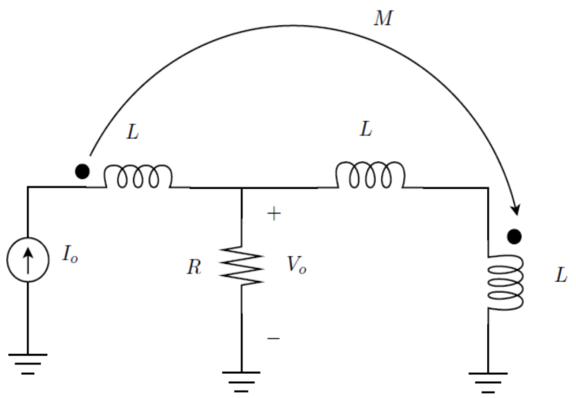
Sistemas Lineales 1

Examen de diciembre de 2013

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1



a) Hallar la transferencia en régimen sinusoidal $\frac{V_o(j\omega)}{I_o(j\omega)}$ del circuito siguiente:

b) Para $\frac{M}{L} = 1$ y $\frac{R}{L} = \omega_0 > 0$, realizar los diagramas de Bode asintóticos de la función de transferencia hallada en a). Bosquejar el diagrama real de módulo.

c) ¿Existe alguna frecuencia de trabajo para la cual se cumple que el desfasaje entre la entrada y la salida en régimen es exactamente de $\frac{\pi}{4}$?

d) Calcular las distancias en decibeles entre el diagrama de Bode de módulo real y el asintótico para las frecuencias: $\frac{\omega_o}{2}$, ω_o, $2\omega_o$, $10\omega_o$ y $1000\omega_o$.

e) Hallar la respuesta en régimen $v_o(t)$ si la entrada es $i(t) = I_o cos(10\omega_o t + \pi)$.

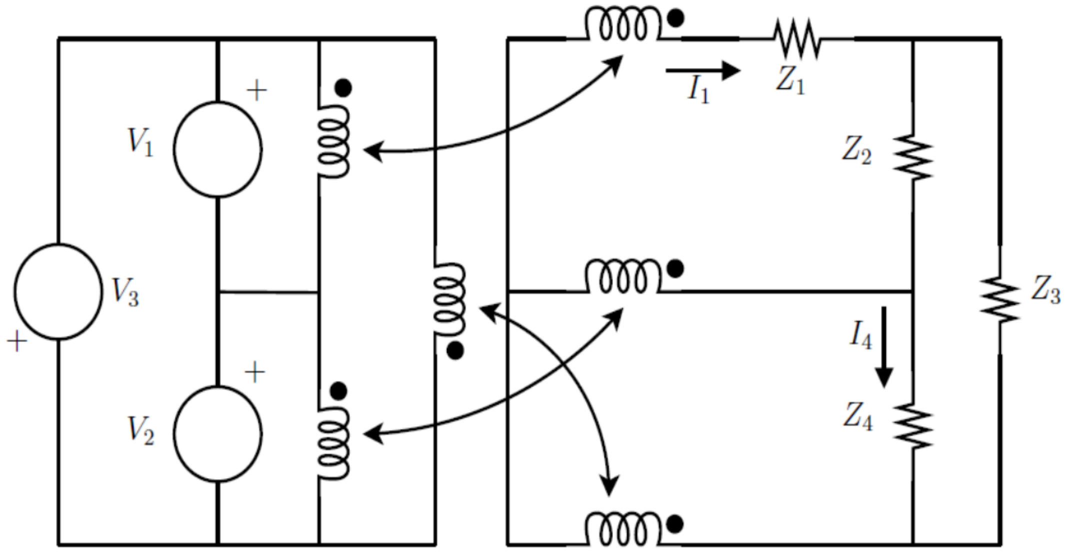
f) Se excita al sistema con un entrada $i(t)$, no negativa, de tipo diente de sierra, de periodo $T = \frac{\pi}{5\omega_o}$ y de valor medio $\frac{I_o}{2}$. Se pide:

   i) calcular la compenente fundamental de la señal de entrada;

   ii) calcular en forma exacta la componente fundamental de la salida en régimen del sistema;

   iii) calcular en forma aproximada la salida en régimen del sistema.

Problema 2



En el circuito en régimen de la figura, el sistema de fuentes es equilibrado y perfecto:

$$v_1(t) = 220V\sqrt{2}\sin(2\pi 50t), v_2(t) = 220V\sqrt{2}\sin\left(2\pi 50t + \frac{2\pi}{3}\right), v_3(t) = 220V\sqrt{2}\sin\left(2\pi 50t + \frac{4\pi}{3}\right)$$

Los transformadores son ideales y tienen una relación de vueltas 1:1.

a) Si $Z_4 = j200\Omega$ y $Z_2 = 100\Omega$, ¿cuánto deben valer las impedancias Z_1 y Z_3 para que el sistema de cargas sea equilibrado? Dibujar el circuito equivalente monofásico. (Los valores hallados se mantendrán en lo que sigue).

b) Bosquejar un diagrama fasorial en el que figuren los fasores de tensión de la fuente trifásica y los fasores de las corrientes I_1 e I_4.

c) Calcular las potencias aparente, activa y reactiva consumidas por la carga equilibrada resultante.

d) Compensar la potencia reactiva, indicando qué componentes colocar, de qué valor y cómo los conectaría.

Nota: La transfiguración de un triángulo de elementos Z_A, Z_B, Z_C es una estrella de elementos

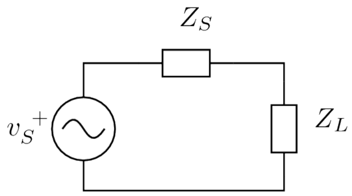
$$\frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C} \;,\; \frac{Z_A Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \;,\; \frac{Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

Sistemas Lineales 1

Examen de diciembre de 2013

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1



En régimen sinusoidal, una fuente $v_S(t) = E.cos(\omega t)$, con impedancia de salida Z_S, alimenta una carga de impedancia Z_L, como se muestra en la figura.

a) Calcular la potencia activa P en la carga Z_L en función de los datos del circuito.

b) Si Z_L está restringida a tener fase φ constante, hallar la condición que debe cumplir el módulo de Z_L ($|Z_L|$) para que Z_L consuma la mayor cantidad de potencia activa posible (i.e. que P sea lo mayor posible).

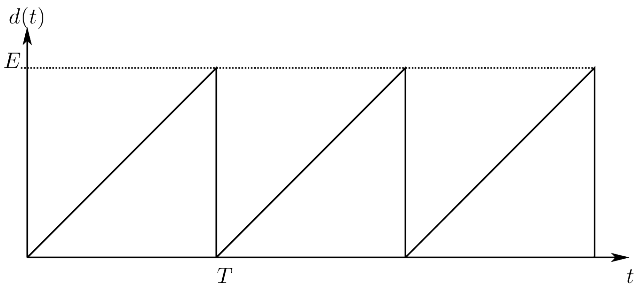
Pregunta 2

a) Sea f una función continua, diferenciable y periódica, de periodo T. **Deducir** la relación entre los coeficientes de Fourier de f ($c_n(f)$) y los de su derivada f' ($c_n(f')$)

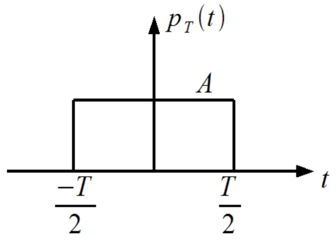
b) Repetir lo anterior para el caso de una distribución periódica, de periodo T

c) Hallar los coeficientes de Fourier del diente de sierra $d(t)$ de la figura, usando las partes anteriores.

d) Hallar el valor medio de $d(t)$



Pregunta 3



Considere el pulso $p_T(t)$ de ancho T y altura A de la figura.

a) Deducir la convolución $p_T(t) * p_T(t)$ y graficarla.

b) Hallar $G(f)$, la Tranformada de Fourier de $p_T(t)$.

c) Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} G(f)df$.

d) Calcular, **de al menos dos maneras diferentes**, la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df$.

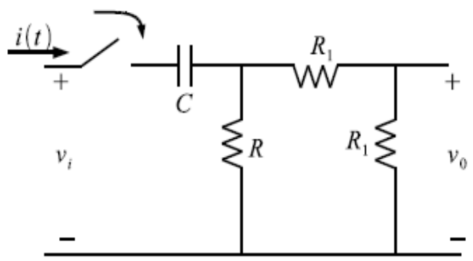
Pregunta 4

Se considera el circuito de la figura.

a) Sea $v_C(t)$ la tensión en bornes de condensador. Deducir una relación entre $v_i(t)$, $v_C(t)$ y $v_o(t)$ y la relación diferencial entre $v_C(t)$ y $v_i(t)$ a partir del instante $t = 0$ en el que se cierra la llave.

b) Concluir que si la tensión de entrada $v_i(t)$ es constante, el capacitor se comporta en régimen como un circuito abierto. Encontrar la respectiva respuesta en régimen $v_o(t)$.

d) Se considera el Diagrama de Bode de módulo de $H(j\omega)$. ¿Qué efecto tiene el valor de la resistencia R en la máxima distancia entre el Diagrama real y el asintótico?



Solución

Problema 1

a) Planteando la ecuación enrégimen del transformador simple y el nudo V_0, luego de operar se obtiene:

$$H(j\omega) = \frac{V_0(j\omega)}{I_0(j\omega)} = \frac{R(2L+M)(j\omega)}{2L(j\omega)+R} = \left(2\frac{L}{M}+1\right)\frac{R}{2}\frac{M}{L}\frac{(j\omega)}{\left(j\omega+\frac{R}{2L}\right)}$$

b) Con los datos de la letra:

$$H(j\omega) = \frac{3R}{2}\frac{(j\omega)}{\left(j\omega+\frac{\omega_0}{2}\right)}$$

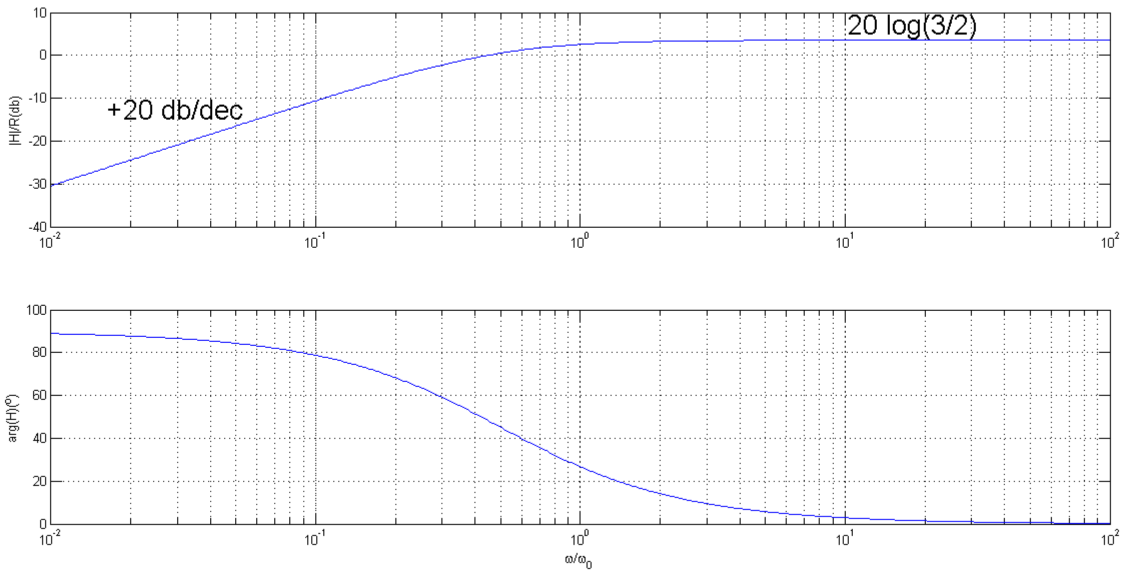
La aproximación asintótica por bandas es la siguiente:

- $\omega \ll \frac{\omega_0}{2} \Rightarrow$

$$H(j\omega) \approx \frac{3R}{2}\frac{(j\omega)}{\left(\frac{\omega_0}{2}\right)} = 3R\frac{j\omega}{\omega_0}$$

- $\omega \gg \frac{\omega_0}{2} \Rightarrow$

$$H(j\omega) \approx \frac{3R}{2}\frac{(j\omega)}{(j\omega)} = \frac{3R}{2}$$



Vemos que el circuito constituye un filtro pasa-altos de primer orden.

c) Para las frecuencias indicadas, elvalor asintótico es siempre el mismo:

$$|H_{as}(j\omega)| = \frac{3}{2}R$$

Mostramos solo el cálculo de la distancia pedida para $\omega_0/2$. Calculemos el valor real:

$$|H_{re}(j\omega_0/2)| = \left|\frac{3R}{2}\frac{j\frac{\omega_0}{2}}{\left(j\frac{\omega_0}{2}+\frac{\omega_0}{2}\right)}\right| = \frac{3R}{2}\left|\frac{j}{(j+1)}\right| = \frac{3R}{2\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$

$$dist_{\frac{\omega_0}{2}} = 20\log\left[\frac{|H_{re}(j\omega_0/2)|}{|H_{as}(j\omega_0/2)|}\right] = 20\log\left[\frac{\frac{3R}{2\sqrt{2}}}{\frac{3}{2}R}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx -3db$$

e) Para la corriente de entrada $i(t) = I_0 \cos(10\omega_0 t + \pi)$, la respectiva respuesta en régimen es la siguiente:

$$v_o(t) = |H(j10\omega_0)|.I_0.\cos\left(10\omega_0 t + pi + arg(H(j10\omega_0))\right)$$

d) La componente fundamental de la entrada es

$$i_1(t) = c_1(i)e^{j\frac{2\pi}{T}t} + c_{-1}(i)e^{-j\frac{2\pi}{T}t}$$

siendo $c_1(i)$ y c_{-1} los coeficientes de Fourier de orden 1 de $i(t)$ y $\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi 5\omega_0}{\pi} = 10\omega_0$. Estos coeficientes de Fourier pueden calcularse directamente por integración. La fundamental es de la misma frecuencia que la de la parte anterior, por lo que la atenuación será casi nula, según lo ya calculado. Además, sabemos que la respuesta en régimen del sistema ante una entrada periódica $i(t)$ de periodo T es

$$v_o(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(i).H\left(jn\frac{2\pi}{T}\right)e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$$

Considerando la parte anterior, vemos que, aproximadamente, tanto la fundamental como todos los armónicos superiores pasan por el filtro pasa-altos. Por lo tanto, la respuesta en régimen será, aproximadamente, un diente de sierra de periodo T y valor medio nulo.

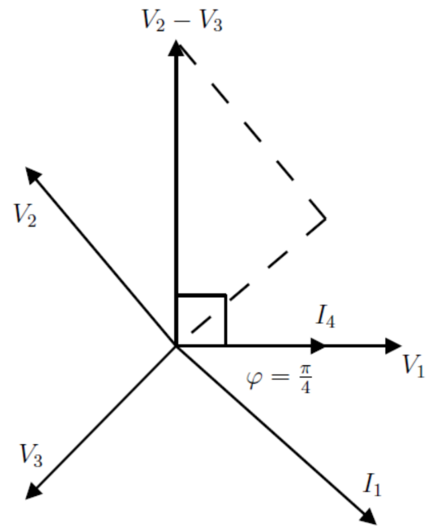
Problema 2

a)Transfiguramos el triángulo de impedancias Z_2, Z_3, Z_4 y aplicamos la fórmula dada, teniendo en cuenta lo que representa el resultado y qué impedancia debe ir en cada rama de la estrella resultante. Para tener una carga equilibrada, se debe cumplir que:

$$Z_1 + \frac{Z_2Z_3}{Z_2+Z_3+Z_4} = \frac{Z_2Z_4}{Z_2+Z_3+Z_4} = \frac{Z_3Z_4}{Z_2+Z_3+Z_4}$$

De donde $Z_3 = Z_2 = 100\Omega$ y $Z_1 = (25 + j75)\Omega$. El equivalente monofásico es $Z_M = (50 + j50)\Omega$.

b)Las tensiones en los secundarios de los transformadores son iguales a las de sus primarios, lo que da una relación conocida entre las tensiones de las fuentes y las tensiones compuestas en la carga trifásica. En particular, la tensión en bornes de de Z_4 es $V_2 - V_3$ y la corriente I_1 puede calcularse directamente en el equivalente monofásico. El cálculo numérico de los fasores se deja como ejercicio.



c) Las potencias consumidas por el equivalente monofásico valen:

$$S_M = 684,5\angle\frac{\pi}{4}VA \quad , \quad P_M = 484W \quad , \quad Q_M = 484VAR$$

Las potencias trifásicas son el triple de las anteriores.

d) Considerando que la carga es inductiva, para compensr la reactiva colocamos una estrella de condensadores idénicos, cuyo valor lo obtenemos de compensar la reactiva en el equivalente monofásico. $C = 32\mu F$. Transfigurando, podemos poner un triángulo de condensadores idénticos, de valor más pequeño.