Sistemas Lineales 1

Examen Diciembre del 2009

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

Se considera el circuito de la Figura 1, en el que la entrada es la corriente $i_f(t)$ entregada por la fuente de corriente y la salida es la tensión $v_0(t)$.

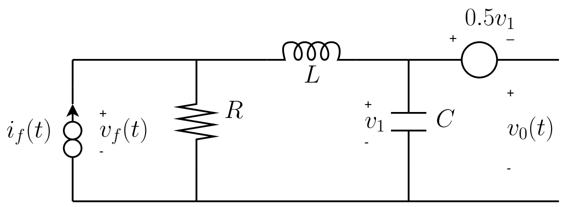


Figura 1:

(a) Hallar las transferencias en régimen sinusoidal

$$H_1(j\omega) = \frac{V_f(j\omega)}{I_f(j\omega)} \quad , \quad H_2(j\omega) = \frac{V_0(j\omega)}{I_f(j\omega)}$$

(b) Simplificar $H_1(j\omega)$ en función de los parámetros R, $LC = \frac{1}{\omega_0^2}$, $\frac{R}{L} = 2\omega_0$. Verificar que hay una única frecuencia crítica para el análisis de la respuesta en frecuencia de dicha transferencia.

(c) Hallar los siguientes límites:

$$\lim_{\omega\to\omega_0^\pm} arg\,[H_1(j\omega)] \quad , \quad \lim_{\omega\to\omega_0^\pm} |H_1(j\omega)|$$

(d) Realizar los Diagramas asintóticos de Bode de $H_1(j\omega)$, explicando claramente su construcción. Bosquejar el Diagrama real, incorporando la información de la parte anterior.

(e) I) Hallar una frecuencia de trabajo en la que la fuente entrega, en valor absoluto, la misma potencia activa y reactiva.

II) Mostrar que existe una frecuencia de trabajo en la que el sistema entrega potencia activa y potencia reactiva inductiva, en una proporción 2 a 1. Indicar si dicha frecuencia es mayor o menor que ω_0.

III) Hallar ω_c tal que $\dfrac{|V_f(j\omega_c)|}{R\,|I_f(j\omega_c)|} = -40\,db$.

Problema 2

(a) Considerando el circuito de la Figura 2, calcular la impedancia vista Z_v

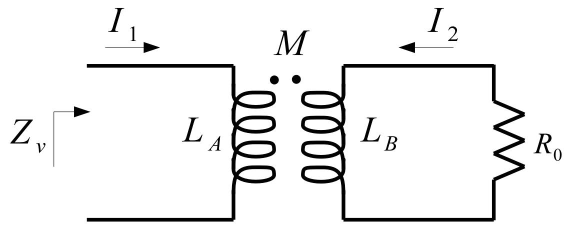


Figura 2:

(b) Se tiene ahora un circuito trifásico como se muestra en la Figura 3, **suponiendo que el transformador con bobinados L_A y L_B es perfecto.** Calcular R_1 y L_1 para tener una carga equilibrada.
DATOS:

$$R_0 = 100\Omega \qquad \omega = 2\pi\, 50/s \qquad L_A = 2Hy \qquad L_B = \frac{R_0}{\omega}$$

$$V_1 = 3{,}8kV \qquad V_2 = 3{,}8kVe^{j\frac{2\pi}{3}} \qquad V_3 = 3{,}8kVe^{j\frac{4\pi}{3}} \qquad n_1 = 10\,n_2$$

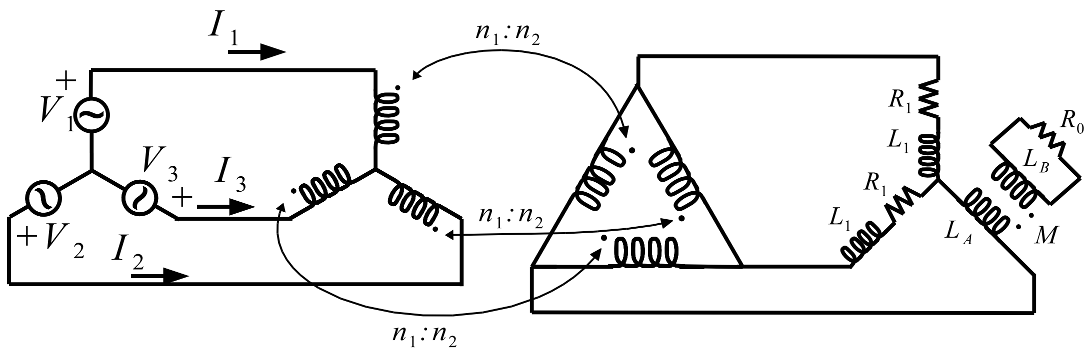


Figura 3:

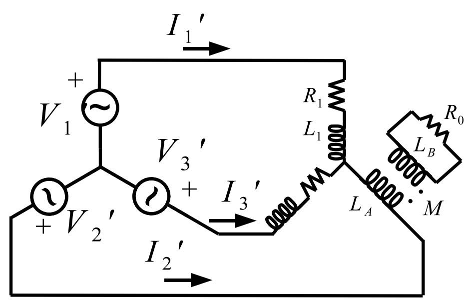
De ahora en adelante se trabajará con los datos y los valores de R_1 y L_1 calculados en la parte b

(c) Con los valores calculados y los datos de la parte anterior, y **suponiendo que el transformador con bobinados n_1 y n_2 es ideal.**

i) Calcular las tensiones V_i' para que el circuito sea equivalente al de la Figura 3 (cuando hablamos de equivalente queremos decir que desde el punto de vista de las cargas no se puede distinguir entre este sistema de fuentes V_i' y el de la Figura 3).

ii) Realizar el equivalente monofásico.

iii) Dibujar un diagrama fasorial que contenga a los fasores de las tensiones V_i y V_i', y los de las corrientes I_i e I_i', indicadas en las figuras.



(d) i) Calcular la potencia activa y reactiva consumidas por la carga.

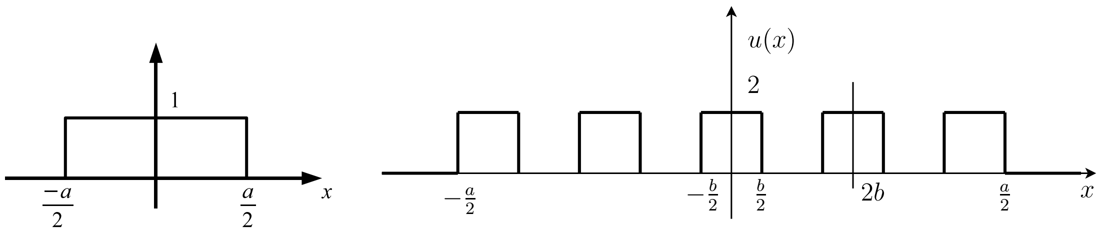
ii) Si se quiere compensar la potencia reactiva, indicar qué elementos colocaría, de qué valor y realizar un dibujo donde se muestre la conexión.

Sistemas Lineales 1

Examen Diciembre del 2009

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1



(a) $P_a(x)$ (b) $u(x)$

Figura 4:

(a) Considere la función $P_a(x)$ como se muestra en la Figura 4(a).
Calcular la transformada de Fourier $\mathcal{F}\left[P_a(x)\right]$ y realizar un bosquejo de la misma.

(b) Definimos $u(x)$ como se muestra en la Figura 4(b), donde $9b = a$.
Demuestre que $u(x)$ se puede escribir como:

$$u(x) = 2P_a(x) \cdot \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n\,2b) * P_b(x) \right]$$

(c) Calcular la transformada de Fourier $\mathcal{F}\left[u(t)\right]$ y bosquejar **prolijamente** su espectro en la banda $\left[-\frac{1}{b}, \frac{1}{b}\right]$.
Puede serle útil la siguiente transformada:

$$\mathcal{F}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \right] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Pregunta 2

Considere la siguiente transferencia en régimen sinusoidal

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}$$

siendo $\zeta^2 \leq 1$ y $\omega_n > 0$.

(a) Deduzca los Diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase de $H(j\omega)$, explicando su construcción.

(b) A estos Diagramas, incorpórele el valor exacto de $H(j\omega_n)$, explicando claramente el rol del parámetro ζ. Bosqueje los Diagramas reales.

(c) Halle ζ tal que $|H(j\omega_n)| = 28dB$.

Pregunta 3

(a) El circuito de la figura 5(a) está funcionando en régimen sinusoidal. Deducir una relación entre Z_f y Z_L que asegure que se disipa la máxima potencia activa en la impedancia Z_L.

(b) Para el circuito de la figura 5(b), con excitación $v(t) = V_0 . \cos(\omega_0 t)$, hallar el valor del condensador C_2, para $R_1 = R_2$, en función de los demás parámetros del circuito, que asegure que se disipa la máxima potencia activa en la carga.

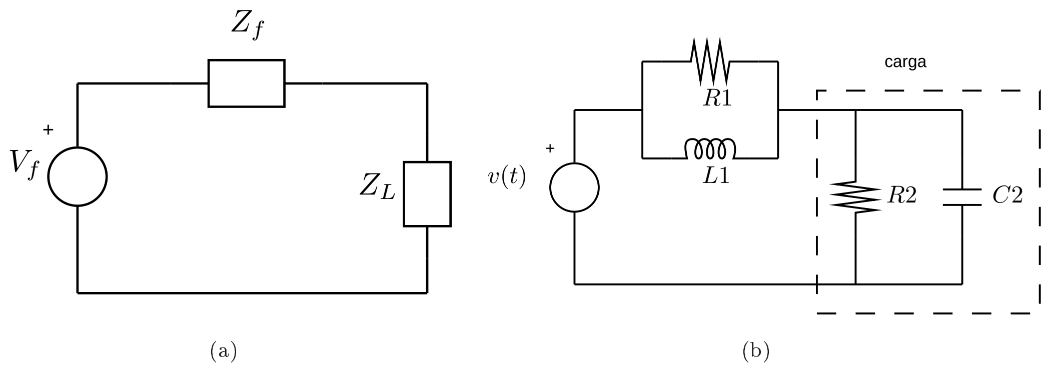


Figura 5:

Pregunta 4

Se considera un circuito lineal, de transferencia en régimen $H(j\omega)$, que tiene un comportamiento de tipo pasabajos, de frecuencia de corte $40MHz$. Se excita este sistema con una tensión periódica, que consiste en una onda cuadrada simétrica (igual porción de periodo en cada nivel de tensión), de $10MHz$ y $20V$ de amplitud.

Para cada una de las siguientes afirmaciones, indique si es verdadera o falsa, **fundamentando claramente**.

(a) La salida tiene valor medio nulo.

(b) La salida es una señal periódica.

(c) La salida es puramente sinusoidal.

(d) La salida contiene armónicos pares no nulos.

(e) La potencia media de la salida es menor que la de la entrada.

(f) La potencia media de la salida es igual que la de la entrada.

Solución

Problema 1

(a) Trabajamos con el circuito equivalente en régimen sinusoidal, en fasores, que denotaremos con letras mayúsculas. Observemos primero que $V_0(j\omega) = V_1(j\omega) - \frac{1}{2}V_1(j\omega) = \frac{1}{2}V_1(j\omega)$. Por otro lado, la relación entre $V_f(j\omega)$ y $V_1(j\omega)$ está dada por el divisor de tensión:

$$V_1(j\omega) = V_f(j\omega).\frac{\frac{1}{Cj\omega}}{Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega}} = V_f(j\omega).\frac{1}{LC(j\omega)^2+1}$$

La tensión V_f vale

$$V_f(j\omega) = I_f(j\omega).\left[R\,||\left(Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega}\right)\right] = I_f(j\omega).\frac{R.\frac{LC(j\omega)^2+1}{Cj\omega}}{R + \frac{LC(j\omega)^2+1}{Cj\omega}} = I_f(j\omega).R.\frac{LC(j\omega)^2+1}{1+RC(j\omega)+LC(j\omega)^2}$$

De donde

$$H_1(j\omega) = \frac{V_f(j\omega)}{I_f(j\omega)} = R.\frac{LC(j\omega)^2+1}{1+RC(j\omega)+LC(j\omega)^2}, H_2(j\omega) = \frac{V_0(j\omega)}{I_f(j\omega)} = \frac{1}{2}.\frac{R}{1+RC(j\omega)+LC(j\omega)^2}$$

(b) Para $LC = \frac{1}{\omega_0^2}$ y $\frac{R}{L} = 2\omega_0$, tenemos que

$$H_1(j\omega) = R.\frac{(j\omega)^2+\omega_0^2}{\omega_0^2+2\omega_0(j\omega)+(j\omega)^2} = R.\frac{(j\omega)^2+\omega_0^2}{[\omega_0+(j\omega)]^2}$$

Observemos que la única frecuencia crítica de esta transferencia es ω_0.

(c) Calculemos los límites requeridos:

$$\lim_{\omega\to\omega_0^+} arg\,[H_1(j\omega)] = \lim_{\omega\to\omega_0^+} arg\left[R.\frac{(j\omega)^2+\omega_0^2}{\omega_0^2+2\omega_0(j\omega)+(j\omega)^2}\right] = \lim_{\omega\to\omega_0^+} arg\left[R.\frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)+2\omega_0(j\omega)}\right] =$$

$$\pi - \lim_{\omega\to\omega_0^+} arg\left[(\omega_0^2-\omega^2)+2\omega_0(j\omega)\right] = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\omega\to\omega_0^-} arg\,[H_1(j\omega)] = \lim_{\omega\to\omega_0^-} arg\left[R.\frac{(j\omega)^2+\omega_0^2}{\omega_0^2+2\omega_0(j\omega)+(j\omega)^2}\right] = \lim_{\omega\to\omega_0^-} arg\left[R.\frac{(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)+2\omega_0(j\omega)}\right] =$$

$$-\lim_{\omega\to\omega_0^-} arg\left[(\omega_0^2-\omega^2)+2\omega_0(j\omega)\right] = -\frac{\pi}{2}$$

(d) Hacemos un análisis asintótico para frecuencias mucho mayores y mucho menores que ω_0.

$\omega \ll \omega_0$, $H_1(j\omega) \approx R\frac{(\omega_0^2)}{\omega_0^2} = R$.
$\omega \gg \omega_0$, $H_1(j\omega) \approx R\frac{(j\omega_0)^2}{(j\omega_0)^2} = R$.
Observemos que la aproximación asintótica será muy mala en las cercanías de ω_0. En particular, $H_1(j\omega_0) = 0$ ($-\infty$ en dB). Los Diagramas reales y asintóticos se muestran en la figura 6.

(e) I) La potencia activa y reactiva que entrega la fuente de corriente se expresa como sigue:

$$P = re\left[V_f(j\omega).\overline{I_f}(j\omega)\right] = re\left[H_1(j\omega)I_f(j\omega).\overline{I_f}(j\omega)\right] = re\left[H_1(j\omega)|I_f(j\omega)|^2\right] = |I_f(j\omega)|^2.re\,[H_1(j\omega)]$$

$$Q = im\left[V_f(j\omega).\overline{I_f}(j\omega)\right] = im\left[H_1(j\omega)I_f(j\omega).\overline{I_f}(j\omega)\right] = im\left[H_1(j\omega)|I_f(j\omega)|^2\right] = |I_f(j\omega)|^2.im\,[H_1(j\omega)]$$

Para tener el mismo valor absoluto en P y Q, la fase de $H_1(j\omega)$ debe ser una de las siguientes $\pm\frac{\pi}{4}$, $\pi\pm\frac{\pi}{4}$. Del bode de fase sale que hay dos frecuencias posibles, una donde la fase de la transferencia toma el valor $+\frac{\pi}{4}$ ($>\omega_0$) y otra donde toma el valor $-\frac{\pi}{4}$ ($<\omega_0$)

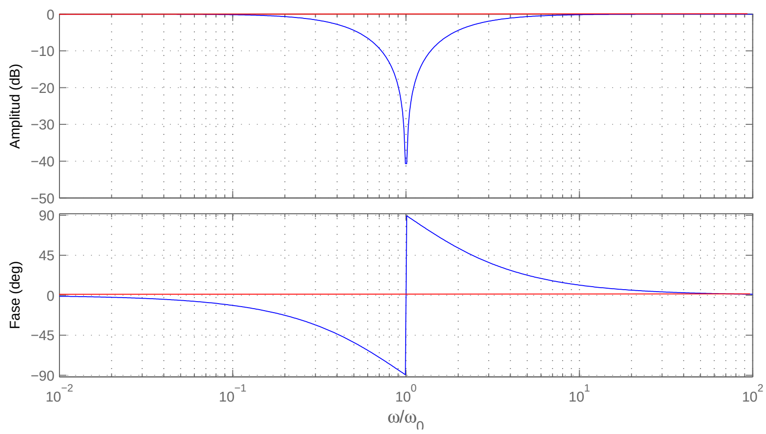


Figura 6: Diagramas de Bode asintóticos y reales de H_1.

II) Potencia reactiva inductiva significa que la corriente atrasa a la tensión. Por lo tanto, $arg\,[H_1(j\omega)]$ debe pertenecer al intervalo $[0, \pi]$ (debe tener seno positivo). Por lo que la potencia compleja

$$S(j\omega) = V_f(j\omega).\overline{I_f}(j\omega) = |I_f(j\omega)|^2.H_1(j\omega)$$

debe ser igual a $K.(2 + j)$. Para ello debemos imponer que $arg\,[H_1(j\omega)] = arctg(1/2) \approx 26^o$. De la observación del Diagrama real surge que existe una frecuencia que cumple con lo requerido. La misma es mayor que ω_0.

III) Si $\frac{|V_f(j\omega)|}{R.I_f(j\omega)} = -40dB$, entonces

$$\log\left[\frac{|H_1(j\omega)|}{R}\right] = -2 \Rightarrow \left|\frac{(j\omega)^2 + \omega_0^2}{[\omega_0 + (j\omega)]^2}\right| = 10^{-2}$$

Se obtienen dos soluciones, simétricas respecto de ω_0, cercanas a esta frecuencia crítica.

Problema 2

(a) Planteando las ecuaciones para el transformador, obtenemos:

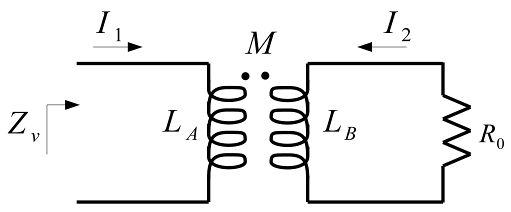


Figura 7:

$$V_1 = j\omega L_A I_1 + j\omega M I_2 \quad (1)$$
$$V_2 = j\omega L_B I_2 + j\omega M I_1 \quad (2)$$
$$V_2 = -R_0 I_2 \quad (3)$$

Utilizando las ecuaciones (2) y (3) podemos obtener I_2 en función de I_1. Eliminando I_2 en (1) obtenemos:

$$V_1 = I_1\left[j\omega L_A - (j\omega M)^2\frac{1}{R_0 + j\omega L_B}\right] \quad (4)$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_v = \frac{(j\omega L_A)(j\omega L_B) - (j\omega M)^2 + j\omega L_A R_0}{R_0 + j\omega L_B}}$$

En el caso en que el transformador es perfecto, tenemos $M = \sqrt{L_A L_B}$ *y la impedancia vista queda:*

$$Z_v = \frac{\omega^2 L_A L_B R_0}{R_0^2 + \omega^2 L_B^2} + j\frac{R_0^2 \omega L_A}{R_0^2 + \omega^2 L_B^2} \tag{5}$$

(b) Para que el sistema sea equilibrado perfecto, la impedancia vista que cada fase, debe ser la misma. Utilizando la parte anterior, tenemos:

$$\boxed{R_1 = \frac{R_0 L_A L_B \omega^2}{R_0^2 + \omega^2 L_B^2}} \qquad \boxed{L_1 \omega = \frac{R_0^2 \omega L_A}{R_0^2 + \omega^2 L_B^2}}$$

Si sustituimos con los valores dados en la letra, obtenemos, $R_1 \approx 314\Omega$ y $L_1\omega \approx 314\Omega$

(c) I) Las tensiones en los secundarios, serán $v_s = v_i \frac{n_2}{n_1}$, si consideramos el sistema de fuentes en triángulo propuestas en la letra, tenemos que para que las tensiones sean las mismas, los fasores se relacionan mediante:

$$v_i' = v_s \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-j\pi/6} \;\Rightarrow\; \boxed{v_i' = v_i \frac{n_2}{n_1\sqrt{3}} e^{-j\pi/6} \approx 220V\, e^{-j\pi/6}}$$

II) A continuación se muestra en la Figura 8 el equivalente monofásico y el diagrama fasorial correspondiente.

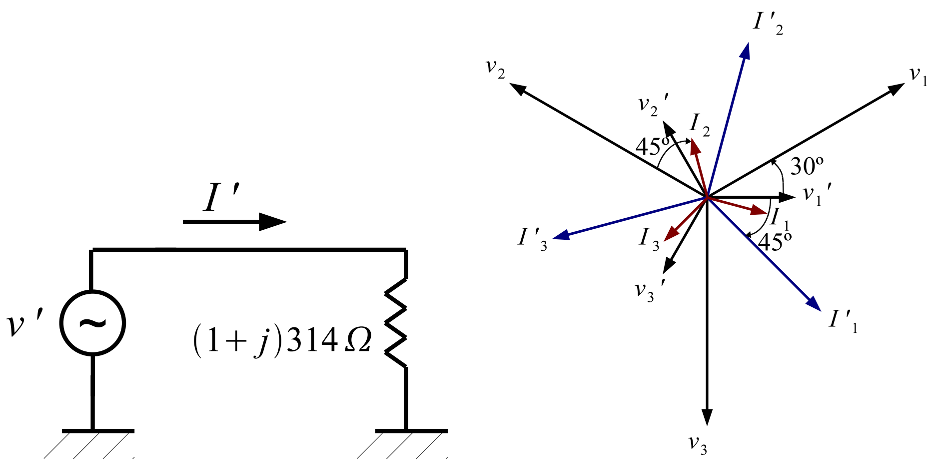


Figura 8:

(d) I) Si trabajamos en el equivalente monofásico, y los valores obtenidos en las partes anteriores, tenemos:

$$S = V \cdot I^* = \frac{(220V)^2}{2\dot{3}14\Omega}(1+j) \;\Rightarrow\; \begin{cases} P_{(\times fase)} = \frac{(220V)^2}{2\dot{3}14\Omega} \approx 77W \\ Q_{(\times fase)} = \frac{(220V)^2}{2\dot{3}14\Omega} \approx 77WVAr \end{cases}$$

II) Compensamos la potencia reactiva consumida, colocando capacitores en estrella, en paralelo con las cargas. Dimensionamos el valor de los capacitores de modo que la potencia reactiva total por fase sea nula:

$$|Q_c| = Q_{(\times fase)} = \frac{(220V)^2}{2 \cdot 314\Omega} = (220V)^2 \omega C \;\Rightarrow\; \boxed{C \approx 5\mu F}$$

El esquema de conexión es el que se muestra en la Figura 9.

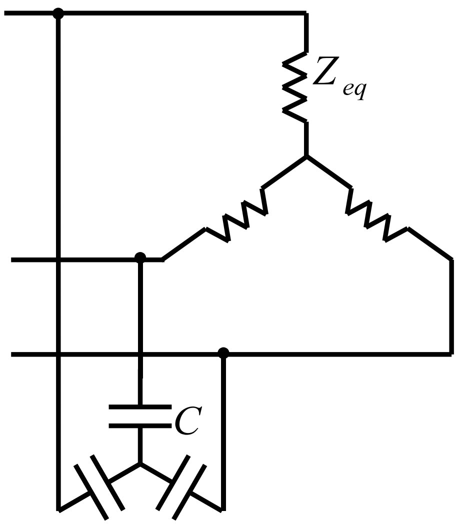


Figura 9: esquema de conexión