Sistemas Lineales 1

Examen Diciembre del 2006

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

Se considera el circuito de la Figura 1.

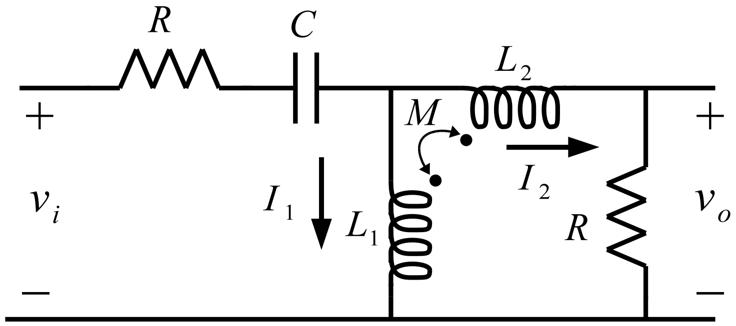


Figura 1:

(a) Halle la transferencia $H(j\omega) = \dfrac{V_0(j\omega)}{V_i(j\omega)}$
Sugerencia: plantee las ecuaciones del transformador y relacione las corrientes del mismo con la tensión de salida

(b) Demuestre que si el transformador es perfecto, la transferencia queda de la forma:

$$H(j\omega) = \frac{(L_1 - M)C(j\omega)^2}{(2L_1 + L_2 - 2M)C(j\omega)^2 + \left(RC + \frac{L_1+L_2-2M}{R}\right)(j\omega) + 1}$$

(c) Realice los diagramas de Bode si se cumplen las siguientes relaciones:

$$L_2 = 4L_1 \qquad L_1C = \frac{1}{\omega_0^2} \qquad RC = \frac{1}{\omega_0}$$

(d) I) Si se introduce una entrada $v_i(t) = 3V\cos(2\omega_0 t)$, hallar la salida en régimen $v_o(t)$

II) Hallar la respuesta en régimen para $v_i(t) = 1V\cos(\omega_0 t)$.

III) Mostrar que es posible trabajar a una frecuencia tal que la respuesta en régimen esté en cuadratura con respecto a la entrada.

Problema 2

En el circuito de la Figura 2, tenemos un sistema de fuentes:

$$v_1(t) = \sqrt{2}\,220 \sin(2\pi 50\, t) \tag{1}$$

$$v_2(t) = \sqrt{2}\,220 \sin\left(2\pi 50\, t + \frac{\pi}{3}\right) \tag{2}$$

$$v_3(t) = \sqrt{2}\,220 \sin\left(2\pi 50\, t + \frac{2\pi}{3}\right) \tag{3}$$

Los transformadores son ideales y tienen una relación de vueltas de 1:1.

(a) Si $Z_4 = j200\Omega$ y $Z_2 = 100\Omega$, ¿cuánto deben valer Z_1 y Z_3 para que el sistema de cargas sea equilibrado? Dibujar el equivalente monofásico.

(b) Bosquejar un diagrama fasorial en el que figuren los fasores de tensión de la fuente trifásica y las corrientes I_1 e I_4.

(c) Asumiendo las cargas como en la parte anterior, calcular la potencia aparente, la potencia activa y la reactiva consumida por el conjunto de cargas.

(d) Compensar la componente reactiva de potencia. Indicar qué componentes colocaría. Calcule su valor y especificar el esquema de conexión.

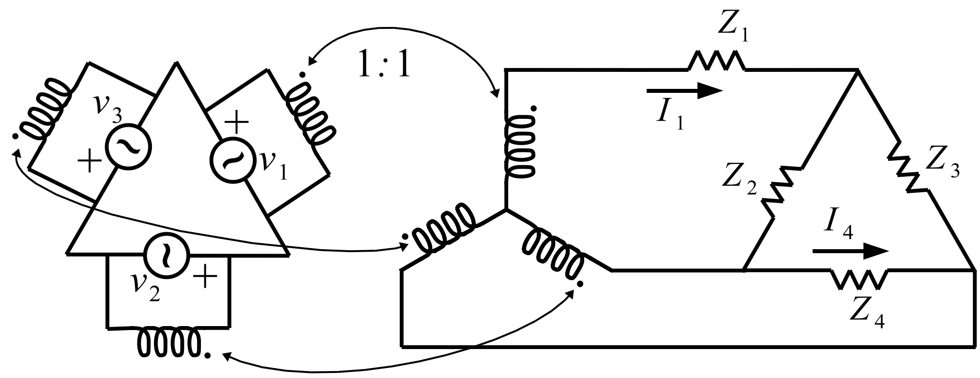


Figura 2:

Sistemas Lineales 1

Examen Diciembre del 2006

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

En el circuito de la Figura 3, dados E, ω_1, $\omega_2 = 2\omega_1$, R y $X(\omega)$. Se diseña Z_L para maximizar la potencia W_1 transferida a la carga a pulsación ω_1.

(a) Hallar R_L y $X_L(\omega_1)$

(b) Hallar W_1

(c) Si $X = L\omega$, y $L\omega_1 = R$, hallar la potencia W_2 transferida a la carga a pulsación ω_2, en función de E y R.

(d) Calcular la relación de amplitudes $A = \dfrac{V_1}{E}$, siendo V_1 ka amplitud del voltaje de pulsación ω_1 en bornes de la carga Z_L.

(e) Si Z_L introduce un pequeño efecto de distorsión no lineal, explicar cualitativamente (sin hacer cuentas) cómo cambia el numerador de la relación de A definida en d).

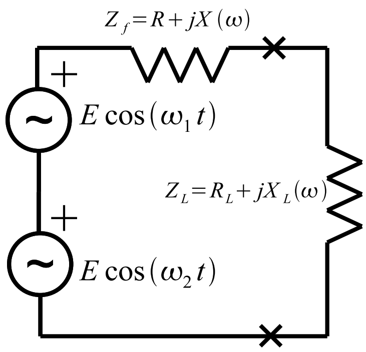


Figura 3:

Pregunta 2

Se considera el operador diferencial lineal normalizado de orden n:

$$D = \frac{\partial^n}{\partial t^n} + a_{n-1}\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{\partial}{\partial t} + a_0$$

(a) Demostrar que $(D\delta)^{-}1 = Y(t)f(t)$ siendo $f(t)$ una función continua, con derivada de orden n continua, que verifica la ecuación diferencial $Df = 0$ con condiciones iniciales adecuadas.

(b) Aplicación: hallar la solución elemental del operador $D = 3\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + 1$

Pregunta 3

(a) Sea U una distribución periódica de periodo T. Hallar los coeficientes de Fourier de U'', $c_n[U'']$ en función de los de U, $c_n[U]$.

(b) Hallar y bosquejar la derivada segunda de la distribución asociada a la función periódica de la Figura 4

(c) Aplicando la parte a), hallar los coeficientes de Fourier de la distribución asociada a la función periódica de la Figura 4

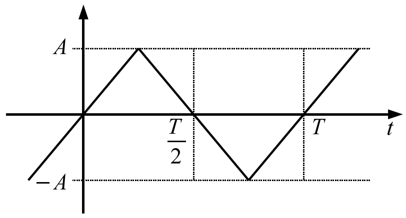


Figura 4:

Pregunta 4

(a) Hallar la Transformada de Fourier (TdF) y la Transformada de Fourier Conjugada (TdFC) de la delta de Dirac, a partir de las **respectivas definiciones** para distribuciones cualesquiera.

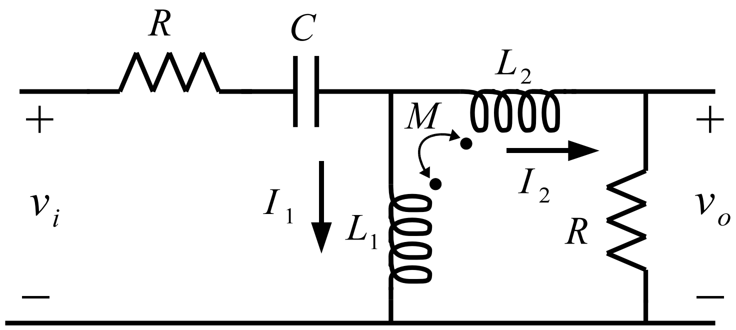
(b) A partir de la relación entre la Tdf y la TdFC, hallar la TdF de la función idénticamente igual a 1.

(c) Sea $G(f)$ la TdF de una función transformable g(t) y sean θ y f_c reales positivos. Hallar, **de al menos dos maneras diferentes**, la TdF de $g(t).\cos(\omega_c t + \theta)$, donde $\omega_c = 2\pi f_c$.

(d) Calcular la TdF de $Y(t).e^{-t}.\sin(\omega_c t)$

Solución

Problema 1



(a) En primer lugar, planteamos la ecuaciones en el transformador:

$$V_1 = L_1 j\omega\, I_1 + M j\omega\, I_2 \tag{4}$$
$$V_2 = L_2 j\omega\, I_2 + m j\omega\, I_1 \tag{5}$$

Luego, planteando la caída de tensión en la resistencia y en la entrada, tenemos:

$$V_0 = R\, I_2 \tag{6}$$
$$\frac{V_i - V_1}{R + \frac{1}{Cj\omega}} = I_1 + I_2 \tag{7}$$

Utilizando que $V_1 = V_2 + V_o$ y las ecuaciones (4) y (5) obtenemos:

$$I_1 = \frac{(L_2 - M)j\omega + R}{R\,[L_1 - M]\,j\omega} V_o \tag{8}$$

Si sustituimos (8) y (4) en (7), tenemos:

$$V_i = I_1 \left[L_1 j\omega + \frac{RCj\omega + 1}{Cj\omega} \right] + I_2 \left[M j\omega + \frac{RCj\omega + 1}{Cj\omega} \right] \tag{9}$$

Finalmente, si despejamos I_1 y I_2 en función de V_o utilizando (6) y (8), y lo sustituyendo en (9), obtenemos la relación entre V_i y V_o buscada:

$$\boxed{\frac{V_o}{V_i} = \frac{R(L_1 - M)C(j\omega)^2}{(j\omega)^3\, C\,[L_1 L_2 - M^2] + (j\omega)^2\,[2L_1 + L_2 - 2M]\,RC + (j\omega)\,[R^2 C + L_2 + L_1 - 2M]}} \tag{10}$$

(b) En el caso del transformador perfecto, tenemos $M^2 = L_1 L_2$, imponiendo dicha relación y sustituyendo en la transferencia hallada en (10), obtenemos:

$$\boxed{\frac{V_o}{V_i} = \frac{(L_1 - M)C(j\omega)^2}{(j\omega)^2\,[2L_1 + L_2 - 2M]\,RC + (j\omega)\,[R^2 C + L_2 + L_1 - 2M]}} \tag{11}$$

(c) Si consideramos $L_2 = 4L_1$, $L_1 C = \dfrac{1}{\omega_0^2}$ y $RC = \frac{1}{\omega_0}$, la trasferencia se puede reescribir como:

$$H(j\omega) = -\frac{1}{2} \frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^2 + \omega_0 (j\omega) + \frac{\omega_0^2}{2}}$$

La trasferencia, presenta ceros para $\omega = 0$ y polos complejos conjugados con $\omega_n = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ y $\zeta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

- Para $\omega \ll \omega_n$,

$$H(j\omega) \approx -\frac{1}{2}\frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx -20\log(2\omega_n^2) + 40\log(\omega)\, dB \\ Arg(H(j\omega)) \approx 0 \end{cases}$$

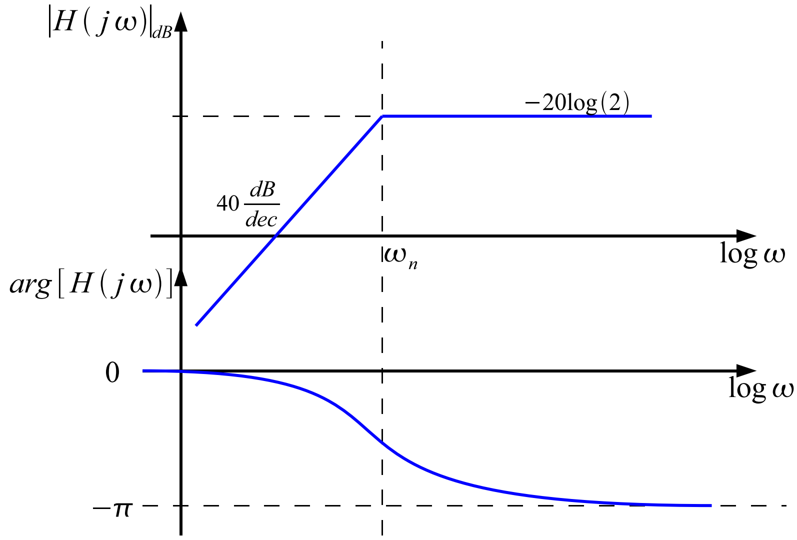
- Para $\omega \gg \omega_n$,

$$H(j\omega) \approx -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx -20\log(2)\, dB \\ Arg(H(j\omega)) \approx \pm\pi \end{cases}$$

Evaluamos la transferencia en un punto intermedio, para ver si la fase sufre un adelanto o un atraso de π;

$$H(j\omega_n) = -\frac{1}{2}\frac{-\omega_n^2}{j2\zeta\omega_n^2} = -j\frac{1}{4\zeta}$$

Como la $Arg(H(j\omega_n)) = -\frac{\pi}{2}$, tenemos una caída de π en la fase.



(d) I) Si la entrada al sistema de de la forma $v_i(t) = 3V\cos(2\omega_0 t)$, la salida será:

$$v_o(t) = 3V\,|H(j2\omega_0)|\cos(2\omega_0 t + arg(H(j2\omega_0)))$$

Evaluando la transferencia obtenemos:

$$\boxed{v_o(t) \approx 3V\, 0{,}5\cos(2\omega_0 t - 150^o)}$$

II) Análogamente si la entrada al sistema de de la forma $v_i(t) = 1V\cos(\omega_0 t)$, la salida será:

$$v_o(t) = 1V\,|H(j\omega_0)|\cos(\omega_0 t + arg(H(j\omega_0)))$$

Evaluando la transferencia obtenemos:

$$\boxed{v_o(t) \approx 1V\, 0{,}45\cos(2\omega_0 t - 116^o)}$$

III) Para obtener una salida en cuadratura con la entrada, tenemos que encontrar la frecuencia para la cual, el argumento de la transferencia vale $\pm\frac{\pi}{2}$. Si observamos la transferencia y el diagrama de bode construido, podemos ver que la frecuencia para la cual la entrada y la salida están en cuadratura es $\boxed{\omega = \omega_n = \frac{\omega_0}{2}}$

Problema 2

(a) En primer lugar, pasamos las cargas a sus equivalentes en triángulo, donde[a]:

$$Z_2' = \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3 + Z_4} \qquad Z_3' = \frac{Z_3 Z_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4} \qquad Z_4' = \frac{Z_2 Z_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4}$$

Para que el sistema sea equilibrado, las impedancias en cada fase deben ser iguales, si uti-

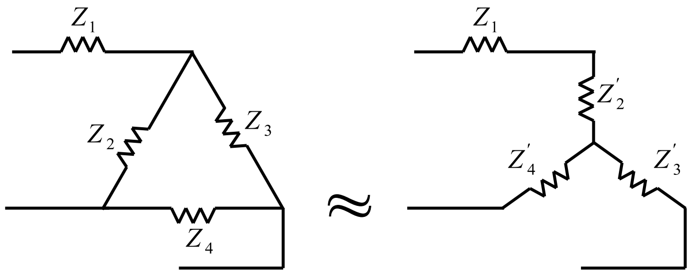


Figura 5:

lizamos los valores dados en la letra, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} Z_1 + \dfrac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3 + Z_4} = \dfrac{Z_3 Z_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4} \\ \dfrac{Z_2 Z_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4} = \dfrac{Z_3 Z_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{Z_2 = Z_3 = 100\Omega}$$

$$Z_{monof} = \frac{Z_2 Z_4}{Z_2 + Z_3 + Z_4} = 50 + j50$$

El circuito equivalente monofásico se muestra en la Figura 6.

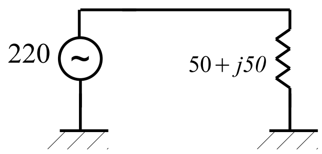


Figura 6: Equivalente monofásico

(b) Utilizando el equivalente monofásico obtenido en la parte anterior, calculamos I_1.

$$I_1 = \frac{V_1}{Z} = \frac{220V}{\sqrt{2}\,50\Omega} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$I_4 = \frac{220V}{\sqrt{2}\,50\Omega} \frac{1}{\sqrt{3}} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

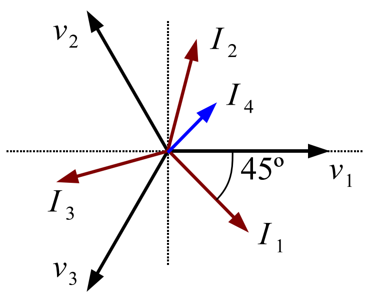


Figura 7: Diagrama fasorial

(c) Asumiendo las cargas como en las partes anteriores, tenemos:

$$S_{monof} = V_{eff} I_{eff}^* = \frac{220^2}{50 - 50j} = 684,5\angle\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \; P_{total} = 3Re(S_{monof}) = 1452W$$

$$\Rightarrow \; Q_{total} = 3Re(S_{monof}) = 1452VAr$$

[a] Para más detalles consultar las notas de teórico pag 146.

(d) Para compensar la potencia reactiva consumida, colocamos condensadores en paralelo con las cargas, conectados en estrella. El valor de los condensadores, lo obtenemos anulando la potencia reactiva total consumida:

$$Q_c + Q_{carga} = 0 \Rightarrow \frac{V_{eff}^2}{X_c} = -Q_{carga} \Rightarrow \boxed{C = 32\mu F}$$