Sistemas Lineales I
Segundo Parcial 1999

PROBLEMA 1. (17 puntos)

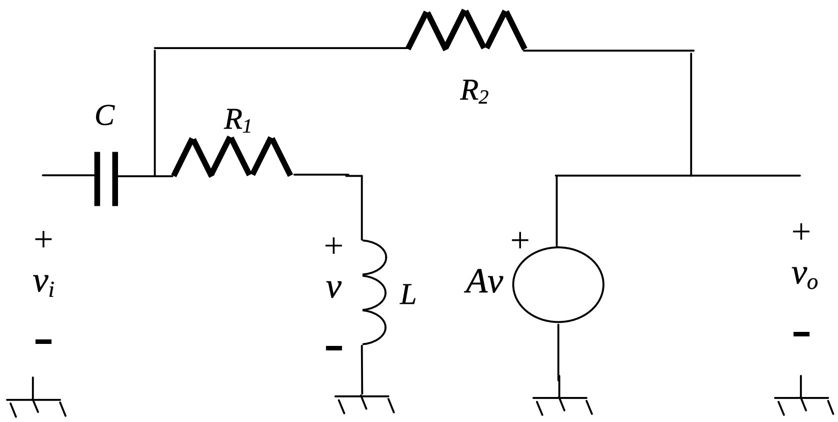


Figura 1

a) Hallar la transferencia $T(jw) = \dfrac{V_o(jw)}{V_i(jw)}$ (5 puntos).

De ahora en más se cumplen las siguientes relaciones:

$$R_1 = R_2 = R \quad ; \quad LC = \frac{1}{10} \quad ; \quad \frac{R}{L} = 10 \quad ; \quad A = -10$$

b) **i)** Hallar la expresión resultante para $T(jw)$.

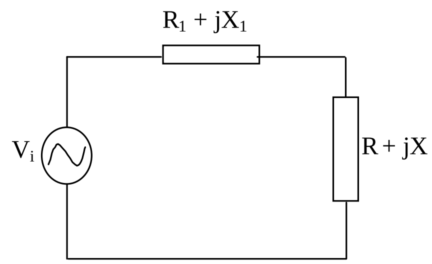
ii) Dibujar los diagramas de Bode asintóticos para $T(jw)$. Explique como los construye. Explicite los valores de abscisas y ordenadas en los puntos notables (6 puntos).

c) Hallar la respuesta $v_o(t)$ en régimen para la entrada $v_i(t)=sen(20\,t)$ (2 puntos).

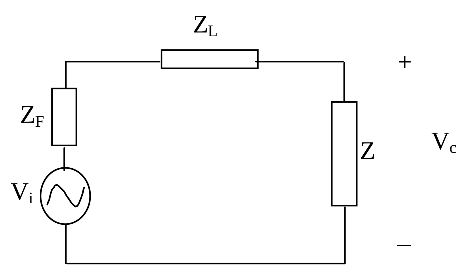
d) Hallar la banda de frecuencias en la que la distorsión de amplitud es menos de 20 dB respecto del valor para $w = +\infty$ (4 puntos).

PROBLEMA 2. (12 puntos)

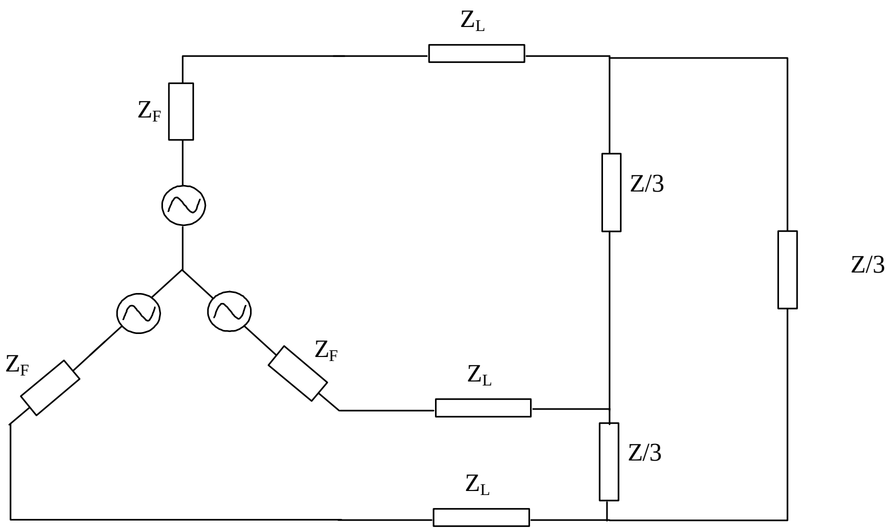
a) En el circuito de la figura siguiente, deducir los valores de X y R en función de X_1 y R_1 para maximizar la potencia disipada por la carga R+jX (5 puntos).



b) En el circuito a continuación, hallar Z para que en ella se disipe la máxima potencia posible (2 puntos).
$Z_L = (100 + 200j)\Omega$
$Z_F = (30 + 40j)\ \Omega$
(impedancias correspondientes a w =314 rad/s).

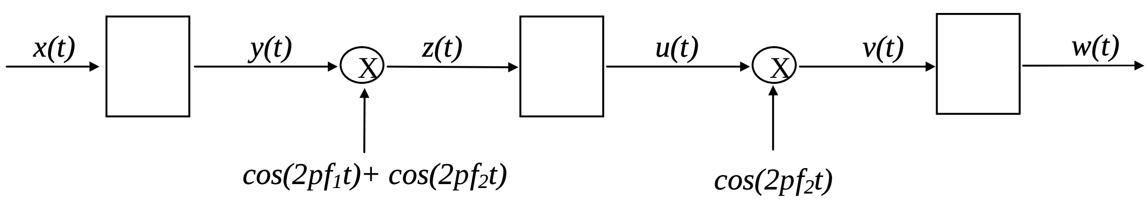


c) En el circuito de la figura la fuente es trifásica equilibrada de tensión eficaz de fase 220 V. Hallar la potencia activa entregada por la fuente. Se pide calcular el valor de los condensadores para anular la potencia reactiva entregada por la fuente, si únicamente se tienen accesibles los bornes de la misma. (5 ptos).



PROBLEMA 3. (15 puntos)

Se tiene el sistema:



Se verifican las siguientes relaciones:

- $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) * \dfrac{\mathrm{sen}(2p\boldsymbol{f_o t})}{p\boldsymbol{t}}$
- $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}).\left[\cos(2p\boldsymbol{f}_1\boldsymbol{t}) + \cos(2p\boldsymbol{f}_2\boldsymbol{t})\right]$
- ***u(t)*** es la salida de un filtro pasa-altos ideal de frecuencia de corte f_3 con entrada ***z(t)***.
- $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}).\cos(2p\boldsymbol{f}_2\boldsymbol{t})$
- $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) * \dfrac{\mathrm{sen}(2p\boldsymbol{f_o t})}{p\boldsymbol{t}}$
- $\boldsymbol{f_o << f_1 < f_2}$; $\boldsymbol{f_1 + f_o < f_3 < f_2 - f_o}$

Dibujar los espectros de amplitud de las señales ***y***, ***z***, ***u***, ***v*** y ***w*** cuando ***x(t)=d(t)***.

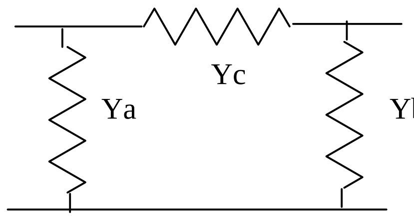
PROBLEMA 4. (6 puntos)

Enunciar y probar la Fórmula de Parseval para funciones de soporte acotado de clase C^2.

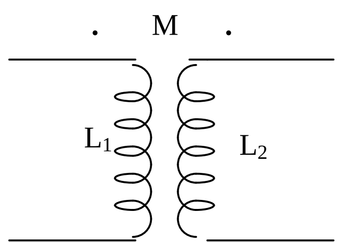
PROBLEMA 5. (10 puntos)
En un cuadripolo recíproco, hallar los parámetros **Y** (admitancias de cortocircuito) en función de:

a) Los parámetros Z (impedancias de vacío) (3 puntos)

b) Las admitancias del equivalente Π. (3 puntos)



c) Aplicación: Hallar el equivalente Π del transformador simple.

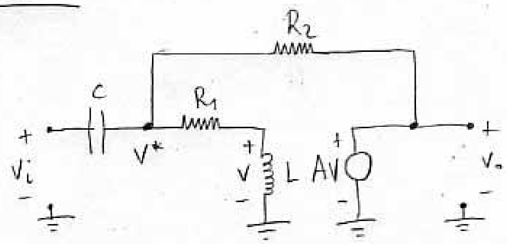


Dibujar el Π e indicar que tipo de elemento básico son sus componentes. ¿Qué sucede con el modelo Π si el transformador es perfecto (acoplamiento unitario)? (4 puntos)

SISTEMAS LINEALES 1: SEGUNDO PARCIAL 1999

Problema 1:

(a)



$V_o = AV$

Del divisor de tensiones, tenemos que:

$$V = \frac{Lj\omega}{R_1+Lj\omega} V^* \Rightarrow V^* = \frac{R_1+Lj\omega}{ALj\omega} V_o$$

Planteando la ecuación de nudos: $(V_i - V^*)Cj\omega = \frac{V^* - V_o}{R_2} + \frac{V^* - \frac{V_o}{A}}{R_1}$

$$\Rightarrow V_i Cj\omega = V_o \left[\frac{(R_1+Lj\omega)}{ALj\omega}\frac{(R_1R_2Cj\omega + R_1 + R_2)}{R_1R_2} - \frac{AR_1+R_2}{AR_1R_2} \right]$$

$$\Rightarrow T(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} \quad , \quad \boxed{T(j\omega) = \frac{AR_1R_2LC(j\omega)^2}{R_1R_2LC(j\omega)^2 + (R_1^2R_2C + R_1L(1-A))(j\omega) + R_1^2 + R_1R_2}}$$

(b) $R_1 = R_2 = R \quad ; LC = \frac{1}{10} \quad ; \frac{R}{L} = 10 \quad ; A = -10$

(i) $$T(j\omega) = \frac{A(j\omega)^2}{(j\omega)^2 + \left(\frac{R_1}{L} + \frac{(1-A)}{R_2C}\right)(j\omega) + \frac{R_1}{R_2LC} + \frac{1}{LC}}$$

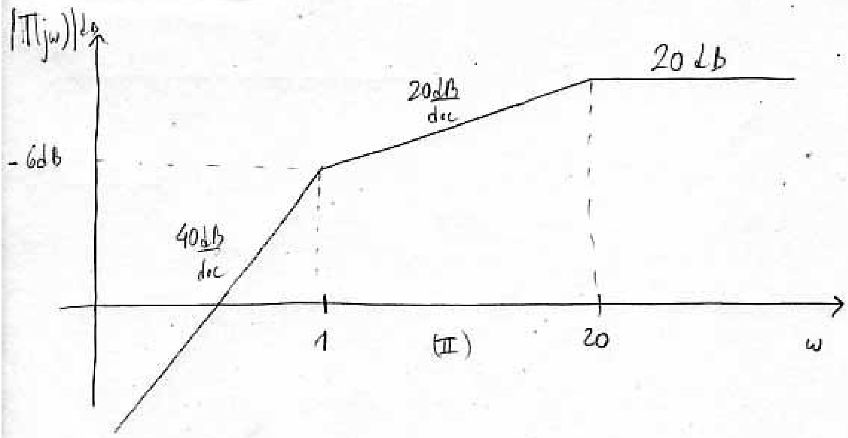
Simplificando, $$T(j\omega) = \frac{-10(j\omega)^2}{(j\omega)^2 + 21(j\omega) + 20} \Rightarrow \boxed{T(j\omega) = \frac{-10(j\omega)^2}{(j\omega+1)(j\omega+20)}}$$

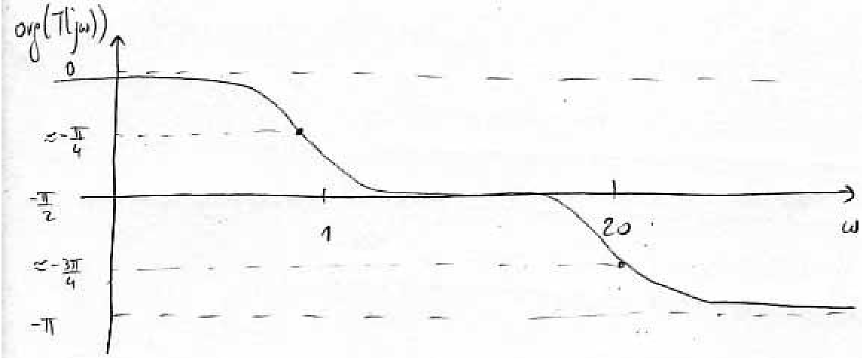
(ii) Para $\omega \ll 1 \Rightarrow T(j\omega) \simeq -\frac{1}{2}(j\omega)^2 \Rightarrow \begin{cases} |T(j\omega)|_{dB} \simeq -20\log 2 + 40\log\omega \text{ dB} \\ \arg(T(j\omega)) = 0 \end{cases}$

Para $1 \ll \omega \ll 20 \Rightarrow T(j\omega) \simeq -\frac{1}{2}(j\omega) \Rightarrow \begin{cases} |T(j\omega)|_{dB} \simeq -20\log 2 + 20\log\omega \text{ dB} \\ \arg(T(j\omega)) \simeq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Para $\omega \gg 20 \Rightarrow T(j\omega) \simeq -10 \Rightarrow \begin{cases} |T(j\omega)|_{dB} \simeq 20 \text{ dB} \\ \arg(T(j\omega)) \simeq -\pi \end{cases}$

(2)





(c) Si $v_i(t) = \sin(20t) \Rightarrow v_o(t) = |T(j20)| \sin(20t + arg(T(j20)))$

Del asintótico, $|T(j20)| \simeq 10$ y $arg(T(j20)) \simeq -\frac{3\pi}{4}$

La aproximación es buena porque la influencia del otro polo (a más de una década) es poca.

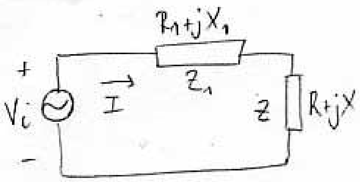
$\Rightarrow \boxed{v_o(t) = 10 \sin\left(20t - \frac{3\pi}{4}\right)}$

(d) En el tramo (II) del Bode de módulo y recorriendo hacia bajas frecuencias cae a $-20\frac{dB}{dec}$, luego concluyo que a una década por debajo de $20 \frac{rad}{s}$ tendré un módulo 20 dB menor.

$\Rightarrow$ Para $\omega > \frac{20 \text{ rad/s}}{10} \Rightarrow \boxed{\omega > 2 \text{ rad/s}}$ la distorsión de amplitud es menor a 20 dB respecto al valor para $\omega = \infty$

Problema 2:

a)



$$I = \frac{V_i}{R_1+R+j(X+X_1)} \quad , \quad P = R|I|^2$$

$$\Rightarrow P = \frac{R\,V_i^2}{(R_1+R)^2+(X+X_1)^2}$$

Debo maximizar P con la restricción de que $R \geq 0$. Minimizo el denominador eligiendo $X = -X_1$

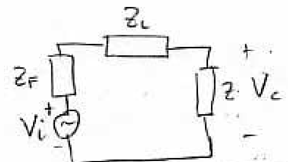
Maximizo P respecto de R $\Rightarrow \dfrac{dP}{dR} = \dfrac{(R_1+R)^2 - 2R(R_1+R)}{(R_1+R)^4} = \dfrac{R_1^2 - R^2}{(R_1+R)^4} = 0$ ← para máximo

$\Rightarrow R = R_1$. No es difícil verificar que efectivamente es un máximo.

$$\Rightarrow \boxed{Z = \overline{Z_1}}$$

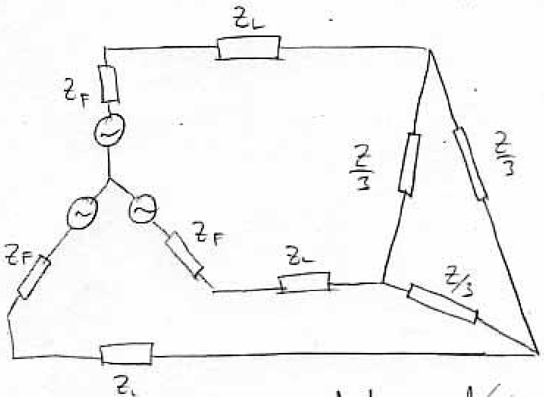
b) $Z_L = (100+j200)\,\Omega$

$Z_F = (30+j40)\,\Omega$

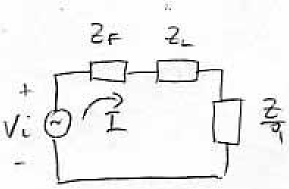


De la parte anterior, $Z = \overline{Z_F + Z_L}$ $\Rightarrow \boxed{Z = (130 - j240)\,\Omega}$

c)



Fuente trifásica equilibrada de 220 V eficaces de fase.



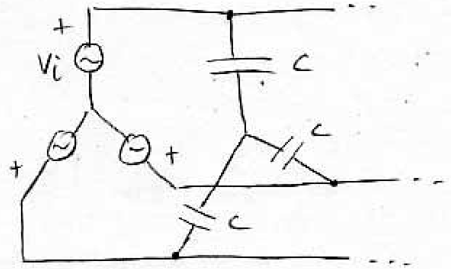
Transfigurando, obtenemos el equivalente monofásico:

$$I = \frac{V_i}{Z_F + Z_L + \frac{Z}{9}} \Rightarrow |I| = 0{,}854\,A$$

$$\Rightarrow P = 3\,\mathrm{Re}\left[Z_F + Z_L + \frac{Z}{9}\right]|I|^2 \Rightarrow \boxed{P = 316\,W}$$

$$Q = 3\,\mathrm{Im}\left[Z_F + Z_L + \frac{Z}{9}\right]|I|^2 \Rightarrow Q = 467\,\mathrm{Var}$$

Para compensar la potencia reactiva, conecto un banco de condensadores en estrella, en paralelo con la fuente. Impongo que dichos condensadores entreguen la potencia Q consumida a la fuente.

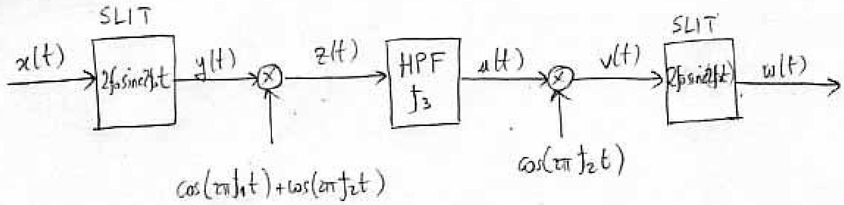


$$Q_c + Q = 0$$

$$\Rightarrow -3C\omega|V_i|^2 = -Q \Rightarrow C = \frac{Q}{3\omega|V_i|^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{C = 10{,}2\,\mu F}$$

Problema 3:



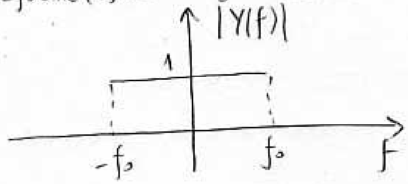
$f_0 << f_1 < f_2$

$f_1 + f_0 < f_3 < f_2 - f_0$

$x(t) = \delta(t)$

$y(t) = x(t) * 2f_0 \operatorname{sinc}(2f_0 t) = \delta(t) * 2f_0 \operatorname{sinc}(2f_0 t) = 2f_0 \operatorname{sinc}(2f_0 t)$

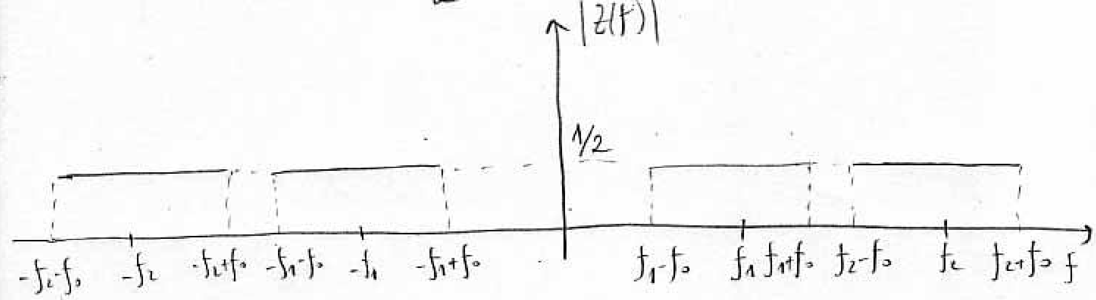
$\mathcal{F}[y(t)] = Y(f) = P_{2f_0}(f)$



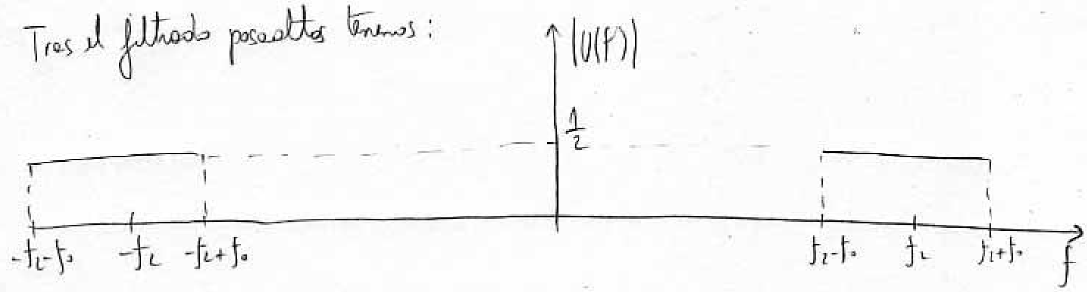
$z(t) = y(t)\,[\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)]$

$$\mathcal{F}[z(t)] = \mathcal{F}[y(t)[\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)]] = Y(f) * \left(\frac{\delta(f-f_1) + \delta(f+f_1) + \delta(f-f_2) + \delta(f+f_2)}{2} \right)$$

$$\Rightarrow Z(f) = \frac{Y(f-f_1) + Y(f+f_1) + Y(f-f_2) + Y(f+f_2)}{2}$$

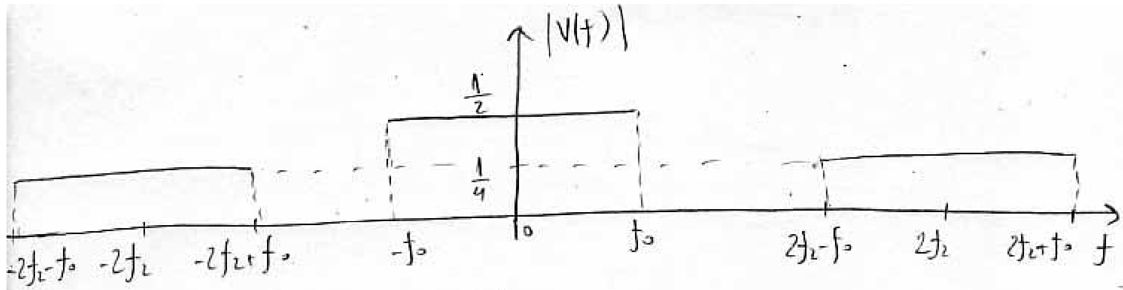


Tras el filtrado pasoalto tenemos:



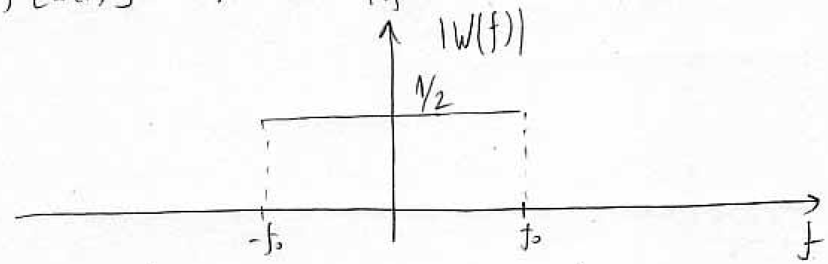
$v(t) = u(t)\cos(2\pi f_2 t)$

$$\mathcal{F}[v(t)] = V(f) = U(f)\, \frac{\delta(f-f_2) + \delta(f+f_2)}{2} \Rightarrow V(f) = \frac{U(f-f_2) + U(f+f_2)}{2}$$



Finalmente $w(t) = v(t) * 2f_0 \operatorname{sinc}(2f_0 t)$

$\Rightarrow \mathcal{F}[w(t)] = W(f) = V(f)\, P_{2f_0}(f)$



Problema 4:

Sea $g(t) \in C^2$ una función de soporte acotado. Sea $G(f) = \mathcal{F}[g(t)]$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2\,df$$

Para la demostración, siendo g de soporte acotado pertenece a L_1 y es transformable. Por las propiedades de regularidad de $g(t)$ y las propiedades de transformada de Fourier sabemos que $G(f) \in L_1$ ya que tiende a cero al infinito como f_2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\overline{g(t)}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} G(f)\,e^{j2\pi ft}\,df\right] \overline{g}(t)\,dt\ .$$

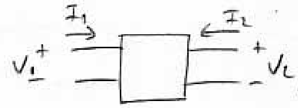
Intercambiando el orden de integración. Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g}(t)\,e^{j2\pi ft}\,dt\right] G(f)\,df = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\overline{\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,e^{-j2\pi ft}\,dt\right]}}_{\overline{G(f)}} G(f)\,df$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2\,df$$

Problema 5:

a) Sea un cuadripolo recíproco.



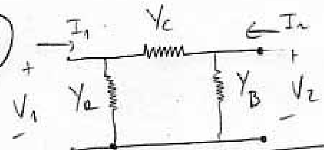
$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$

$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$ y $Z_{12} = Z_{21}$ pues es recíproco $\Rightarrow \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$

Buscamos la matriz de parámetros Y $\Rightarrow \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{22} \end{pmatrix}^{-1}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2} \begin{pmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{12} & Z_{11} \end{pmatrix}}$$

b)

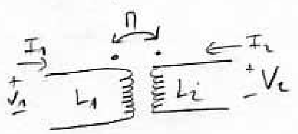


$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$

$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} \Rightarrow \boxed{Y_{11} = Y_A + Y_C}$ $\qquad Y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0} \Rightarrow \boxed{Y_{22} = Y_B + Y_C}$

$Y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} = Y_{21} \Rightarrow \boxed{Y_{12} = Y_{21} = -Y_C}$

c)

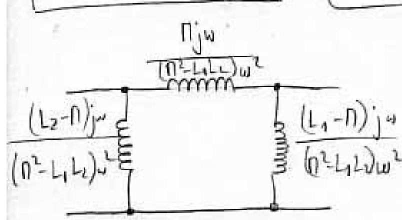


$\begin{cases} V_1 = L_1 j\omega I_1 + M j\omega I_2 \\ V_2 = M j\omega I_1 + L_2 j\omega I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 j\omega & M j\omega \\ M j\omega & L_2 j\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$

Obtengo los parámetros Y: $\quad Y = \frac{1}{(M^2 - L_1 L_2)\omega^2} \begin{pmatrix} L_2 j\omega & -M j\omega \\ -M j\omega & L_1 j\omega \end{pmatrix}$

Invirtiendo las relaciones de la parte b), obtengo las admitancias del Π equivalente.

$\boxed{Y_C = \frac{M j\omega}{(M^2 - L_1 L_2)\omega^2}}$, $\boxed{Y_A = \frac{(L_2 - M) j\omega}{(M^2 - L_1 L_2)\omega^2}}$, $\boxed{Y_B = \frac{(L_1 - M) j\omega}{(M^2 - L_1 L_2)\omega^2}}$ $\quad M^2 - L_1 L_2 < 0$ y las susceptancias son inductivas.



Si el transformador es perfecto, $M^2 - L_1 L_2 = 0$ y el equivalente Π no sirve para representar el cuadripolo..