(\omega) = \frac{|V_i|^2\tilde{Q}}{\tilde{P}^2+\tilde{Q}^2}$$

i)

Haciendo las cuentas, obtenemos $\tilde{P} \approx 2280W$, $\tilde{Q} \approx -54,1VAR$, $R \approx 20\Omega$ y $X(\omega) \approx -0,5\Omega$. Esta reactancia negativa corresponde a un condensador de valor $C \approx 6mF$.

ii)



iii)

Para mantener la potencia activa constante, basta con mantener constante la proyección del fasor I sobre el fasor V_i, por lo que el lugar que describe el fasor I para potencia activa constante es una recta perpendicular al fasor de tensión de la fuente. Si nos restringimos a $X \geq 0$, entonces tendremos una semirrecta, que cuanto más grande sea X, más retrasará al fasor I respecto de V_i. El origen de esa semirrecta lo obtenemos para $X = 0$ y corresponde a

$$R = \left[\frac{P}{|V_i|^2} - \frac{1}{R_0}\right]^{-1} - R_1 \approx 20\Omega$$

$$Z_{eq}|_{X=0} = (R_0||L_0 j\omega)||(R+R_1) \approx (19,3 + j1,2)\Omega$$
$$arg\left(Z_{eq}|_{X=0}\right) \approx 3,5^o$$

El lugar geométrico consiste entonces en una semirrecta vertical, hacia $-\infty$, que arranca en el punto correspondiente a $X=0$. Se muestra en el diagrama anterior.

b)i) Para este nuevo punto de funcionamiento, podemos calcular el módulo de la potencia aparente:

$$|S| = |V_i|.|I| \Rightarrow Q = +\sqrt{|S|^2 - P^2} \approx 2154VAR$$

donde hemos elegido la raíz positiva por ser $X \geq 0$. Conociendo las potencias activa y reactiva, estamos en las mismas condiciones que la parte anterior y calculamos R y X de la misma forma, obteniendo

$$R \approx 10,8\Omega \quad , \quad X(\omega) \approx 10,5\Omega$$

Al tener ahora una reactancia positiva, la componente debe ser una inductancia, de valor $L \approx 33,5mHy$.

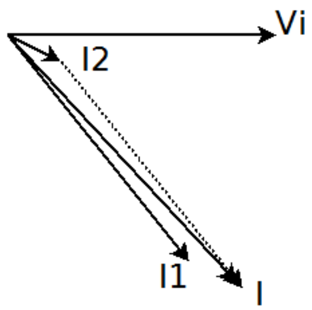
ii) El factor de potencia, que es inductivo, sale de

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}} \approx 0,757$$

iii) Calculando directamente, obtenemos

$$I_1 = \frac{V_i}{R_1 + R + jX(\omega)} \approx 13A\angle{-50^o}$$
$$I_0 = \frac{V_i}{L_0 j\omega} + \frac{V_i}{R_0} \approx 1,22A\angle{-40^o}$$
$$I = I_1 + I_0 \approx 15A\angle{-49^o}$$

El diagrama fasorial ilustra la situación.



iv) Para compensar la reactiva, colocamos un condensador en paralelo con la fuente. Su valor debe ser tal que entregue la potencia reactiva consumida por el resto del circuito.

$$C = \frac{Q}{|V_i|^2\omega} \approx 141\mu F$$

v) Al estar trabajando en valores eficaces, la expresión temporal de $i(t)$ es

$$i(t) = \sqrt{2}|I|\cos(100\pi t + arg(I)) = \sqrt{2}\,15A\cos(100\pi t - 49^o)$$

Idem para $i_0(t)$.

$$i_0(t) = \sqrt{2}|I_0|\cos(100\pi t + arg(I_0)) = \sqrt{2}\,1,22A\cos(100\pi t - 40^o)$$

c) La carga trifásica está conectada en triángulo. Entonces, la tensión que ve cada carga es la tensión compuesta, que coincide con la tensión de la fuente de la figura (a menos de un posible desfasaje). Entonces, la potencia de cada fase coincide con la potencia activa ya conocida en la parte b). Al ser cargas idénticas, la potencia trifásica total es el triple, es decir, $P_T = 7500W$.