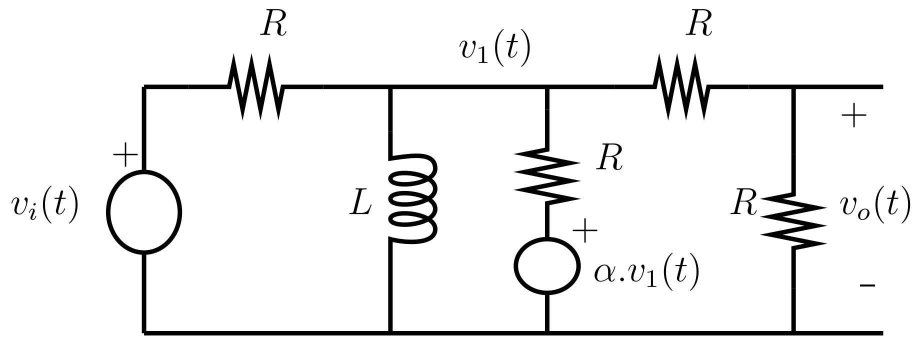
Sistemas Lineales 1

Examen de diciembre de 2011

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

Se considera el circuito de la figura:



a) Hallar la transferencia en régimen $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$.

b) Dibujar los Diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase de $H(j\omega)$, discutiendo según el parámetro real positivo α.

c) Para $\alpha = 2$ y $\omega_0 = \frac{R}{L}$,

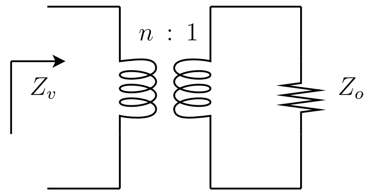
   i) Hallar la ganancia real que el sistema introduce a las frecuencias de trabajo $\omega = \omega_0, 2\omega_0, 10\omega_0$.

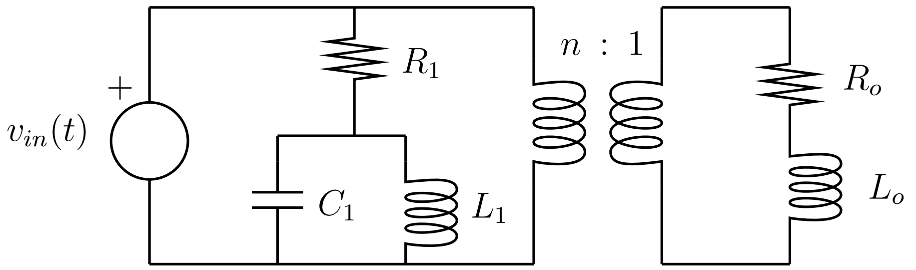
   ii) Hallar la distancia real, **expresada en decibeles**, entre el Diagrama de Bode de módulo real y el asintótico para $\omega = 10\omega_0$.

d) Para $\alpha = 2$, hallar una banda de frecuencias en la cual el sistema introduce una distorsión de módulo menor a $1db$.

Problema 2

a) Sea el transformador ideal de la figura, en donde n es la relación de vueltas del primario al secundario. Calcular la impedancia Z_v vista desde el primario, cuando se carga el secundario con una impedancia Z_o.





b) Se considera el circuito de la figura, funcionando en régimen sinusoidal, con

$$R_1 = 220\Omega \ , \ C_1 = 883nF \ , \ L_1 = 660mHy \ , \ L_o = 16,5mHy \ , \ R_o = 3\Omega \ , \ n = 2$$

y $v_{in}(t) = 220\sqrt{2}\cos(100\pi t)\ V$.

i) Hallar los fasores I_o (corriente por R_o), I_1 (corriente por R_1), I_C (corriente por C_1), I_{L_1} (corriente por L_1) e I (corriente entregada por la fuente).

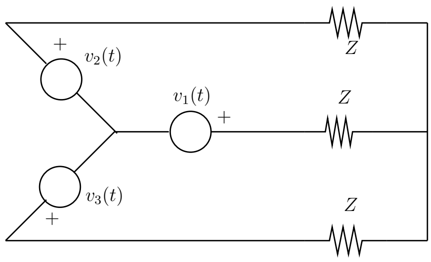
ii) Realizar una diagrama fasorial en el que figuren los fasores V_{in} (tensión de la fuente) y las corrientes anteriores. Manejar cuidadosamente las relaciones geométricas involucradas.

iii) Calcular la potencia activa y reactiva consumida a la fuente.

iv) Compensar la potencia reactiva consumida a la fuente, indicando qué elemento colocaría, cómo lo conectaría en el circuito y qué valor debería tener.

c) Se considera el circuito trifásico de la figura, en donde Z es la impedancia total con la que se carga a la fuente de la parte b) y el sistema de fuentes es el siguiente

$$v_1(t) = 220\sqrt{2}\cos(100\pi t)\,,\ v_2(t) = 220\sqrt{2}\cos(100\pi t + 2\pi/3)\,,\ v_3(t) = 220\sqrt{2}\cos(100\pi t + 4\pi/3)$$



i) Calcular la potencia activa y reactiva consumida al sistema trifásico de fuentes.

ii) Hallar las expresiones temporales de las corrientes de línea.

iii) Compensar la potencia reactiva mediante tres componentes idénticas, conectadaas en triángulo. Indicar qué elementos colocaría, cómo los conectaría en el circuito y qué valor deberían tener

Sistemas Lineales 1

Examen de diciembre de 2011

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

a) Hallar la relación entre la Transformada de Fourier de la función $g(at)$, $\mathcal{F}[g(at)](f)$ y la Transformada de Fourier de la función $g(t)$, $\mathcal{F}[g(t)](f)$, siendo g una función transformable y a un real no nulo.

b) Sea $g(t)$ una señal de banda acotada W. ¿Cuál de las siguientes señales tiene mayor ancho de banda?

   i) $g_1(t) = g(2t)$

   ii) $g_2(t) = g(t/2)$

Pregunta 2

a) Se tiene un sistema lineal representado por sus respuesta al impulso $h(t)$ con soporte en la semirrecta positiva. Sean $e_1(t)$ y $e_2(t)$ dos entradas con soporte en la semirrecta positiva. Mostrar que si $e_1(t)$ y $e_2(t)$ son idénticas en el intervalo $[0, \tau)$, $\tau > 0$, entonces las respectivas respuestas $r_1(t)$ y $r_2(t)$ también son idénticas en dicho intervalo.

b) Se tienen dos sistemas lineales representados por sus respuestas al impulso $h_1(t)$ y $h_2(t)$. Hallar la respuesta al impulso del sistema resultante de conectar en cascada los dos anteriores. Tener en cuenta que la conexión no afecta la respuesta individual de cada sistema.

Pregunta 3

Para una señal periódica $g(t)$, real y de valor medio nulo , de periodo τ, se define la *distorsión armónica* de la siguiente forma:

$$DA(g) = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{+\infty} |c_n(g)|^2}}{V_1}$$

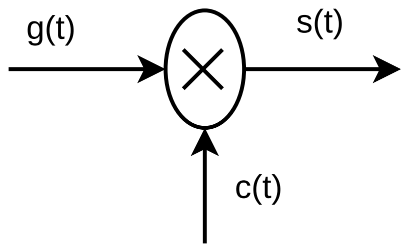
siendo $\{c_n(g)\}$ los coeficientes de Fourier de la señal y V_1 el valor eficaz del primer armónico de $g(t)$.

a) Probar la identidad:

$$DA(g) = \sqrt{\frac{1}{4\tau |c_1(g)|^2} \int_0^{\tau} |g(t)|^2 - \frac{1}{2}}$$

b) Hallar la distorsión armónica para una sinusoide pura y para un diente de sierra de valor medio nulo.

Pregunta 4



a) En el sistema de la figura, donde la señal $s(t)$ es el producto de las señales $g(t)$ y $c(t) = \cos(2\pi f_c t)$, con g de banda acotada W y $f_c \gg W$, bosquejar el espectro de $s(t)$ en función del de $g(t)$.

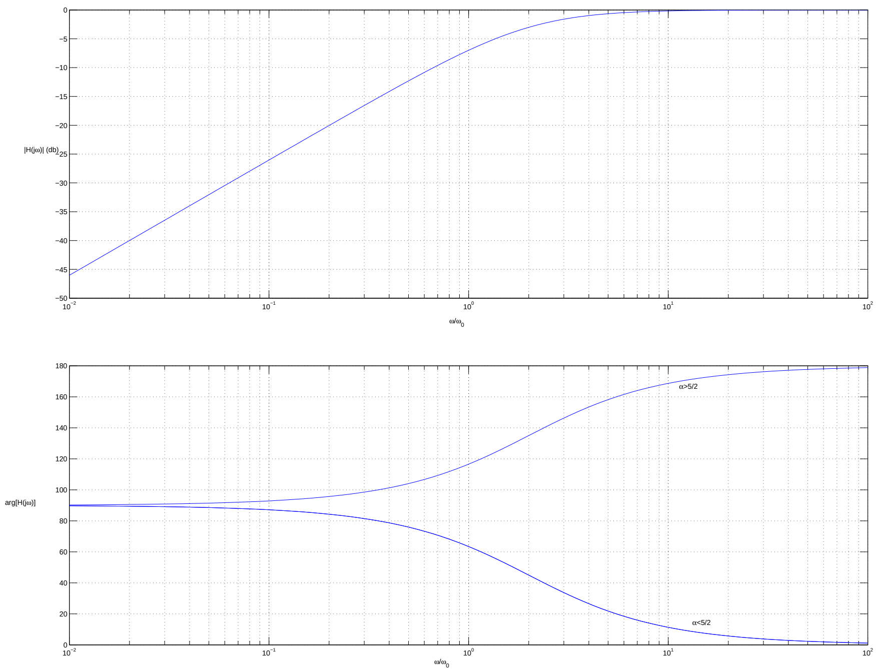
b) Indicar una manera de recuperar la señal $g(t)$ a partir de la señal $s(t)$. (Explicar claramente).

Solución

Problema 1

a) Planteando el nudo en V_1 y considerando que V_o se obtiene de V_1 como un divisor de tensión, resulta:

$$H(j\omega) = \frac{1}{2}\frac{j\omega}{(5/2-\alpha)Lj\omega + R} = \frac{1}{(5-2\alpha)} \times \frac{j\omega}{j\omega + \frac{2}{(5-2\alpha)}\frac{R}{L}}$$



b) Para obtener los Diagramas de Bode asintóticos, realizamos una aproximación asintótica en bandas de frecuencia. Discutimos según la frecuencia $\omega_1 = \frac{2}{(5-2\alpha)}\omega_o$, con $\omega_0 = R/L$.

$$\omega \ll \omega_1 \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{1}{(5-2\alpha)}\frac{j\omega}{\frac{2}{(5-2\alpha)}\frac{R}{L}} = \frac{1}{2}\frac{j\omega}{\omega_0} \Rightarrow \begin{cases} |H| \approx \frac{1}{2}\frac{\omega}{\omega_0} \\ arg(H) \approx 90° \end{cases}$$

$$\omega \gg \omega_1 \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{1}{(5-2\alpha)} \Rightarrow \begin{cases} |H| \approx \frac{1}{(5-2\alpha)} \\ arg(H) \approx 0 \text{ ó } \pi \text{ dependiendo de } \alpha \end{cases}$$

El caso $\alpha = \alpha_c = 5/2$, valor crítico, da lugar a un circuito que no tiene transferencia definida. El Diagrama de módulo no depende de que α sea mayor o menor que el valor crítico, en tanto que el Diagrama de fase sí depende. Las siguentes figuras muestran los Diagramas de Bode de modulo y fase para los distintos casos.

c) Para $\alpha = 2$, tenemos

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + 2\omega_0}$$

Las ganancias reales que el sistema introduce a las siguientes frecuencias de trabajo están dadas por el módulo de H a dichas frecuencias. La siguiente tabla muestra estas ganancias y las respectivas distancias entre el módulo asintótico y el real, expresadas en decibeles:

ω	$\|H(j\omega)\|$	$Dist\ (db)$
ω_0	$1/\sqrt{5}$	1
$2\omega_0$	$1/\sqrt{2}$	3
$10\omega_0$	$10/\sqrt{104}$	0,2

d) De la observación del Diagrama de Bode de módulo, se observa que presenta una respuesta bastante plana en una banda de la forma $[\omega_C, +\infty)$. Para que la distorsión de módulo sea menor que 1 db, debemos determinar ω_C de forma tal que la variación total en esta banda no supere 1db. Formalmente, deberíamos hallar ω_C tal que $|H(j\omega_C| = 1db$. De los resultados de la parte c), se observa que $\omega_C \approx \omega_0$.

Problema 2

a) $Z_v = n^2 Z_o$.

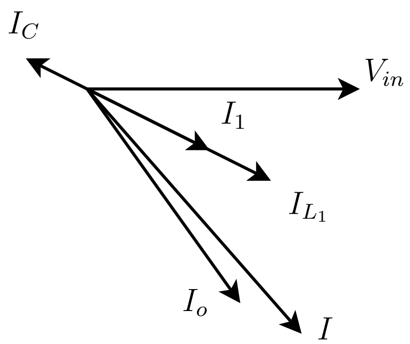
b)

i)

$$I_1 = V_{in}\frac{1 - L_1C_1\omega^2}{R_1(1 - L_1C_1\omega^2 + L_1\omega)}, I_L = \frac{I_1}{1 - L_1C_1\omega^2}, I_C = \frac{-C_1L_1\omega^2 I_1}{1 - L_1C_1\omega^2}$$

$I_o' = \frac{V_{in}}{4(R_o + jL_o\omega)}$ (corriente del primario)

$$I = I_1 + I_o'$$



ii)

iii) $P = R_1|I_1|^2 + P = R_o|I_o|^2 = 1121W$,
$Q = L_1\omega|I_L|^2 + L_o\omega|I_o|^2 - \frac{1}{C_1\omega}|I_C|^2 = 1858VAR$.

iv) Como la potencia reactiva es positiva, la fuente ve una impedancia inductiva. Compensamos con un condensador de valor C en bornes de la fuente. Este condensador debe aportar
$Q_C = -Q = -|V_{in}|^2 C\omega$. Entonces $C \approx 122,2\mu F$.

c)

i) Como el sistema está en estrella y es equilibrado, la potencia trifásica activa y reactiva es el triple que la calculada en la parte b). El equivalente monofásico coincide con el circuito estudiado en la parte b).

ii) Las corrientes de línea son, en módulo, idénticas a la corriente entregada por la fuente en la parte b). Las expresiones temporales son las siguientes:

$$i_1(t) = |I_{b)}|\sqrt{2}\cos\big(\omega t + arg(I_{b)})\big)$$
$$i_2(t) = |I_{b)}|\sqrt{2}\cos\big(\omega t + arg(I_{b)} + 2\pi/3)\big)$$
$$i_3(t) = |I_{b)}|\sqrt{2}\cos\big(\omega t + arg(I_{b)}) + 4\pi/3\big)$$

iii) En el equivalente monofásico, calculamos el condensador para compensar reactiva, que coincide con lo calculado en la parte b). Como se pide conectar en triángulo, la impedancia debe ser tres veces más grande, por lo que los condensadores a colocar son tres veces más pequeños: $C_t \approx \mu F$.