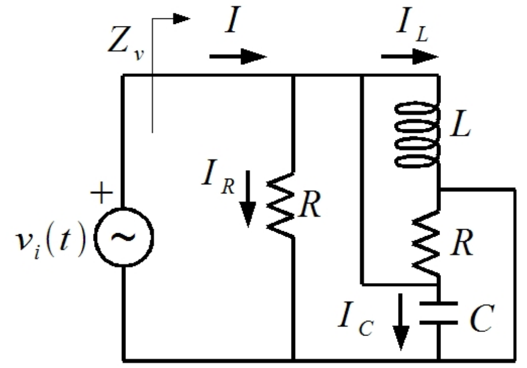
Sistemas Lineales 1

Diciembre del 2004

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Realice problemas distintos en hojas separadas.

Problema 1

(a) Sea el circuito de la Figura 1:



$$v_i(t) = \sqrt{2}\ 220V \cos(\omega t)$$
$$\omega = 100\pi$$
$$L = 50mHy$$
$$R = 75\Omega$$

Figura 1:

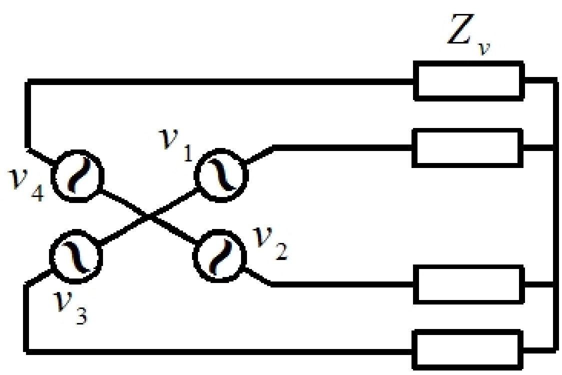
I) Hallar una expresión para la impedancia Z_v vista por la fuente.

II) Calcular el valor del condensador C, si se sabe que $|I_L| = 3|I_C|$ donde I_L y I_C son los fasores de corriente por L y C respectivamente.

III) Ubicar en un diagrama fasorial a V_i (fasor de la fuente), I (fasor de corriente entregada por la fuente), I_R (fasor de corriente por la resistencia R), I_L e I_C.

IV) Hallar las potencias activa y reactiva consumidas a la fuente.

(b) Se considerara el circuito **tetra-fásico** de la Figura 2



$$v_1(t) = \sqrt{2}\ 220V \cos(\omega t)$$
$$v_2(t) = \sqrt{2}\ 220V \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$v_3(t) = \sqrt{2}\ 220V \cos(\omega t - \pi)$$
$$v_4(t) = \sqrt{2}\ 220V \cos\left(\omega t - \frac{3\pi}{2}\right)$$

Figura 2:

I) Hallar los fasores de corrientes de línea I_1, I_2, I_3, I_4 y realizar un diagrama fasorial que los involucre junto a los fasores de la fuente V_1, V_2, V_3 y V_4.

II) Calcular **gráficamente** las siguientes tensiones compuestas: U_{12}, U_{32} y U_{42}. Agregarlas al diagrama fasorial y dar sus expresiones temporales.

III) Hallar las potencias totales activa y reactiva consumidas al sistema de fuentes **aplicando el Teorema de Blondell**.

IV) Hallar el valor de los condensadores C^*, que conectados en estrella compensan el factor de potencia del sistema tetra-fásico. Mostrar que debe cumplirse $C^* = n.C$ para n natural que se hallará.

Problema 2

(a) En el circuito de la Figura ?? hallar la transferencia en régimen sinusoidal $H(j\omega) = \dfrac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$ y la impedancia viste desde la entrada.

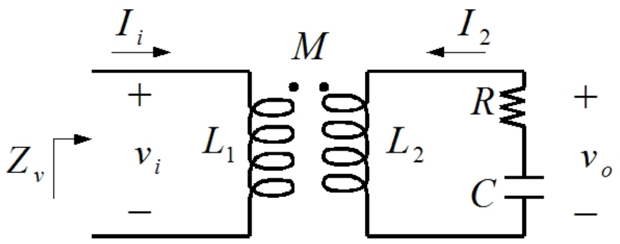


Figura 3:

(b) Simplificar ambas expresiones para el caso en que el transformador es perfecto.

(c) Calcular la transferencia en el circuito de la Figura 4 (el transformador es perfecto).

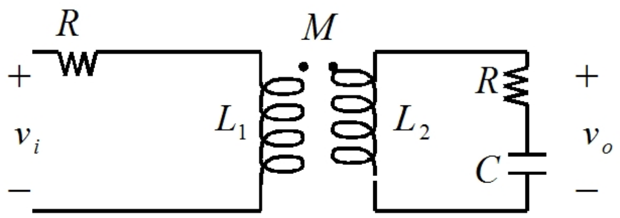


Figura 4:

(d) Realizar los Diagramas de Bode de la transferencia de la parte anterior sabiendo que $L_2 = 9999\, L_1$ y que $L_1 = R^2.C$

(e) Calcular $v_o(t)$ para las siguientes entradas:

I) $v_i(t) = 1V\ \cos\left(\dfrac{t}{100\sqrt{L_1 C}}\right)$

II) $v_i(t) = 1V\ \cos\left(\dfrac{t}{RC}\right)$

Sistemas Lineales 1

Diciembre del 2004

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

Los conceptos de circuitos pueden aplicarse a sistemas mecánicos a partir de las siguientes observaciones:

- $W = v.i$ Potencia eléctrica W Tensión v Corriente i
- $W = f.u$ Potencia mecánica W Fuerza f Velocidad u

Esto sugiere establecer por ejemplo la correspondencia Voltaje-Fuerza y Corriente-Velocidad. Adoptando esta correspondencia, y recordando las siguientes tres leyes básicas de la mecánica:

- Ley de Newton:

  $f = m.a$ Fuerza f Masa m Aceleración m

- Ley de Hooke:

  $f = k.x$ Fuerza f Constante elástica k Posición x

- Ley de fricción viscosa:

  $f = v.u$ Fuerza f Constante de fricción v Velocidad u

(a) Indicar a qué componentes eléctricas se pueden asociar las masa, el resorte y la fricción viscosa respectivamente.

(b) En el caso de que el sistema mecánico se encuentre en régimen sinusoidal, hallar las relaciones básicas entre los fasores F y U (Fuerza y Velocidad) para cada uno de los tres casos.

(c) Dibujar los diagramas fasoriales correspondientes a cada caso.

Pregunta 2

(a) Demostrar la regla de derivación del producto de una función infinitamente diferenciable por una distribución: $(\alpha(t)T(t))'$.

(b) Mostrar la identidad $\alpha(t)\delta(t) = \alpha(0)\delta(t)$ para toda función α infinitamente diferenciable.

(c) Consideremos el escalón de Heaviside. Analizar los pasos que siguen e indicar claramente **cuáles** son erróneos y **por qué:**

   I) $Y^2(t) = Y(t)$
   II) $2Y(t)Y'(t) = Y'(t)$
   III) $2Y(t)\delta(t) = \delta(t)$
   IV) $2Y(t) = 1$
   V) $Y(t) = \frac{1}{2}$

Pregunta 3

(a) Definir el concepto de *distribución temperada.*

(b) Sea $g(t)$ una función periódica localmente integrable de periodo T. Mostrar que su distribución asociada es temperada. (Sugerencia: recordar que $c_n(g) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$)

(c) Sea $g_1(t) = g(t).[Y(t) - Y(t-T)]$. Mostrar que $c_n = \frac{1}{T}.G_1\left(n\frac{2\pi}{T}\right)$, siendo G_1 la Transformada de Fourier de g_1.

(d) Mostrar que

$$g(t) = g_1(t) * \sum_{n\in Z} \delta(t - nT)$$

(e) Mostrar que

$$G(f) = \frac{1}{T}.\sum_{n\in Z} G_1\left(n\frac{2\pi}{T}\right) \cdot \delta\left(f - n\frac{2\pi}{T}\right)$$

Pregunta 4

Consideremos un sistema lineal de transferencia en régimen $H(j\omega) = \frac{\omega_0}{j\omega+\omega_0}$, siendo $\omega_0 > 0$. Sabemos que para un entrada periódica de periodo T, de la forma

$$e(t) = \sum_{n\in Z} c_n \cdot e^{jn\omega_1 t}$$

, $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, la respuesta en régimen es de la forma

$$r(t) = \sum_{n\in Z} c_n.H(jn\omega_1).e^{jn\omega_1 t}$$

.

(a) **Hallar** la respuesta en régimen (exacta) del sistema para la entrada $e(t) = A.\sin(\bar{\omega}\, t)$. **Señalar** particularmente la relación de fase entre la entrada y la respuesta.

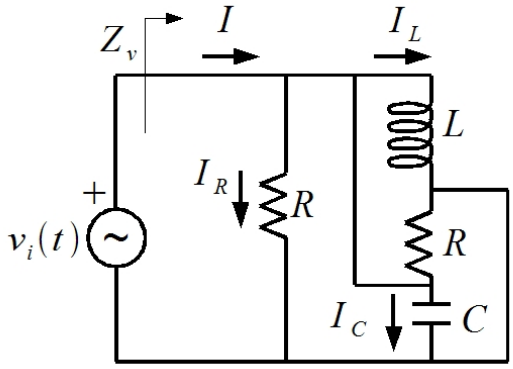
(b) Comparar la potencia media de la entrada y la respuesta.

(c) ¿Es posible encontrar una entrada sinusoidal cuya respectiva respuesta en régimen (exacta) esté en cuadratura? **JUSTIFICAR**.

Solución

Problema 1

(a) I) Calculamos la impedancia vista desde la fuente Z_v, observando que todos los componentes, presentan el mismo potencial entre sus bornes.



Como todos los elementos del circuito se encuentran en paralelo con la fuente, la impedancia vista por la fuente resulta:

$$Z_v = R||R||Lj\omega||\frac{1}{Cj\omega}$$

Operando con los paralelos, obtenemos:

$$\boxed{Z_v = \frac{RL(j\omega)}{R\left[LC(j\omega)^2+1\right]+2L(j\omega)}} \quad (1)$$

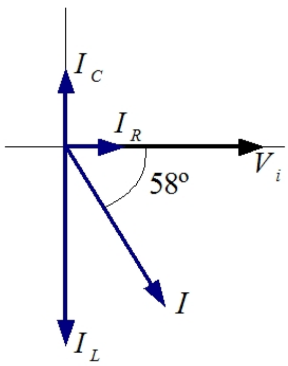
II) Sabemos que $|I_L| = 3|I_C|$, por otro lado, podemos calcular dichas corrientes como:

$$|I_L| = \frac{V_i}{L\omega} \quad \text{y} \quad |I_C| = V_i \cdot C\omega$$

Finalmente como $\omega = 100\pi$ y $L = 50mHy$ obtenemos:

$$C = \frac{1}{3L\omega^2} \Rightarrow \boxed{C = 67,5\mu F}$$

III) Con el valor de C calculado en la parte anterior, y la expresión de la impedancia vista, podemos calcular el valor de las corrientes por los distintos componentes del circuito.



$$I = \frac{V_i}{Z_v} \Rightarrow \boxed{I = (5,86 - j9,33)A = 11A\angle -58^o}$$

$$I_R = \frac{V_i}{R} \Rightarrow \boxed{I_R = 2,93A\angle 0^o}$$

$$I_L = \frac{V_i}{Lj\omega} \Rightarrow \boxed{I_L = 14A\angle -90^o}$$

$$I_C = V_i \cdot j\omega C \Rightarrow \boxed{I_C = 4,66jA = 4,66\angle 90^o}$$

IV) Una vez obtenido el fasor de corriente, podemos calcular la potencia activa y reactiva entregada por la fuente como[a] $P = Re[V \cdot \bar{I}]$ y $Q = Im[V \cdot \bar{I}]$.

$$P = \frac{V_i^2}{\frac{R}{2}} \Rightarrow \boxed{P = 1289W}$$

$$Q = \frac{V_i^2}{L\omega} - C\omega V_i^2 \Rightarrow \boxed{Q = 2053Var}$$

(b) El sistema tetra-fásico, es equilibrado y perfecto; podemos estudiar es circuito, estudiando el equivalente monofásico como se muestra en la figura 5.

I) Trabajando con el circuito monofásico equivalente, podemos calcular fácilmente las corrientes I_i.

[a] recordemos que estamos trabajando con los valores eficaces.

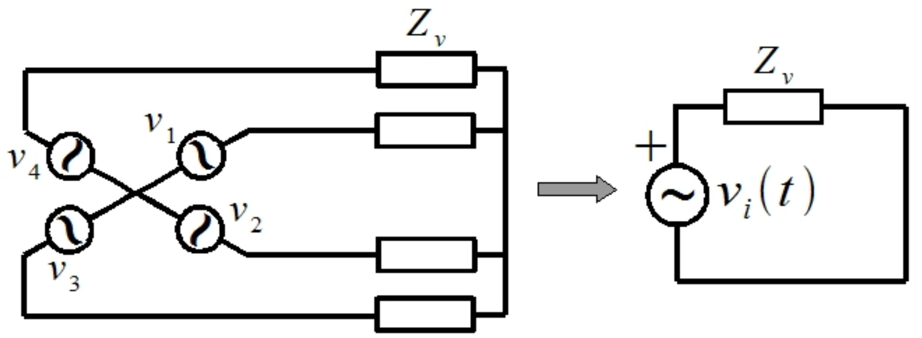
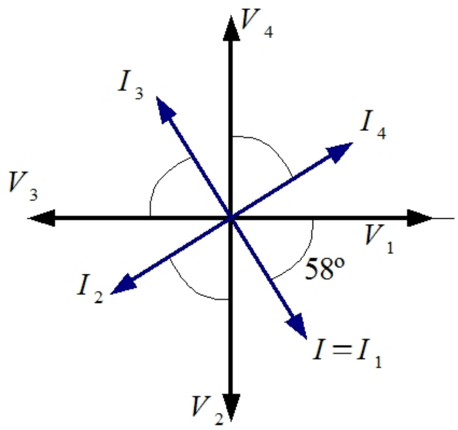
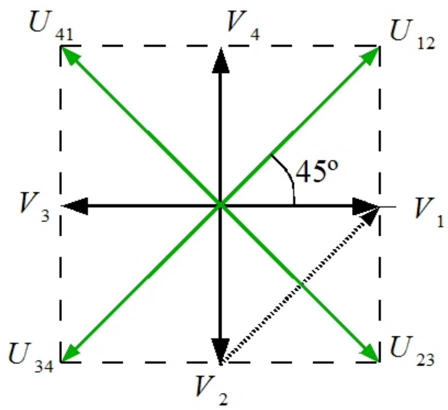


Figura 5: Equivalente monofásico



$$I_i = \frac{V_i}{Z_v} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = I = 11A\angle - 58^o \\ I_2 = 11A\angle - 58^o - 90^o \\ I_3 = 11A\angle - 58^o - 180^o \\ I_4 = 11A\angle - 58^o - 270^o \end{cases}$$

II) Para calcular las tensiones de línea, recordemos que $U_{ij} = V_i - V_j$, si realizamos dicha operación, gráficamente obtenemos:



$$\boxed{\begin{aligned} U_{12} &= \sqrt{2}(\sqrt{2}\,220V)\,\cos(\omega t + 45^o) \\ U_{23} &= \sqrt{2}(\sqrt{2}\,220V)\,\cos(\omega t + 45^o - 90^o) \\ U_{34} &= \sqrt{2}(\sqrt{2}\,220V)\,\cos(\omega t + 45^o - 180^o) \\ U_{41} &= \sqrt{2}(\sqrt{2}\,220V)\,\cos(\omega t + 45^o - 270^o) \end{aligned}}$$

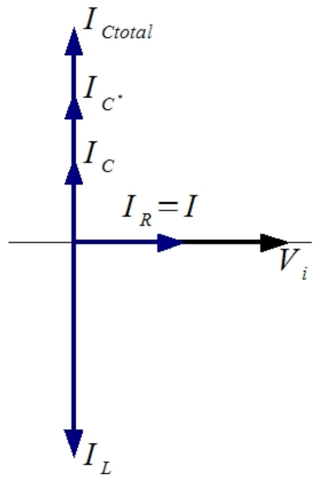
III) Aplicamos el teorema de Blondell, tomando como referencia a la línea 2. Ya conocemos las tensiones compuestas y las corrientes de línea necesarias para el cálculo.

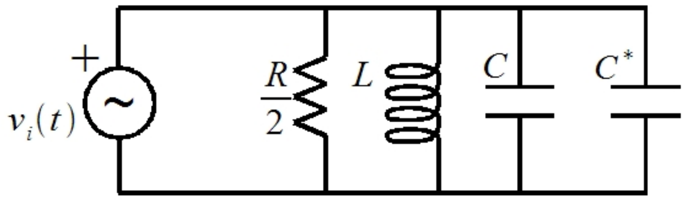
$$P = Re\left[U_{12}\bar{I}_1 + U_{32}\bar{I}_3 + U_{42}\bar{I}_4\right] \Rightarrow \boxed{P = 5156W}$$

$$Q = Im\left[U_{12}\bar{I}_1 + U_{32}\bar{I}_3 + U_{42}\bar{I}_4\right] \Rightarrow \boxed{Q = 8212Var}$$

Otra manera de realizar este cálculo, consiste en tomar como punto de referencia el centro de las fuentes. En ese caso, $U_{ix} = V_i$ y las corrientes coinciden con las de fase. El cálculo se reduce a $P = 4Re[V_1 \cdot \bar{I}_1] = 4P'$, donde P' coincide con la calculada en la parte a.

IV) En primer lugar, trabajemos con el equivalente monofásico, calculamos el condensador necesario, para que en paralelo con la impedancia existente, la corriente por la fuente sea colineal con la tensión. Sabemos que $|I_L| = 3|I_C|$, para que la corriente quede colineal con la tensión, debemos incluir un condensador en paralelo de modo que $|I_L| = |I_{C_{tot}}|$. Como los condensadores en paralelo, se comportan de manera equivalente a un condensador de valor igual a la suma, si fijamos $C_{total} = 3C$ tendremos una corriente por el condensador 3 veces mayor, como se pretende. Como $C_{total} = C^* + C = 3C$ entonces $\boxed{C^* = 2C}$.





Problema 2

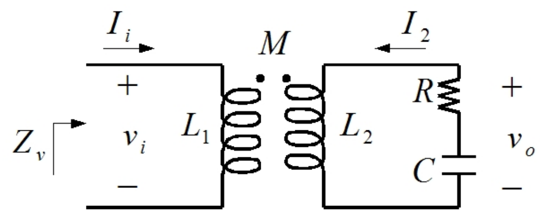
(a) La corriente por el secundario, la podemos escribir como:

$$I_2 = -\frac{V_o}{R + \frac{1}{j\omega C}} \tag{2}$$

Luego, las tensiones el los bobinados verifican:

$$V_i = L_1 j\omega I_i + M j\omega I_2 \tag{3}$$

$$V_o = L_2 j\omega I_2 + M j\omega I_i \tag{4}$$



Finalmente, sustituyendo el valor de I_2 calculado en (2) en las ecuaciones (3) y (4), y eliminando I_i, obtenemos:

$$V_o \left[1 + \frac{L_2 C (j\omega)^2}{RC(j\omega) + 1} - \frac{M^2 C (j\omega)^2}{L_1(RCj\omega + 1)}\right] = \frac{M}{L} V_i \tag{5}$$

Operando se llega a:

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{M(RCj\omega + 1)}{L_1(CRj\omega + 1) + (L_1L_2 - M^2)C(j\omega)^2}} \tag{6}$$

Para calcular la impedancia vista, utilizamos nuevamente las ecuaciones (3) y (4), pero ahora eliminamos V_o, obteniendo:

$$V_i = \left[L_1 j\omega - \frac{M^2 C(j\omega)^2}{L_2 C(j\omega)^2 + RC(j\omega) + 1}\right] I_i$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_v = \frac{(L_1L_2 - M^2)C(j\omega)^3 + RL_1C(j\omega)^2 + L_1 j\omega}{L_2C(j\omega)^2 + RCj\omega + 1}} \tag{7}$$

(b) Si el transformador es perfecto[b], se verifica que $L_1 L_2 = M^2$, sustituyendo en (6) y (7) obtenemos:

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{M}{L_1}} \tag{8}$$

$$\boxed{Z_v = \frac{RL_1C(j\omega)^2 + L_1(j\omega)}{L_2C(j\omega)^2 + RCj\omega + 1}} \tag{9}$$

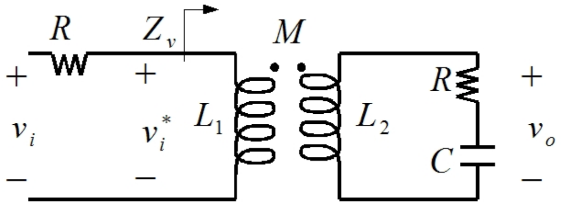


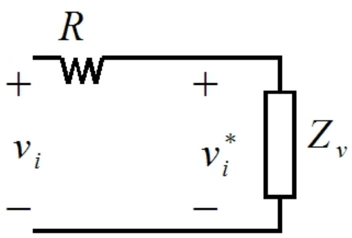
Figura 6: Circuito parte c

(c) Para calcular la transferencia del circuito mostrado en la figura 6, debemos calcular $H = \frac{V_o}{V_i}$, observar que:

$$H = \frac{V_o}{V_i} = \frac{V_o}{V_i^*} \cdot \frac{V_i^*}{V_i} \text{ donde } \frac{V_o}{V_i^*} = H^* \tag{10}$$

H^* corresponde a la transferencia calculada en las partes a y b, solo resta entonces calcular el cociente $\frac{V_i^*}{V_i}$ y multiplicarlo por $H^*(j\omega) = \frac{M}{L_1}$ calculado anteriormente.

Para calcular la relación entre v_i y v_i^*, trabajamos con un circuito equivalente, recordando el valor de la impedancia vista calculado en las partes a y b.



Observar que tenemos un divisor de tensión, de modo que:

$$V_i^* = \frac{Z_v}{R + Z_v} V_i \Rightarrow \frac{V_i^*}{V_i} = \frac{Z_v}{R + Z_v}. \tag{11}$$

Finalmente la transferencia queda:

$$H = \left(\frac{M}{L_1}\right) \cdot \left(\frac{Z_v}{R + Z_v}\right) \tag{12}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{\sqrt{L_1 L_2}(j\omega)\left(j\omega + \frac{1}{RC}\right)}{(L_1 + L_2)(j\omega)^2 + \left(\frac{R^2C + L_1}{RC}\right) j\omega + \frac{1}{C}}} \tag{13}$$

(d) Si $L_2 = 9999\, L_1$ y $L_1 = R^2C$, tenemos, $L_1 L_2 \approx 10000 L_1^2$ y $\sqrt{L_1 C} = RC$, y podemos reescribir (13) como:

$$H(j\omega) = \frac{1}{100} \frac{j\omega\left(j\omega + \frac{1}{RC}\right)}{(j\omega)^2 + \frac{2}{10000\sqrt{L_1 C}} j\omega + \frac{1}{100\sqrt{L_1 C}}} \tag{14}$$

Defino $\omega_1 = \frac{1}{100\sqrt{L_1 C}}$ y $\omega_2 = \frac{1}{RC}$, para la relación entre los parámetros dada, se verifica, $\omega_1 = \frac{\omega_2}{100}$. Pasemos ahora a el estudio del diagrama de bode de la transferencia obtenida:

$$H(j\omega) = \frac{1}{100} \frac{j\omega\,(j\omega + \omega_2)}{(j\omega)^2 + \frac{2}{100}\omega_1 (j\omega) + \omega_1^2} \text{ Con polos conjugados y } \zeta = \frac{1}{100} \tag{15}$$

- Para $\omega \ll \omega_1$,

$$H(j\omega) \approx \frac{j\omega\omega_2}{100\omega_1^2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log\left(\frac{\omega_2}{100\omega_1^2}\right) + 20\log(\omega)\, dB \\ Arg(H(j\omega)) \approx \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Para $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$,

$$H(j\omega) \approx \frac{\omega_2}{100 j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log\left(\frac{\omega_2}{100}\right) - 20\log(\omega)\, dB \\ Arg(H(j\omega)) \approx -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Para $\omega_2 \ll \omega$,

$$H(j\omega) \approx \frac{1}{100} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \approx -40\, dB \\ Arg(H(j\omega)) \approx 0 \end{cases}$$

[b] recordar las condiciones que verifican los transformadores perfectos, y los transformadores ideales; ambos se detallan en las páginas 132-136 de los apuntes del curso.

Por último, sabemos que la fase, tiene una *caída* de π, pues los polos complejos tienen parte real negativa por se ζ positivo. *Otra manera de saber si la fase presenta una caída de π o un incremento de π, es evaluar la transferencia en un punto intermedio, por ejemplo ω_1, $H(j\omega_1) \approx \frac{\omega_2}{2\omega_1} = 50 > 0$ con $Arg(H(j\omega_1)) \approx 0$.*

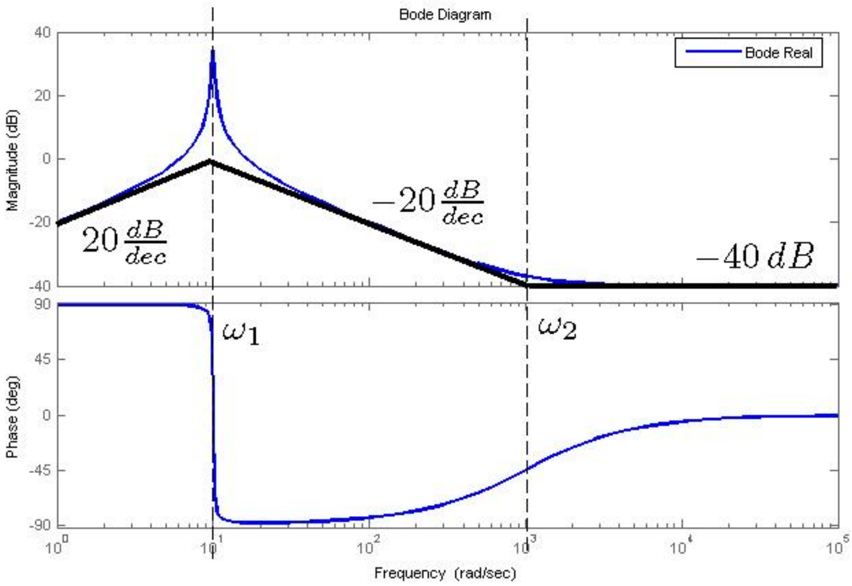


Figura 7: Diagrama de Bode

(e) I) Si la entrada al sistema es de la forma:

$$v_i(t) = 1V\ \cos\left(\frac{t}{100\sqrt{L_1C}}\right) \Rightarrow\ v_o(t) = |(H(j\omega_1))|\cos\left[\omega_1 t + arg(H(j\omega_1))\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{v_o(t) = 50V\cos(\omega_1 t)}$$

II) Si la entrada al sistema es de la forma:

$$v_i(t) = 1V\ \cos(\omega_2 t) \Rightarrow\ v_o(t) = |(H(j\omega_2))|\cos\left[\omega_1 t + arg(H(j\omega_2))\right]$$

Aproximamos, $H(j\omega_2) \approx \frac{1}{100}\frac{1+j}{-1} = \frac{\sqrt{2}}{100}\angle\frac{-\pi}{4}$, dicha aproximación es valida pues los polos del sistema están *bien separados*.[c]

$$\boxed{v_o(t) = \sqrt{\frac{1}{5000}}V\cos(\omega_2 t + frac\pi 4)}$$

[c]decimos que los polos están alejados cuando su distancia es de al menos una década. En este caso los polos están separados dos décadas, de modo que la aproximación realizada no introducirá errores apreciables.