Sistemas Lineales 1

Examen de diciembre de 2010

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

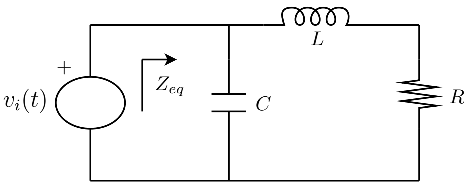


Figura 1:

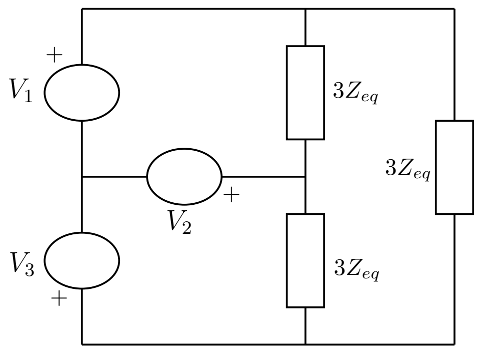


Figura 2:

En la figura 1, considerando el circuito en régimen sinusoidal y los siguientes datos:

$$v_i(t) = 220V\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(100\pi t - \pi/6) \quad , \quad R = 22\Omega \quad , \quad L = 120mHy \quad , \quad C = 12\mu F$$

(a) i) Halle la impedancia vista por la fuente, $Z_{eq} = R_{eq} + jX_{eq}$, a la frecuencia de trabajo. Halle exprésamente su resistencia R_{eq} y su reactancia X_{eq}. Indique si es capacitiva o inductiva.

ii) Halle el fasor I asociado a la corriente que entrega la fuente de tensión y el fasor I_L de la corriente por la bobina. **Halle el valor eficaz de la corriente que entrega la fuente**.

iii) Realice un diagrama fasorial con I, I_L y V_i (fasor de la fuente de tensión). Incorpore al diagrama anterior los fasores I_C (fasor de la corriente por el condensador), V_R y V_L (fasores de la tensión en bornes de la resistencia y la bobina respectivamente). (No es necesario hallarlos explícitamente, pero el dibujo debe ser coherente con el circuito y las componentes involucradas).

(b) i) Calcule la potencia activa y reactiva consumida a la fuente.

ii) Se pretende compensar la potencia reactiva consumida a la fuente. Indique qué componente colocaría, cómo la conectaría y qué valor tendría que tener para realizar la compensación.

(c) En el circuito trifásico mostrado en la figura 2, halle las **expresiones temporales** de las corrientes de línea $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, sabiendo que.

$$v_1(t) = 220V\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(100\pi t - \pi/6) \quad , \quad v_2(t) = 220V\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(100\pi t - \pi/6 + 2\pi/3)$$
$$v_3(t) = 220V\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(100\pi t - \pi/6 + 4\pi/3) \quad ,$$

Problema 2

Considere el circuito mostrado en la figura 6.

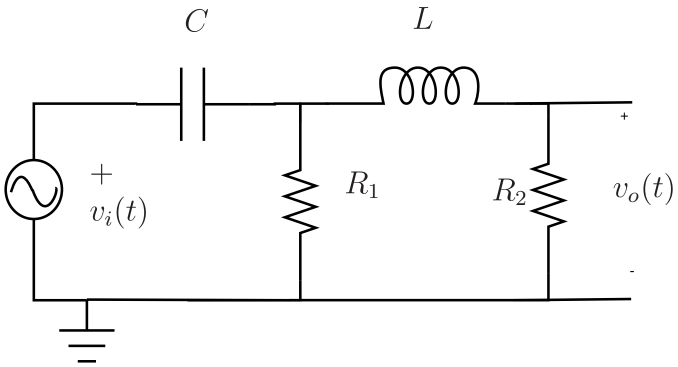


Figura 3:

(a) Calcule la función de transferencia en régimen $H(j\omega) = \dfrac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$

(b) Demuestre que $H(j\omega)$ se puede escribir como

$$H(j\omega) = \frac{R_2}{L} \frac{(j\omega)}{[(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_0(j\omega) + \omega_0^2]}$$

y calcule ζ y $\omega_0 > 0$ en función de R_1, R_2, L y C. Verifique que $\zeta > 0$.

De aquí en adelante asuma que $\zeta < 1$.

(c) Realice los Diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase y bosqueje el Diagrama real de módulo.

(d) Calcule la ganancia del sistema para $\omega = \omega_0$ en función de R_1, R_2, L y C.

(e) El filtro estudiado en las partes anteriores se utilizará para eliminar el ruido en una señal, como se muestra en la figura 4. Considere $v_1(t) = \cos(\omega_1 t) + r(t)$, donde $r(t)$ es un ruido no deseado cuyo espectro tiene componentes sólo en frecuencias mayores que $10\omega_1$.

I) Suponiendo que $max\{\omega_{osc}, \omega_0\} < \omega_1$, determine ω_{osc} en función de R_1, R_2, L y C de modo que a la salida del filtro H no se tenga potencia apreciable de ruido. **Explique bien.**

II) Para el valor de ω_{osc} determinado anteriormente, bosqueje los espectros de las señales $v_1,\ v_2,\ v_{osc}$ y v_3.

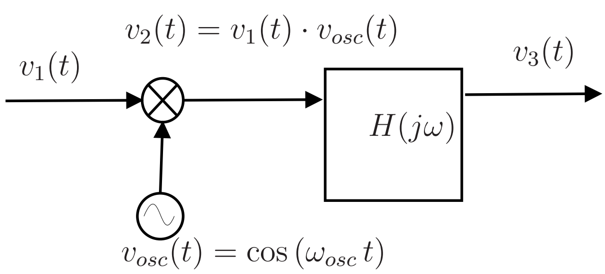


Figura 4:

Sistemas Lineales 1

Examen Diciembre del 2010

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

Calcule los coeficientes de Fourier de un diente de sierra de periodo T, calculando previamente los coeficientes de Fourier de la derivada segunda del diente de sierra considerado como distribución.

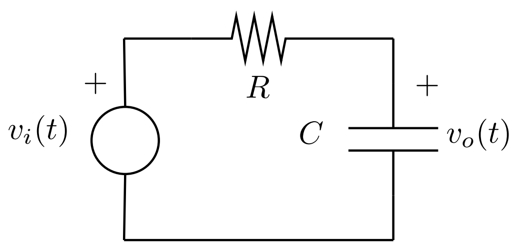
Pregunta 2

Consideremos un sistema trifásico con un sistema de fuentes en estrella, equilibrado y perfecto. Se define la potencia instantánea que entrega cada fuente de la manera usual , como el producto de la tensión en bornes de la fuente por la corriente que entrega la fuente. Se define la potencia instantánea trifásica como la suma de las potencias instantáneas de cada fuente.

a) Muestre que si el sistema alimenta una carga equilibrada, entonces la potencia instantánea trifásica es constante.

b) Deduzca, para el caso de una carga equilibrada, la fórmula $P = \sqrt{3}|U_{12}|.|I_1|$, siendo P la potencia activa trifásica, U_{12} el fasor de la tensión compuesta entre las líneas 1 y 2 e I_1 el fasor de la corriente de la línea 1.

Pregunta 3



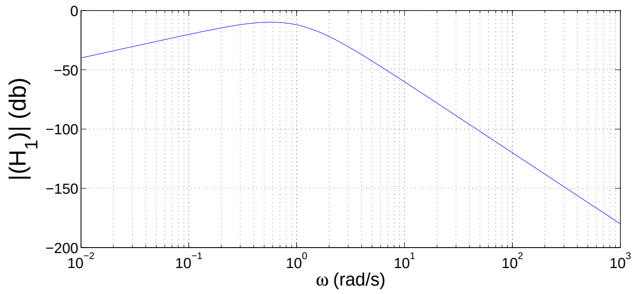
(a) En el circuito de la figura, halle una distribución $T \in \mathcal{D}'$ tal que $v_i = T * v_o$.

(b) Halle la respuesta al impulso del circuito, considerando como entrada la tensión $v_i(t)$ y como salida la tensión $v_o(t)$.

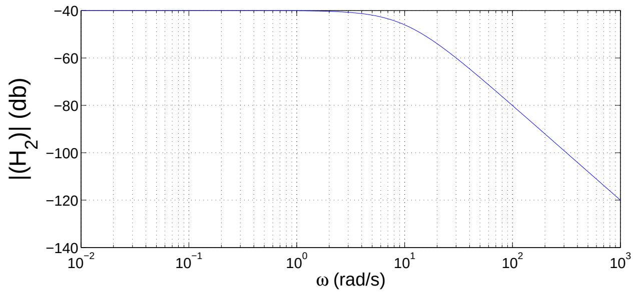
(c) Halle la respuesta del circuito a un escalón de tensión en la entrada.

Pregunta 4

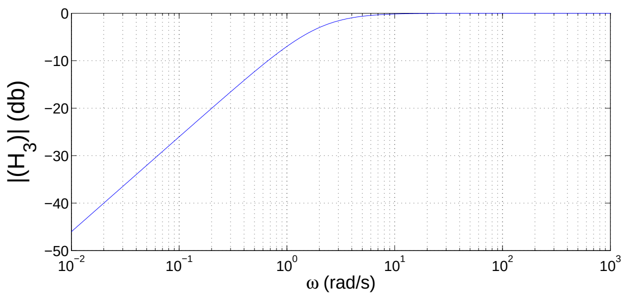
Se considera un sistema lineal. Se sabe que a una onda cuadrada de valor medio no nulo y frecuencia adecuada, el sistema responde en régimen con una señal prácticamente sinusoidal pura. ¿Cuál o cuáles de los siguientes Diagramas de Bode de módulo pueden corresponder a la transferencia en régimen de dicho sistema? **La pregunta se considerará correcta sólo si justifica claramente su respuesta para cada Diagrama**.



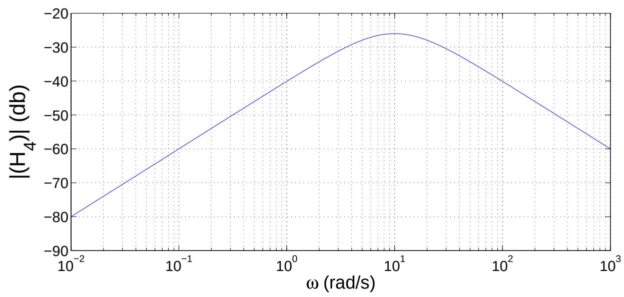
(a) $H_1(j\omega)$



(b) $H_2(j\omega)$



(c) $H_3(j\omega)$



(d) $H_4(j\omega)$

Solución

Problema 1

(a) i) La expresión para Z_{eq} se obtiene haciendo

$$Z_{eq} = \frac{1}{Cj\omega}||(R + Lj\omega) = \frac{R + Lj\omega}{LC(j\omega)^2 + RC(j\omega) + 1}$$

Incorporando los datos, resulta:

$$Z_{eq} = (29,6 + j41,1)\Omega = 50,6\Omega\angle 54,2°$$

La impedancia es inductiva, pues su reactancia es positiva.

ii) Tenemos que $I = \frac{V_i}{Z_{eq}}$[a]. Si trabajamos en valores eficaces, entonces $|V_i| = 220V$ y el valor eficaz de la corriente que entrega la fuente es de $4,34A$. Además

$$I_L = \frac{V_i}{R + Lj\omega}$$

iii)

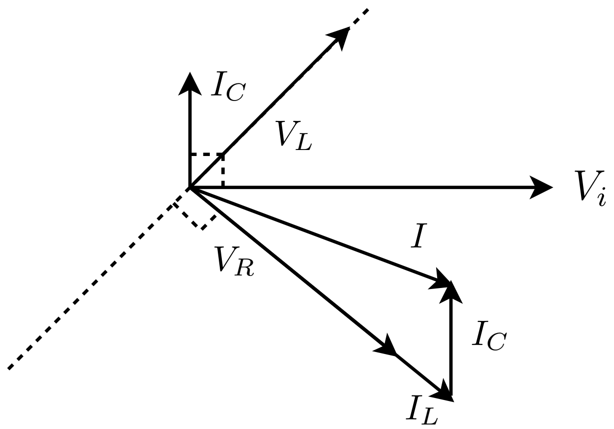


Figura 5: Diagrama fasorial del circuito del Ejercicio 1

(b) i $P = re(V_i\bar{I}) = 559W$, $Q = im(V_i\bar{I}) = 775VAR$.

ii) Para compensar la potencia reactiva consumida a la fuente, al ser la carga inductiva, colocamos un condensador en paralelo con la carga, de forma de no alterar la potencia activa consumida. El valor C_c del condensador a colocar debe ser tal que la carga total que vea la fuente

$$\frac{1}{C_cj\omega}||Z_{eq}$$

sea real. Resulta

$$C_c = \frac{1}{\omega}\frac{X_{eq}}{R_{eq}^2 + X_{eq}^2}$$

[a] Los 30° de la señal de la fuente de tensión pueden considerarse en el fasor V_i o pensar este fasor como de fase 0 e incorporar los 30° al final.

(c) Transfigurando el triángulo a estrella, es equivalente monofásico que se obtiene coincide con el circuito ya estudiado, por lo que las corrientes de línea resultan ser

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 4,34\sqrt{2}\sin(100\pi t - 1,47)A \\ i_2(t) &= 4,34\sqrt{2}\sin(100\pi t - 1,47 + 2\pi/3)A \\ i_3(t) &= 4,34\sqrt{2}\sin(100\pi t - 1,47 + 4\pi/3)A \end{aligned}$$

Problema 2

(a) En primer lugar calculamos la impedancia vista a la derecha del condensador:

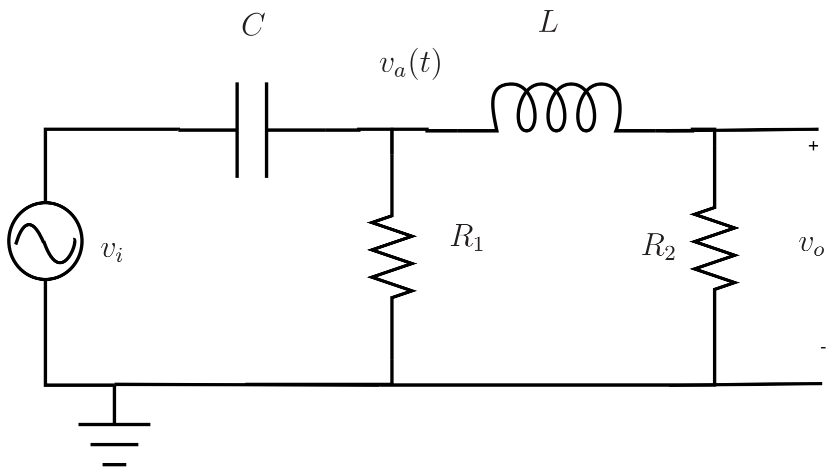


Figura 6:

$$Z = (j\omega L + R_2)\|R_1 = \frac{(j\omega L + R_2)R_1}{j\omega L + R_2 + R_1}$$

Luego, hacemos dos divisores de tensión:

$$\Rightarrow \quad V_a = V_i \frac{Z}{Z + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$V_o = V_a \frac{R_2}{j\omega L + R_2} \quad \Rightarrow \quad V_o = V_i \frac{R_2}{j\omega L + R_2} \frac{j\omega C R_1(j\omega L + R_2)}{j\omega C R_1(j\omega L + R_2) j\omega L + R_2 + R_1}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{H(j\omega) = \frac{R_2(j\omega)}{L\left[(j\omega)^2 + (j\omega)\left(\frac{R_2}{L} + \frac{1}{CR_1}\right) + \frac{1}{LC}\left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right)\right]}} \qquad (1)$$

(b) La expresión obtenida en 1 se puede escribir como

$$H(j\omega) = \frac{R_2}{L} \frac{(j\omega)}{[(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_0(j\omega) + \omega_0^2]} \qquad (2)$$

donde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}\left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right)} \qquad \zeta = \frac{1}{2\omega_0}\left[\frac{R_2}{L} + \frac{1}{CR_1}\right]$$

(c) Realizamos el diagrama de Bode para la transferencia calculada en la parte anterior.

- Para $\omega \ll \omega_0$,

$$H(j\omega) \approx \frac{R_2(j\omega)}{L\omega_0^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx 20\log\left(\frac{R_2\omega}{L\omega_0^2}\right)\, dB \\ Arg(H(j\omega)) \approx \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Para $\omega_0 \ll \omega$,

$$H(j\omega) \approx \frac{R_2}{L(j\omega)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx 20\log\left(R_2\right) - 20\log(L\omega)\, dB \\ Arg(H(j\omega)) \approx \frac{-\pi}{2} \text{ o } \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Evaluando la transferencia en ω_0, sabemos cual es el argumento:

$$H(j\omega_0) = \frac{R_2}{L}\frac{1}{2\zeta\omega_0} \quad \Rightarrow \quad \text{el argumento para altas frecuencias es } -\frac{\pi}{2}$$

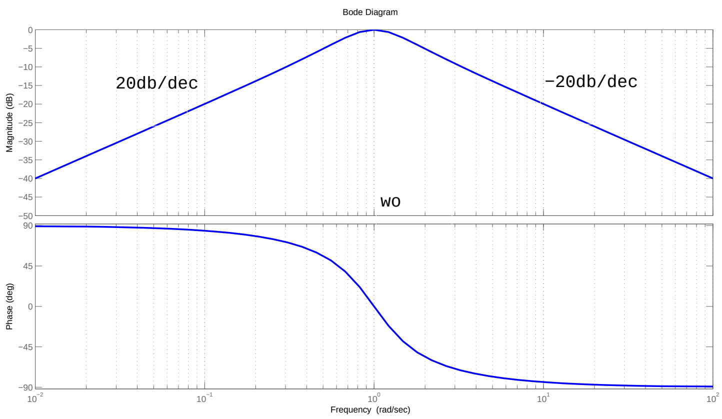
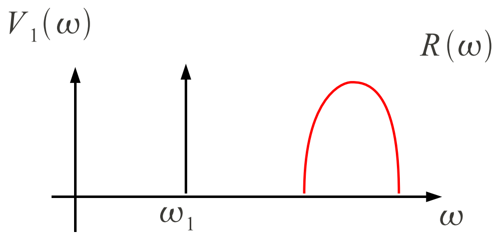


Figura 7: Diagrama de Bode

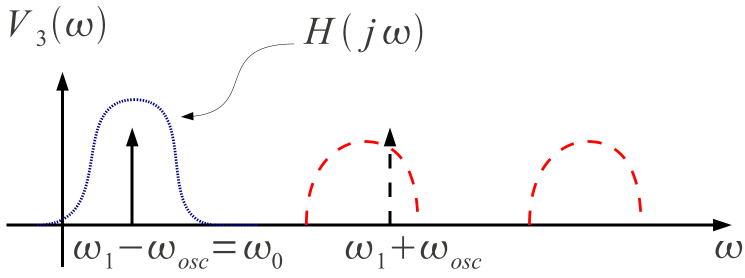
(d) La ganancia para $\omega = \omega_0$ es

$$|H(j\omega_0)| = \frac{R_2}{L\left(\dfrac{R_2}{L} + \dfrac{1}{CR_1}\right)}$$

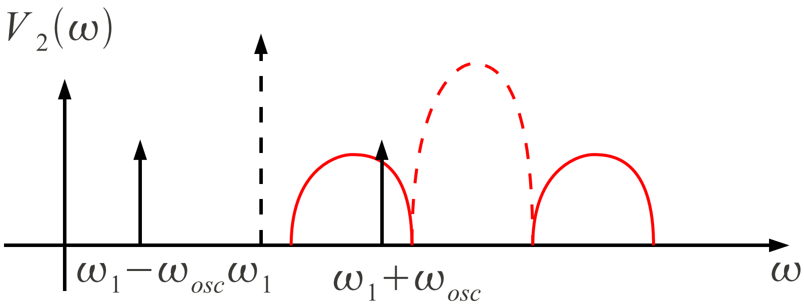
(e) Tenemos $v_1 = \cos(\omega_1 t) + r(t)$ Entonces, por linealidad de la Transformada de Fourier, $\mathcal{F}[v_1](f) = \dfrac{\delta(f-f_1)+\delta(f+f_1)}{2} + R(f)$, donde $R(f)$ es nula para $f < 10\, f_1$. Cuando multiplicamos en el tiempo por $\cos(\omega_{osc})$, en el domino de frecuencia estaremos convolucionando con dos deltas centradas en $-f_{osc}$ y f_{osc} respectivamente. Fijamos $\omega_{osc} = \omega_1 - \omega_0$, de este modo el filtro pasabanda de la parte anterior eliminará la potencia debida al ruido, ya que el espectro de éste queda fuera de la banda pasante del filtro (ver figuras).



(a) $\mathcal{F}[v_1](f)$



(b) $\mathcal{F}[v_3](f)$



(c) $\mathcal{F}[v_2](f)$

Figura 8: Observación: estas figuras muestran el espectro de las señales, es decir, los módulos de las respectivas transformadas de Fourier, con escala lineal en la pulsación, en lugar de usar la frecuencia y escala logarítmica.