Sistemas Lineales 1

Examen Diciembre 2005

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

En la figura se muestran los Diagramas de Bode reales de una transferencia $H(j\omega)$.

(a) Se sabe que $H(j\omega)$ es de la forma

$$H(j\omega) = \frac{\omega_0(j\omega + a)}{(j\omega + b)(j\omega + c)} \quad \text{con } \omega_0,\ a,\ b,\ \text{y } c \text{ reales y positivos.}$$

A partir de los Diagramas de Bode, mostrados en la Figura 1, asignar valores razonables a $\omega_0,\ a,\ b$ y c. **Justificar.**

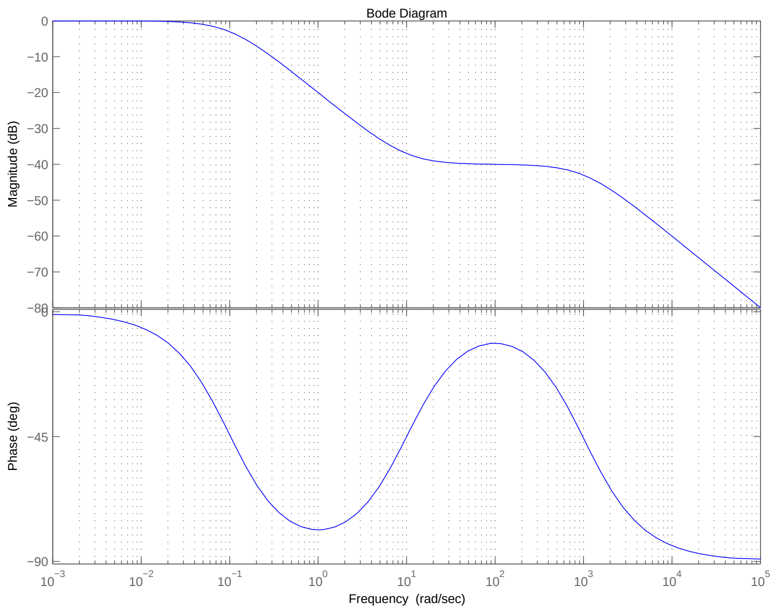


Figura 1: Diagramas de Bode

(b) Hallar la transferencia del circuito mostrado en la Figura 2.

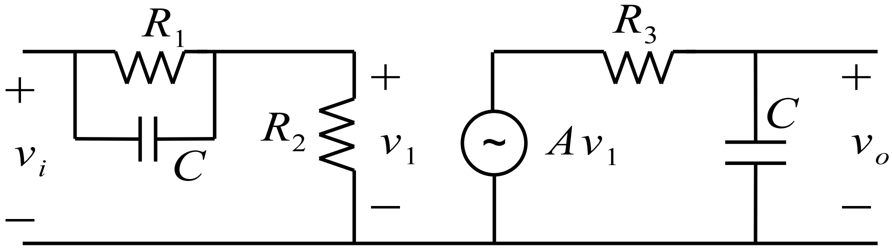


Figura 2:

(c) Se sabe que $R_1 = \frac{R_3}{100}$ y que $\omega_3 = \frac{1}{R_3 C} = 0,1\, rad/s$. Hallar R_2 (en función de R_1) y A tales que la transferencia del circuito sea $H(j\omega)$.

(d) Hallar exactamente la frecuencia ω_c a la cual el circuito introduce un régimen una atenuación a la salida de $2dB$.

Problema 2

Sea el circuito de la Figura 3, en régimen sinusoidal y con el **transformador perfecto.**

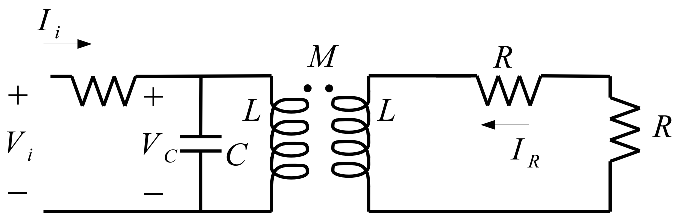


Figura 3:

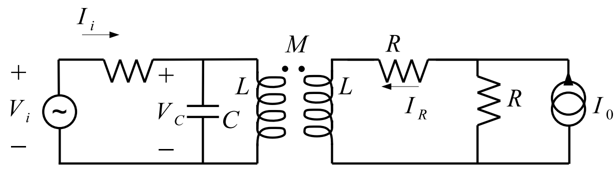
(a) Calcular la transferencia

$$H(j\omega) = \frac{V_C(j\omega)}{V_i(j\omega)}$$

(b) Deducir las expresiones para las transferencias:

$$G_1(j\omega) = \frac{I_R(j\omega)}{V_i(j\omega)} \quad \text{y} \quad G_2(j\omega) = \frac{I_i(j\omega)}{V_i(j\omega)}$$

Sea el circuito de la Figura 7, con fuente de **tensión alterna**, fuente de **corriente continua** y con el **transformador perfecto.**



Datos:

$V_i = \sqrt{2}\,220 \quad \omega = 100\pi\, rad/s \quad I_0 = 10A$

$R = 1\Omega \quad L = 10mHy \quad C = 1mF$

Figura 4:

(c) Calcular las expresiones temporales en régimen para $v_C(t)$, $I_i(t)$ e $I_R(t)$. **Justificar claramente como trabaja con las fuentes y el circuito resultante en cada caso.**

(d) I) Representar en un diagrama, los fasores asociados a los términos sinusoidales de $V_c(t)$, $I_i(t)$, e $I_R(t)$. Incluir también el fasor asociado a la fuente de tensión.

II) Ubicar a grandes rasgos (darle importancia al sentido), el fasor asociado al término sinusoidal de $i_C(t)$ (corriente por el condensador C).

III) Hallar gráficamente el fasor asociado al término sinusoidal de la corriente por el primario del transformador. **Justificar**

(e) I) Calcular la potencia activa consumida por la fuente de tensión.

II) Calcular la potencia consumida a la fuente de corriente.

Sistemas Lineales 1

Examen Diciembre 2005

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

Son conocidas las propiedades de la distribución impulso:

$$\begin{cases} t\delta = 0 \\ t\delta' = -\delta \end{cases}$$

(a) Calcular $t\delta''$ en función de δ'

(b) Calcular $t^2\delta''$ en función de δ

(c) Calcular en general $\alpha(t)\delta''(t)$, si $\alpha(t)$ es una función continua en 0 y verificar los resultados hallados en las partes anteriores.

(d) Aplicación: Calcular $\langle (t^2 - t)\delta'', \cos(t) - \sin(t) \rangle$, justificando que se aplique la distribución a una función de soporte acotado.

Pregunta 2

Se considera la función periódica $f(t)$ de periodo T que se muestra en la Figura 5.

(a) Calcular el valor medio de la señal.

(b) Calcular la potencia media.

(c) Si $D = \frac{T}{4}$, hallar en función de A y B, **justificando claramente y sin usar la parte d),** la suma $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$, siendo n el coeficiente de Fourier de orden n.

(d) Si $D = \frac{T}{4}$, hallar los coeficientes de Fourier de $f(t)$.

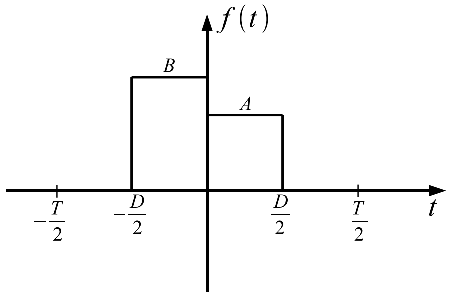


Figura 5: Gráfico de $f(t)$

Pregunta 3

Sean $0 < a < b < c$. Se consideran las siguientes transferencias:

$$H_1(j\omega) = \frac{(j\omega - b)}{(j\omega + a)(j\omega - c)} \qquad H_2(j\omega) = \frac{(j\omega + b)}{(j\omega - a)(j\omega + c)} \qquad H_3(j\omega) = \frac{(j\omega + b)}{(j\omega - a)(j\omega - c)}$$

(a) Mostrar analíticamente que tienen todas el mismo Diagrama de Bode real de módulo.

(b) Indicar cuál de los Diagramas de Bode de fase mostrados en la Figura 6 corresponde a cada transferencia. **Justificar detalladamente.**

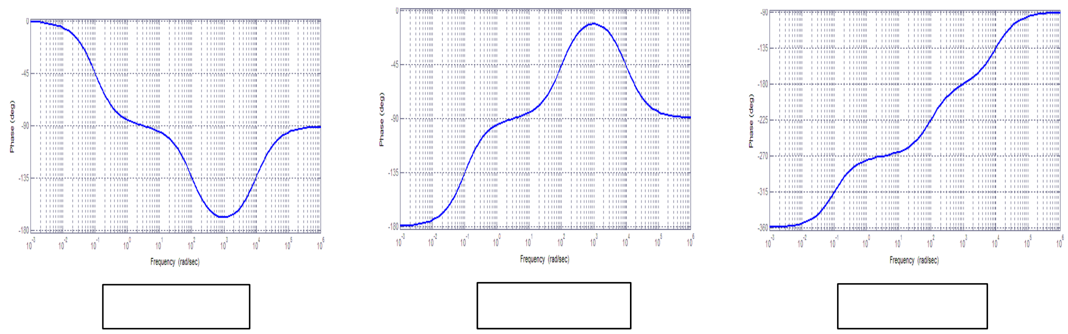


Figura 6:

Pregunta 4

(a) Enunciar y demostrar el Teorema de Blondell, para cargas en estrella o en triángulo, explicando claramente cómo usa las hipótesis.

(b) Describir claramente el Método de los dos vatímetros para medir potencia en un sistema trifásico, incluyendo contexto de aplicación, esquema de conexionado y fundamentación teórica.

Solución

Problema 1

(a) Sabemos que la transferencia $H(j\omega)$ es de la forma,

$$H(j\omega) = \frac{\omega_0(j\omega + a)}{(j\omega + b)(j\omega + c)} \quad \text{con } \omega_0,\ a,\ b,\ c\ \in \mathcal{R}^+$$

En primer lugar, se observa que

$$\lim_{\omega\to 0} H(j\omega) = 1 \text{ ya que } \begin{cases} \lim_{\omega\to 0} |H(j\omega)|_{dB} = 0 \\ \\ \lim_{\omega\to 0} Arg(H(j\omega)) = 0 \end{cases} \Rightarrow\ \omega_0 = \frac{bc}{a}$$

Del diagrama para la fase, se obtiene que $H\left(j\frac{1}{10}\right) \approx -\frac{\pi}{4}$, $H\left(j10\right) \approx -\frac{\pi}{4}$, $H\left(j1000\right) \approx -\frac{\pi}{4}$. Del diagrama para el modulo, $|H\left(j\frac{1}{10}\right)|_{dB} \approx -3dB$, $|H\left(j1\right)|_{dB} \approx -20dB$, $|H\left(j10\right)|_{dB} \approx -37dB$, $|H\left(j10^2\right)|_{dB} \approx -40dB$, $|H\left(j10^3\right)|_{dB} \approx -43dB$, $|H\left(j10^4\right)|_{dB} \approx -60dB$.

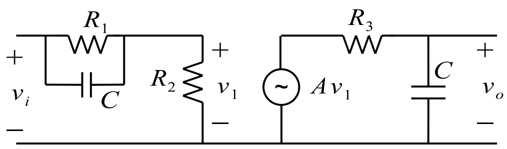
Se puede deducir de estos datos, el efecto de un polo con parte real negativa en $\frac{1}{10}rad/s$. Este introduce una caída en módulo de $-20dB/dec$ y un retarde de fase de $\frac{\pi}{2}$. Luego se observa que el módulo se torna constante ($-40dB$) y la fase sufre un adelanto de $\frac{\pi}{2}$. De esto se deduce la presencia de un cero con parte real negativa en $10rad/s$. Observo que el cero y el polo se encuentran a dos décadas y por eso el comportamiento, por ejemplo, en torno al polo en $\frac{1}{10}$ es similar a un sistema con transferencia $\frac{1/10}{j\omega+1/10}$.

Finalmente se observa el efecto de un nuevo polo con parte real negativa en $1000rad/s$ ya que el módulo cae nuevamente a $-20db/dec$ y hay un retardo de fase de $\frac{\pi}{2}$.

Resumiendo las observaciones anteriores, es razonable suponer:

$$\boxed{\begin{array}{c} a = 10\frac{rad}{s} \\ b = \dfrac{1}{10}\frac{rad}{s} \\ c = 1000\frac{rad}{s} \\ \omega_0 = 10\frac{rad}{s} \end{array}} \ \Rightarrow\ H(j\omega) = \frac{10(j\omega + 10)}{(j\omega + \frac{1}{10})(j\omega + 1000)}$$

(b)



Del divisor a la entrada:

$$V_1 = \frac{R_2}{R_2 + R_1 || \frac{1}{j\omega C}} V_i \ \Rightarrow\ V_1 = \frac{R_2(R_1Cj\omega + 1)}{R_2R_1C(j\omega + 1) + R_1} V_i$$

Del divisor a la salida obtenemos:

$$V_o = \frac{A\,V_1}{R_3Cj\omega + 1} \ \Rightarrow\ V_o = \frac{A\,R_2(R_1Cj\omega + 1)}{(R_2R_1Cj\omega + R_1 + R_2)(R_3Cj\omega + 1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{AR_2(R_1Cj\omega + 1)}{(R_2R_1Cj\omega + R_1 + R_2)(R_3Cj\omega + 1)}} \tag{1}$$

(c) Utilizando las relaciones entre los parámetros dadas en la letra, $R_1 = \frac{R_3}{100}$, $\omega_3 = \frac{1}{R_3C} = \frac{1}{10}\,rad/s \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{R_1C} = 10\,rad/s$, sustituimos en la ecuación (1), obteniendo:

$$H(j\omega) = \frac{A}{R_3C}\frac{\left(j\omega + \frac{1}{R_1C}\right)}{\left(j\omega + \frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}\right)\left(j\omega + \frac{1}{R_3C}\right)} \tag{2}$$

Par que la transferencia obtenida en (2) coincida con la de la parte a, debemos imponer:

$$\begin{cases} \dfrac{A}{R_3C} = \dfrac{A}{10} = 10\,rad/s \\ \dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2C} = \dfrac{10(R_1+R_2)}{R_2} = 1000\,rad/s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{A = 100} \\ \boxed{R_2 = \dfrac{R_1}{99}} \end{cases}$$

(d) Buscamos la frecuencia ω_c a la cual el circuito introduce una atenuación de $2dB$, es decir, la frecuencia que verifica, $|H(j\omega_c)|_{dB} = -2dB$. Imponiendo la condición anterior, obtenemos:

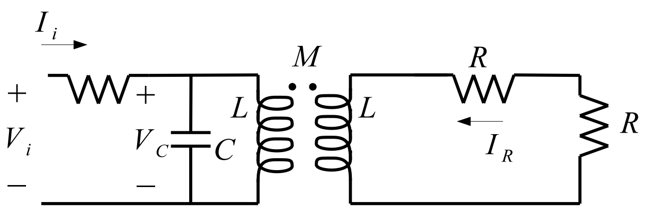
$$-2dB = 20\log\left[\frac{10\sqrt{\omega_c^2+100}}{\sqrt{\omega_c^2+\frac{1}{100}}\sqrt{\omega_c^2+10^6}}\right] \Rightarrow -22 = 10\log\left[\frac{\omega_c^2+10^2}{(\omega_c^2+10^{-2})(\omega_c^2+10^6)}\right]$$

$$\Rightarrow \omega_c^4+(10^{-2}+10^6)\omega_c^2+10^4 = 10^{2,2}\omega_c^2+10^{4,2} \Rightarrow \omega_c^4+(10^6-10^{2,2}+10^{-2})\omega_c^2+(10^4-10^{4,2}) = 0$$

$$\text{tomando } z = \omega_c^2 \Rightarrow z = \begin{cases} 0,00585 \\ -999842 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\omega_c = 0,0764\frac{rad}{s}}$$

Problema 2

(a) Como el transformador es perfecto, tenemos $M = \sqrt{L\,L} = L$



Si planteamos las ecuaciones para las tensiones en bornes del transformador, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = Lj\omega(I_1+I_R) \\ V_2 = Lj\omega(I_1+I_R) \end{array}\right\} \Rightarrow V_1 = V_2 = V_c$$

$$V_c = -2RI_R \Rightarrow I_R = -\frac{V_c}{2R}$$

Planteando el nudo en la entrada, obtenemos,

$$V_i = V_c\left[\frac{3Lj\omega + 2RLC_1(j\omega)^2 + 2R}{2Lj\omega}\right] \Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{2Lj\omega}{2RLC(j\omega)^2 + 3Lj\omega + 2R}}$$

(b) Utilizando las ecuaciones de la parte anterior, obtenemos,

$$G_1(j\omega) = \frac{I_R}{V_i} = -\frac{V_c}{2RV_{in}} = -\frac{1}{2R}H(j\omega) \Rightarrow \boxed{G_1(j\omega) = \frac{-\frac{L}{R}j\omega}{2RLC(j\omega)^2 + 3Lj\omega + 2R}}$$

Luego,

$$I_i = \frac{V_i - V_c}{R} = V_i\left(\frac{1-H(j\omega)}{R}\right) \Rightarrow \boxed{G_2(j\omega) = \frac{1}{R}\frac{2RCL(j\omega)^2 + Lj\omega + 2R}{2RLC(j\omega)^2 + 3Lj\omega + 2R}}$$

(c) el principio de superposición, ya que tengo dos fuentes independientes de distinta frecuencia.

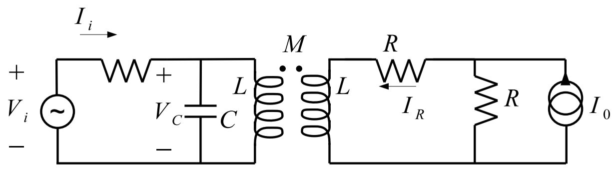


Figura 7:

Datos:

$V_i = \sqrt{2}\,220 \quad \omega = 100\pi\, rad/s \quad I_0 = 10A$

$R = 1\Omega \qquad L = 10mHy \qquad C = 1mF$

I) En primer caso, consideremos el circuito tomando en cuenta solo la fuente de tensión, el circuito equivalente se muestra en la Figura 8.

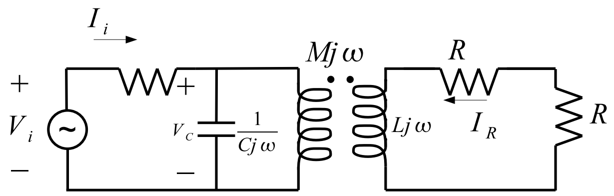


Figura 8: Anulo la fuente de corriente

Estudiando el circuito en régimen, podemos observar que coincide con el circuito estudiado en la parte a, con una tensión a la entrada $V_i = 220V\angle 0^o$ (valor eficaz).

Usando las transferencias calculadas, podemos calcular los fasores pedidos.

$$\boxed{\begin{aligned} V_c &= H(j\omega)V_i = 147,7V\angle 0,16^o \\ I_i &= G_1(j\omega)V_i = 73,3A\angle -0,32^o \\ I_R &= G_2(j\omega)V_i = 73,9A\angle -179,84^o \end{aligned}}$$

II) En segundo lugar, analizamos el circuito anulando la fuente de tensión, en régimen de continua. El circuito equivalente en este caso se muestra en la Figura 9.

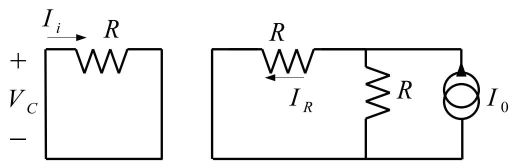


Figura 9: Anulo la fuente de tensión

El transformador se comportara como un cortocircuito, pues:

$$v_i(t) = L\left(\frac{\partial i(t)}{\partial t} + \frac{\partial i_r(t)}{\partial t}\right) = 0$$

El condensador se comporta como un circuito abierto,

$$\Rightarrow\ I_i = 0,\ V_c = 0,\ I_R = \frac{I_0}{2} = 5A$$

Por lo tanto, superponiendo las expresiones temporales en régimen, obtenemos las expresiones buscadas:

$$\boxed{\begin{aligned} v_c(t) &= \sqrt{2}\,147,7V\cos(\omega t + 0,16^o) \\ i_{in}(t) &= \sqrt{2}\,73,3A\cos(\omega t + 0,32^o) \\ i_R(t) &= 5A + \sqrt{2}\,73,9A\cos(\omega t - 179,84^o) \end{aligned}}$$

(d) En la Figura 10 se muestra un diagrama con los fasores calculados.

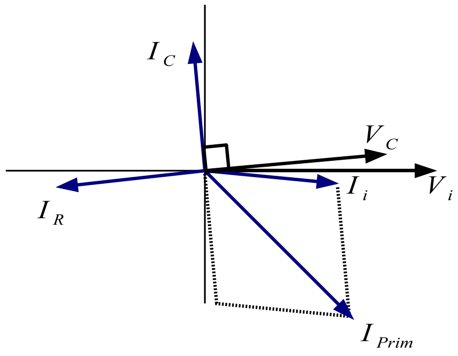


Figura 10: Diagrama fasorial

$I_c = VCj\omega \Rightarrow$ la corriente por el capacitor se adelanta 90º al voltaje por el mismo.

Luego calculamos la corriente por el primario como la corriente de entrada menos la corriente que circula por el capacitor ($I_{Prim} = I_i - I_c$), como se indica en la figura.

(e) I) La potencia activa será:

$$P_{activa} = R|I_i|^2 + 2R|I_R|^2 \Rightarrow \boxed{P_{activa} = 16,3kW}$$

II) Luego, la potencia consumida al fuente de corriente vale:

$$P_{I_0} = \frac{R}{2} I_0^2 \Rightarrow \boxed{P_{I_0} = 50W}$$