Sistemas Lineales 1

Examen de diciembre de 2012

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

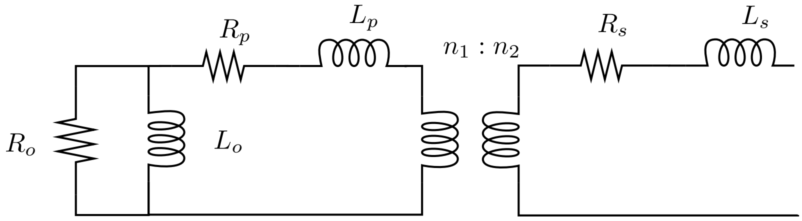


Figura 1:

En la figura 1 se presenta un modelo realista de un transformador. En la figura 2 se muestra un sistema trifásico perfecto, que contiene tres transformadores (uno por fase) y como carga (también trifásica) un condensador real (cuyo modelo también se presenta en la figura 2).

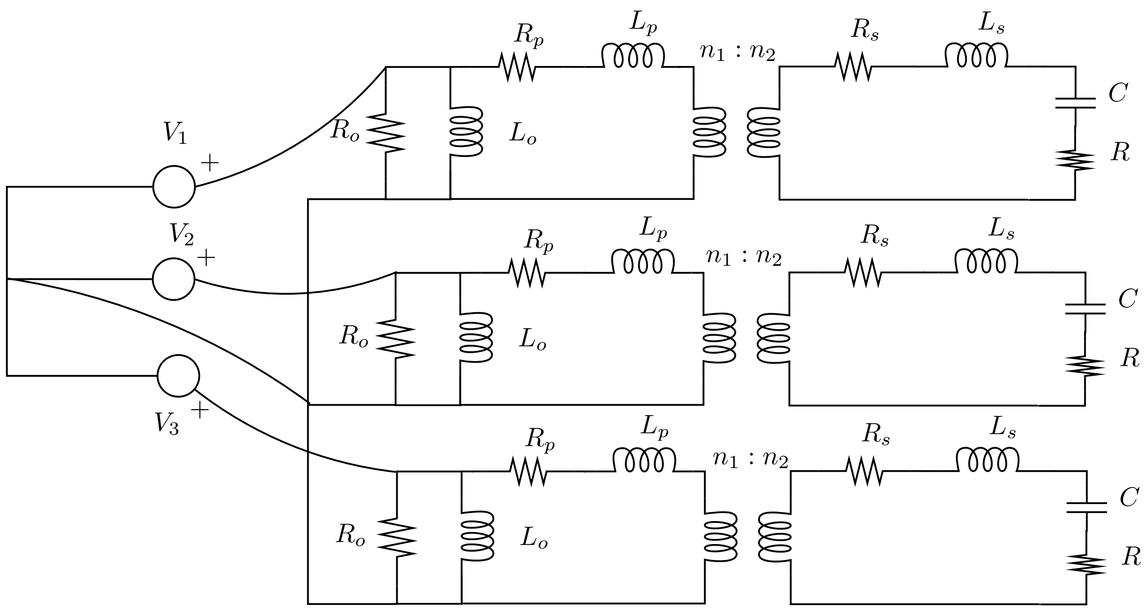


Figura 2:

a) Se pide hallar la expresión de la impedancia vista por cada una de las fases 1, 2 y 3 del sistema trifásico.

b) De aquí en adelante se considera que: $R_p = R_s = R_o = R$, $L_s = L_p = L_o = L$ y $n_1 = n_2$. Halle el fasor de corriente de entrada de cada una de las fases 1, 2 y 3.

c) Considere que $\omega = 100\pi rad/s$, $R = 2\Omega$, $L = 500\mu Hy$ y $C = 2{,}2mF$. Calcule la impedancia vista por cada una de las fases del sistema trifásico bajo consideración.

d) ¿El circuito es inductivo o capacitivo? **Justifique!!!**

e) Se desea que el sistema de fuentes trifásico sólo vean una carga resistiva pura y se debe mantener la potencia activa consumida en el mismo valor luego de compensar. Indicar esquemáticamente dónde pondría el elemento pasivo de compensación, forma de conexión y su valor (con sus respectivas unidades).

f) Se considera el sistema trifásico de la figura 3, donde Z_1, Z_2, Z_3 son las impedancias vistas por cada una de las fases 1, 2 y 3 del sistema trifásico de la figura 2 y los fusibles son ideales, es decir, mientras el valor eficaz de la corriente no supera un cierto umbral, funcionan como un cable ideal. Sabiendo que que $Z_L = (2+3j)m\Omega$ y que el sistema de fuentes es el siguiente:

$$v_1(t) = 325V sen(\omega t)$$
$$v_2(t) = 325V sen(\omega t - 2\pi/3)$$
$$v_3(t) = 325V sen(\omega t + 2\pi/3)$$

halle las expresiones temporales de las corrientes de las líneas.

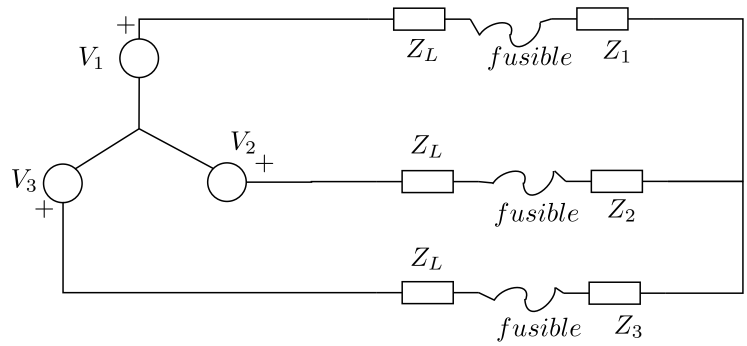


Figura 3:

g) Por alguna razón desconocida surge un cortocircuito trifásico en bornes de las cargas, quedando el circuito de falla como se muestra en la figura 4. Se desea saber si los fusibles son capaces de abrir para que no se queme la instalación durante el cortocircuito. Sabiendo que el umbral de apertura de los fusibles es de $40kA$, determinar si la instalación está protegida.

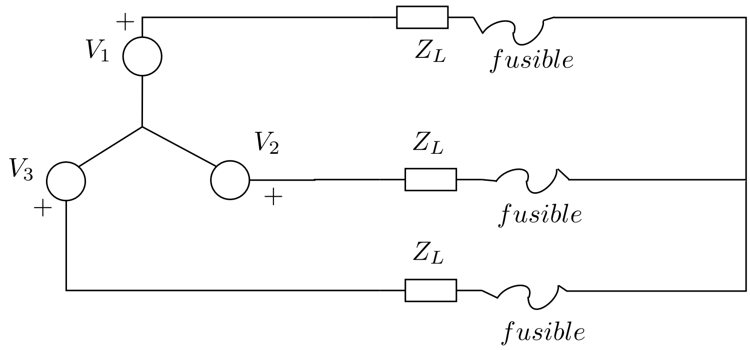


Figura 4:

Problema 2

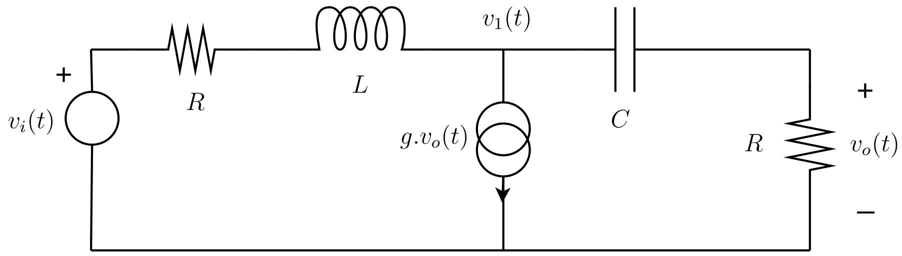


Figura 5: Circuito del Ejercicio 2.

Considere el circuito de la figura 5.

a) Calcular la transferencia en régimen sinusoidal $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$.

b) Simplificar la expresión anterior utilzando las siguientes relaciones, que se mantendrán para el resto del ejercicio:

$$\frac{1}{1+gR} = LC\omega_0^2 \quad , \quad RC\omega_0 = 1$$

($\omega_0 > 0$).

c) Hallar una relación entre g y R que asegure que

$$H(j\omega) = \frac{\omega_0(j\omega)}{(j\omega)^2 + \frac{5}{2}\omega_0(j\omega) + \omega_0^2}$$

d) Deducir y dibujar los Diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase de esta transferencia en régimen.

e) i) ¿Qué puede afirmar sobre la relación entre el Diagrama real de módulo y el asintótico?

ii) ¿Existe alguna frecuencia de trabajo ω_1 para la cual la respuesta en régimen está exactamente en fase con la entrada? En caso afirmativo, hallarla explícitamente. Justificar!!

iii) ¿Existe alguna frecuencia de trabajo ω_2 para la cual la respuesta en régimen presenta la mitad de la amplitud de la entrada? En caso afirmativo, hallarla explícitamente. Justificar!!

iv) Si a la entrada del circuito se inyecta una onda cuadrada de 5 Volts de valor medio, ¿cuál será el valor medio de la respectiva respuesta en régimen? Justificar!!

Sistemas Lineales 1

Examen de diciembre de 2012

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

Sean $0 < a < b < c$. Se consideran las transferencias en régimen sinusoidal:

$$H_1(j\omega) = \frac{(j\omega - b)}{(j\omega + a)(j\omega - c)} \quad , \quad H_2(j\omega) = \frac{(j\omega + b)}{(j\omega - a)(j\omega + c)} \quad , \quad H_3(j\omega) = \frac{(j\omega + b)}{(j\omega - a)(j\omega - c)}$$

(a) Mostrar que todas estas transferencias tiene el mismo Diagrama de Bode real de módulo.

(b) Indicar cuál de los Diagramas de Bode de fase mostrados en la figura 6 corresponde a cada transferencia. Justificar!!

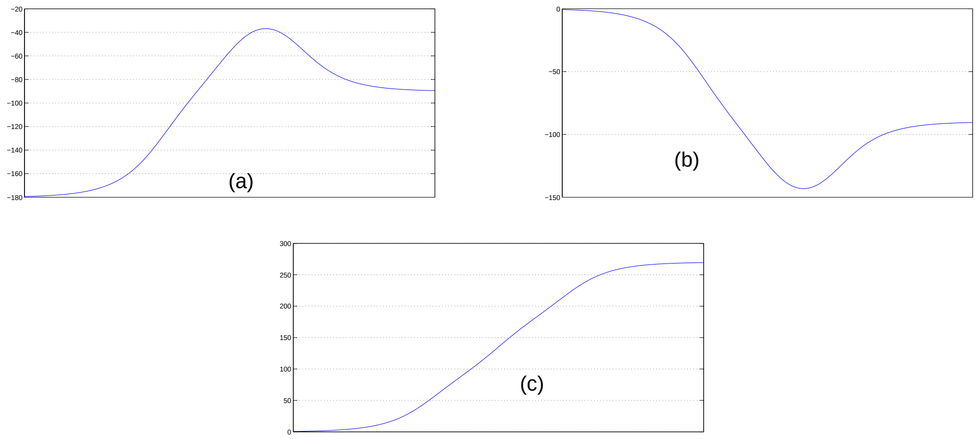


Figura 6: Diagramas de la Pregunta 1.

Pregunta 2

Se sabe que la siguiente ecuación diferencial relaciona la entrada $v_i(t)$ y la salida $v_o(t)$ de un circuito lineal, causal, invariante en el tiempo:

$$\frac{\partial^2 v_o}{\partial t^2} + 2\frac{\partial v_o}{\partial t} + v_o = \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

Hallar una distribución h que verifique que $v_o = h * v_i$, para toda entrada del circuito.

Pregunta 3

(a) Hallar la Transformada de Fourier de $p_T(t)$, pulso de ancho T, centrado en 0 y altura 1.

(b) Calcular la integral impropia

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(\pi x T)}{\pi x} dx$$

y verificar que el valor no depende de T.

(c) Se considera el problema de la figura 7. Bosquejar aproximadamente los espectros de las señales $x(t)$, $r_1(t)$ y $r_2(t)$, indicando cuál de las dos últimas (r_1 ó r_2) tiene más energía. Justificar!!

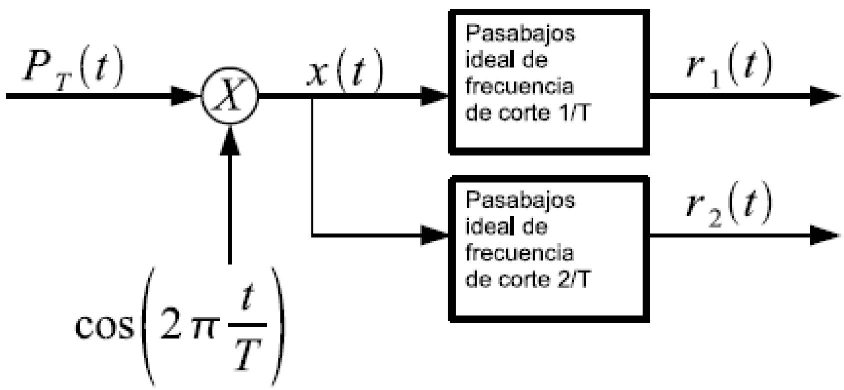


Figura 7: Esquema de la Pregunta 3.

Pregunta 4

(a) El circuito de la figura 8-a) está funcionando en régimen sinnusoidal. Deducir una relación entre Z_f y Z_L que asegure que se disipa la máxima potencia posible en Z_L.

(b) Para el circuito de la figura 8-b), con excitación $v_i(t) = A\cos(\omega_0 t)$ y $R_1 = R_2$, hallar el valor del condensador C_2, en función de los demás parámetros del circuito, que asegure que se disipa la máxima potencia activa en la carga.

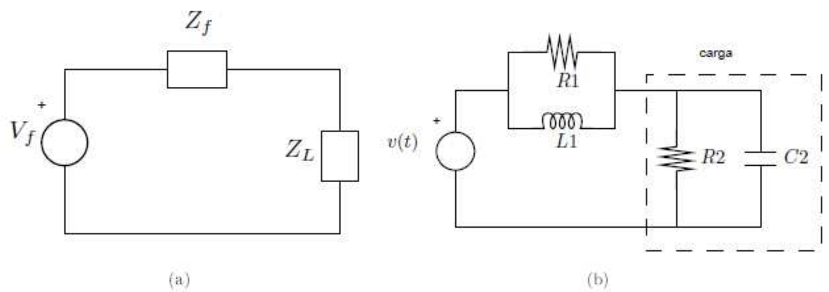


Figura 8: Circuitos de la Pregunta 4.

Solución

Problema 1

a) Por ser el sistema perfecto podemos trabajar con el equivalente monofásico, el cual se reduce a hallar la impedancia vista por el modelo del transformador real cuando se conecta como carga el modelo del condensador real. Entonces la impedancia vista para la fase R (que es la misma que la fase T y S) queda como sigue:

$$Z_V = Z1 // \frac{R_o j\omega L_o}{R_o + j\omega L_o}$$

donde:

$$Z_1 = R_p + j\omega L_p + (\frac{n_1}{n_2})^2((R_s + R) + j\omega L_s + \frac{1}{j\omega C})$$

Haciendo un poco de álgebra resulta que:

$$\boxed{Z_V = \frac{(R_p + j\omega L_p + (\frac{n_1}{n_2})^2(j\omega L_s + \frac{1}{j\omega C}))\frac{R_o j\omega L_o}{R_o + j\omega L_o}}{R_p + j\omega L_p + (\frac{n_1}{n_2})^2(j\omega L_s + \frac{1}{j\omega C}) + \frac{R_o j\omega L_o}{R_o + j\omega L_o}}}$$

b) Utilizando el resultado previo se puede hallar la corriente consumida por cada una de las fases vía ley de Ohm:

$$\boxed{I_R = \frac{(j\omega)^3 2L^2C + (j\omega)^2 4RLC + (j\omega)(L + R^2C) + R}{(j\omega)^3 2RL^2C + (j\omega)^2 R^2LC + (j\omega)RL} V_R}$$

Nota: el fasor corriente para las fases S y T se obtiene intercambiando el subíndice de la fase R (en la expresión anterior) por S y T, respectivamente.

c) Sustituyendo los parámetros dados en la letra del problema tenemos que:

$$\boxed{Z_V = 6{,}214\Omega < -81{,}9^o = (0{,}879 - j6{,}152)\Omega}$$

d) El circuito es capacitivo pues la parte imaginaria de la impedancia vista (calculada en la parte anterior) es negativa.

e) Se debe colocar una bobina en paralelo con R_o. Imponiendo que la reactiva total del circuito sea nula se tendrá el valor de la inductancia. El balance de reactiva queda como sigue:

$$Q_L + Q_{Z_V} = \frac{X_V}{X_V^2 + R_V^2} + \frac{1}{\omega L} = 0$$

donde: $X_V = -6{,}152\Omega$ y $R_V = 0{,}879\Omega$.

Así resulta que:

$$\boxed{L = 20mHy}$$

f) Nuevamente podemos trabajar con el monofásico equivalente por ser el sistema perfecto. Las corrientes por las fases R, S y T quedan como siguen:

$$I_R = \frac{325V}{(2+3j)m\Omega + (0{,}879 - j6{,}152)\Omega} = 52{,}3A < 81{,}8^o$$
$$I_S = \frac{325V < -2\pi/3}{(2+3j)m\Omega + (0{,}879 - j6{,}152)\Omega} = 52{,}3A < -38{,}2^o$$
$$I_T = \frac{325V < 2\pi/3}{(2+3j)m\Omega + (0{,}879 - j6{,}152)\Omega} = 52{,}3A < 201{,}8^o$$

Por lo tanto, las expresiones temporales quedan de la siguiente manera:

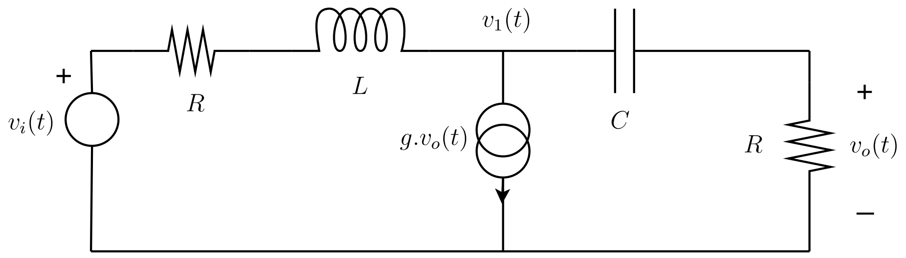
$$\boxed{i_R(t) = 52{,}3Asen(\omega t + 81{,}8^o)}$$
$$\boxed{i_S(t) = 52{,}3Asen(\omega t - 32{,}8^o)}$$
$$\boxed{i_T(t) = 52{,}3Asen(\omega t + 201{,}8^o)}$$

g) El valor RMS de la corriente de falla queda como sigue:

$$\boxed{I_{FALLA} = \frac{\frac{325V}{\sqrt{2}}}{|(2+j3)m\Omega|} = 63{,}7kA}$$

Por lo tanto la instalación se salvará. :)

Problema 2



a) Planteamos la ecuación de Kirchoff del nodo 1, en fasores:

$$\frac{V_i - V_1}{R + lj\omega} = gV_o + \frac{V_o}{R} = \left(\frac{gR+1}{R}\right)V_o \Rightarrow V_i = V_1 + \left(\frac{(R+Lj\omega)(1+gR)}{R}\right)V_o$$

Por otro lado, mediante un divisor de tensión, podemos relacionar V_o con V_1:

$$V_o = \left(\frac{R}{R + \frac{1}{Cj\omega}}\right)V_1 \Rightarrow V_1 = \left(\frac{1+RCj\omega}{RCj\omega}\right)V_o$$

Combinando ambas expresiones, obtenemos la salida en función de la entrada:

$$V_i = \left[\frac{(1+RCj\omega)}{RCj\omega} + \frac{(R+Lj\omega)(1+gR)}{R}\right]V_o$$

De donde:

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{RCj\omega}{1 + (2+gR)RCj\omega + (1+gR)LC(j\omega)^2}}$$

b) Simplificamos la expresión:

$$H(j\omega) = \frac{RCj\omega}{(1+gR)LC\left[\frac{1}{(1+gR)LC} + \frac{(2+gR)RC}{(1+gR)LC}(j\omega) + (j\omega)^2\right]} = \frac{(\frac{R}{L})(j\omega)}{(1+gR)\left[\frac{1}{(1+gR)LC} + \frac{(2+gR)}{(1+gR)}(\frac{R}{L})(j\omega) + (j\omega)^2\right]}$$

$$(1+gR)LC = \frac{1}{\omega_0^2} \quad , \quad RC = \frac{1}{\omega_0} \Rightarrow \frac{\frac{R}{L}}{(1+gR)} = \omega_0$$

Entonces

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{\omega_0(j\omega)}{(j\omega)^2 + (2+gR)\omega_0(j\omega) + \omega_0^2}}$$

c) Imponiendo la identidad:

$$H(j\omega) = \frac{\omega_0(j\omega)}{(j\omega)^2 + (2+gR)\omega_0(j\omega) + \omega_0^2} = \frac{\omega_0(j\omega)}{\left(j\omega + \frac{\omega_0}{2}\right)(j\omega + 2\omega_0)} = \frac{\omega_0(j\omega)}{(j\omega)^2 + \frac{5}{2}\omega_0(j\omega) + \omega_0^2}$$

resulta $\boxed{gR = \frac{1}{2}}$.

d) Para obtener los Diagramas de Bode asintóticos, realizamos un análisis por bandas de frecuencia. Las frecuencias críticas son: $\omega_0/2$ y $2\omega_0$. Entonces

- $\omega \ll \frac{\omega_0}{2} \Rightarrow$

$$H(j\omega) \approx \frac{\omega_0(j\omega)}{\left(\frac{\omega_0}{2}\right)(2\omega_0)} = \frac{(j\omega)}{\omega_0} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & [20\log(\omega) - 20\log(\omega_0)]\, db \\ arg(H) & \approx & 90^o\ (-270^o) \end{cases}$$

- $\frac{\omega_0}{2} \ll \omega \ll 2\omega_0 \Rightarrow$

$$H(j\omega) \approx \frac{\omega_0(j\omega)}{(j\omega)\,(2\omega_0)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & -20\log(2) \approx -6db \\ arg(H) & \approx & 0\ (\pm 360^o) \end{cases}$$

- $2\omega_0 \ll \omega \Rightarrow$

$$H(j\omega) \approx \frac{\omega_0(j\omega)}{(j\omega)\,(j\omega)} = \frac{\omega_0}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H| & \approx & [20\log(\omega_0) - 20\log(\omega)]\, db \\ arg(H) & \approx & -90^o\ (+270^o) \end{cases}$$

Las singularidades corresponden a raíces simples, por lo que cada una sólo aporta una variación de fase de $\pm 90^o$. Los Diagramas de Bode asintóticos se bosquejan en la figura 9, donde se muestran también los reales. **e)i)** Las singularidades, $\frac{\omega_0}{2}$ y $2\omega_0$ distan solamente dos octavas entre sí, por lo

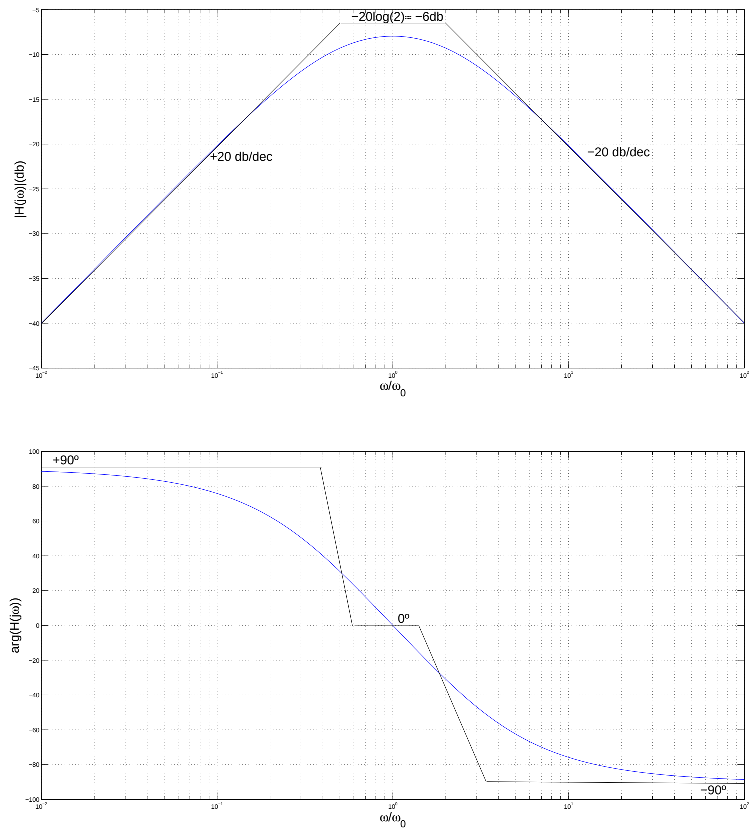


Figura 9: Diagramas de Bode reales y asintóticos.

que la aproximación asintótica solamente va a ser buena en baja y alta frecuencia, no así en la banda intermedia centrada en $omega_0$. Por ejemplo, en esta banda, la ganancia del sistema no alcanzará los $-6db$ que plantea la aproximación asintótica.

ii) Para una entrada sinusoidal pura $v_i(t) = A.\cos(\omega_1 t + \varphi)$, la relación que vincula la respuesta en régimen con la entrada es la siguiente:

$$v_o(t) = A.|H(j\omega_1)|.\cos\left[\omega_1 t + \varphi + arg(H(j\omega_1)\right]$$

Para que la entrada y la salida estén exactamente en fase, se debe cumplir que $arg(H(j\omega_1) \equiv 0$. De la continuidad del Diagrama de Bode de fase, y del comportamiento asintótico a baja y alta frecuencia, puede verse que efectivamente existe una frecuencia de trabajo, en la banda $\left[\frac{\omega_0}{2}, 2\omega_0\right]$, a la cual eso se cumple. Para calcular esta frecuencia, imponemos que $H(j\omega_1)$ sea real positivo, en lugar de imponer que directamente que la fase sea 0. Introducimos una variable auxiliar real α:

$$H(j\omega_1) = \alpha = \frac{\omega_0(j\omega_1)}{\left(j\omega_1 + \frac{\omega_0}{2}\right)(j\omega_1 + 2\omega_0)} = \frac{\omega_0(j\omega_1)}{(\omega_0^2 - \omega_1^2) + j\frac{5}{2}(\omega_0\omega_1)}$$

Entonces

$$\alpha\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right) + j\alpha\frac{5}{2}(\omega_0\omega_1) = j(\omega_0\omega_1)$$

Igualando las partes reales e imaginarias, resulta $\alpha = \frac{2}{5}$ y $\boxed{\omega_1 = \omega_0}$.

iii) El Diagrama de Bode asintótico de módulo sugiere una respuesta afirmativa a esta pregunta. Sin embargo, el comentario que hicimos antes respecto a la relación entre los Diagramas reales y asintótico en la banda intermedia apunta en sentido contrario. Verifiquemos analíticamente lo que sucede. Para ello, impongamos la existencia de una frecuencia de trabajo ω_2 tal que la amplitud de la respuesta en régimen sea la mitad de la de la respectiva entrada. Se debe cumplir que:

$$|H(j\omega_2)| = \frac{1}{2} \Rightarrow |H(j\omega_2)|^2 = \frac{1}{4} = \frac{\omega_0^2\omega_2^2}{(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2 + \frac{25}{4}\omega_0^2\omega_2^2}$$

Entonces

$$4\omega_0^2\omega_2^2 = (\omega_0^2 - \omega_2^2)^2 + \frac{25}{4}\omega_0^2\omega_2^2 = \omega_2^4 + \omega_0^4 - 2\omega_0^2\omega_2^2 + \frac{25}{4}\omega_0^2\omega_2^2$$

De donde obtenemos la siguiente ecuación bicuadrada en ω_2,

$$\omega_2^4 + \left(\frac{25}{4} - 4\right)\omega_0^2\omega_2^2 + \omega_0^4 = \omega_2^4 + \frac{9}{4}\omega_0^2\omega_2^2 + \omega_0^4 = 0$$

que tiene raíces en ω_2^2 con parte real negativa, lo que muestra que no hay solución para el problema planteado.

iv) Para una entrada periódica, la respectiva respuesta en régimen viene dada por la expresión

$$v_o(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(v_i).|H(jn\omega_i)|.e^{j[n\omega_i t + arg(H(jn\omega_i))]}$$

siendo ω_i la pulsación de la entrada y $c_n(v_i)$ en $n$ésimo coeficiente de Fourier de la entrada. El valor medio o valor de continua de la respuesta en régimen, que se corresponde con el coeficiente de Fourier de orden 0, es entonces nulo, dado que $H(j0) = 0$.