Sistemas Lineales 1
Primer parcial, 20 de mayo 2002

Recomendaciones generales:

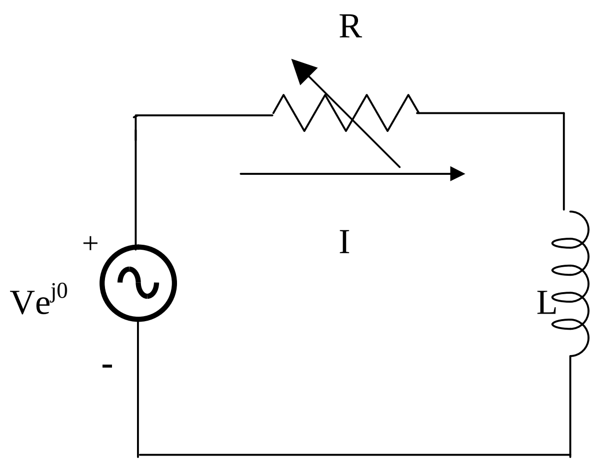
- Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.
- En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar de problema y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.
- Justificar claramente los pasos realizados para resolver los problemas.
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **Poner el nombre en todas las hojas.**
- En lo posible, usar las hojas de un solo lado
- Se recuerda que la prueba es **individual**.
- Al finalizar, colocar las hojas dentro del sobre amarillo y entregarlo al docente del salón.

Problema 1 **(5 puntos)**

En el circuito de la figura, con la resistencia R variable y siendo ω la frecuencia de trabajo,

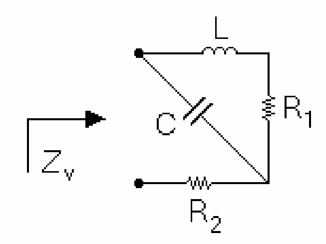
a) Hallar la ecuación del lugar geométrico del extremo del fasor I. Mostrar que es una circunferencia y hallar centro y radio.

b) Hallar R para que sea máxima la componente de I en fase con V.



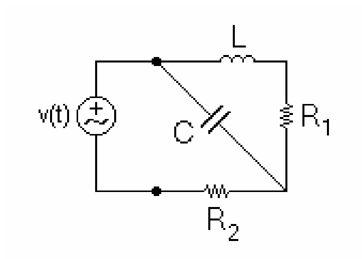
<u>Problema 2</u> **(10 puntos)**

a) Sea el circuito de la figura. Hallar Z_v (impedancia equivalente) en función de los parámetros C, L, w (frecuencia de trabajo), R_1 y R_2.



Sugerencia: Plantea Z_v como $Z_v = R_2 + Z$.

b) Dado el circuito de la figura, en donde $v(t) = 220\sqrt{2}\,sin(wt)$ y:



$w = 100p$
$L = 60\,mHy$
$C = 39mF$
$R_1 = 22\Omega$
$R_2 = 33\Omega$

calcular I (fasor de corriente por R_2), I_c (fasor de corriente por C) e I_l (fasor de corriente por L).

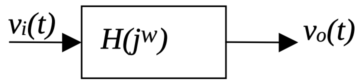
c) i) Realizar un diagrama fasorial que involucre a V (fasor de la fuente $v(t)$), I (fasor de corriente por R_2), I_c (fasor de corriente por el condensador C) e I_l (fasor de corriente por la bobina L).

ii) Ubicar "a grandes rasgos (darle importancia al sentido)" a V_c (fasor de voltaje en C), V_R (fasor de voltaje en R_1) y V_l (fasor de voltaje en L) en este diagrama fasorial. **Justificar**.

d) i) Hallar las Potencias Activa y Reactiva consumidas a la fuente.
ii) Anular la potencia reactiva mediante un condensador en paralelo con la fuente. Calcular el valor de dicho condensador.

<u>Problema 3</u> **(10 puntos)**

Sea un sistema lineal para el cual se cumple la relación $V_o = H(jw).V_i$, siendo V_{i} el fasor asociado a la entrada sinusoidal v_{i} de pulsación ω y V_{o} el fasor asociado a la respectiva salida v_{o}.



a) Utilizando el principio de superposición, demostrar que si $v_i(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n.e^{jnwt}$,

entonces $v_o(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n H(jnw).e^{jnwt}$

b)

i) Mostrar que si $v_i(t) = A.cos(wt + j)$, entonces:

$$v_o(t) = A|H(jw)| \,.\, cos(wt + j + arg[H(jw)])$$

ii) Sea $v_i(t)$ una señal periódica y **<u>real</u>** dada por su serie de Fourier $v_i(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n.e^{jnwt}$. Demostrar que $v_i(t)$ se puede escribir como:

$$v_i(t) = c_0 + 2\sum_{1}^{+\infty} |c_n|.\cos[nwt + \arg(c_n)]$$

c) Aplicación:

En el circuito de la figura1 hallar la Serie de Fourier de la señal de salida $v_o(t)$ si $v_i(t)$ es la onda cuadrada de la figura2.

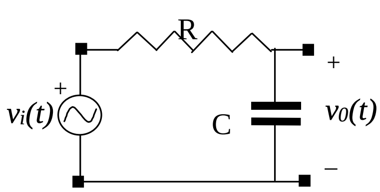


Figura 1

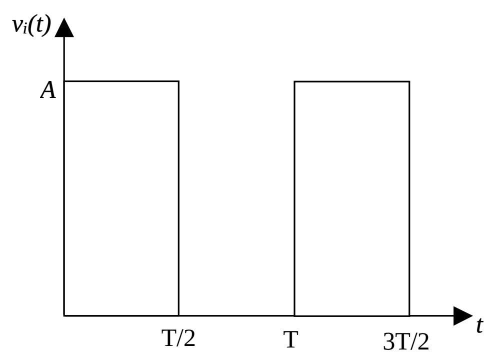


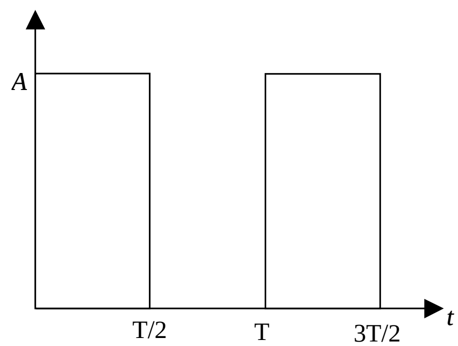
Figura 2

Problema 4 **(5 puntos)**

Hallar la distribución $T(t) = Y(t).f(t) \in D'_+$ que verifica la ecuación diferencial en distribuciones $T(t) + 2T''(t) = d'(t)$, siendo f una función continua con derivada segunda continua.

Problema 5 **(5 puntos)**

Utilizando la Identidad de Parseval, calcular el porcentaje de potencia respecto del total contenido en los primeros 3 armónicos de una onda cuadrada simétrica de amplitud A.



Problema 6 **(5 puntos)**

Sea $\alpha(x)$ una función de C^{∞}.

a) Probar que $\alpha(x)\delta(x) = \alpha(0)\delta(x)$.

b) Análogamente, calcular:

- $\alpha(x)\delta'(x)$
- $\alpha(x)\delta^{(n)}(x)$

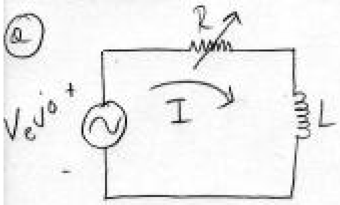
c) Como aplicación, calcular:

- $x\delta(x)$
- $x\delta'(x)$
- $x\delta^{(n)}(x)$

SISTEMAS LINEALES 1: PRIMER PARCIAL 2002 (1)

Problema 1:

(a)



$$I = \frac{V}{R+Lj\omega} = \frac{VR}{R^2+(L\omega)^2} - j\frac{VL\omega}{R^2+(L\omega)^2}$$

Para mostrar que el extremo del fasor I describe una circunferencia al variar R, buscaremos hallar $z_0 = x_0 + jy_0$ y $r>0$, de manera de que $\forall R$ se cumpla $|I - z_0| = r$. z_0 es el centro de la circunferencia y r su radio.

Trabajaremos por comodidad con la igualdad $|I-z_0|^2 = r^2$

$$\Rightarrow \left(\frac{VR}{R^2+(L\omega)^2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{VL\omega}{R^2+(L\omega)^2} + y_0\right)^2 = r^2$$

Como debe cumplirse la relación $\forall R$, en particular se cumple para:

$R=0 \Rightarrow x_0^2 + \left(\frac{V}{L\omega} + y_0\right)^2 = r^2$ (I)

$R\to\infty \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = r^2$ (II)

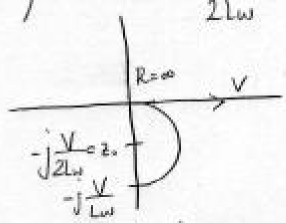
$R=L\omega \Rightarrow \left(\frac{V}{2L\omega} - x_0\right)^2 + \left(\frac{V}{2L\omega} + y_0\right)^2 = r^2$ (III)

De (I) y (II) debe tenerse que $\frac{V}{L\omega} + y_0 = \pm y_0 \Rightarrow \boxed{y_0 = -\frac{V}{2L\omega}}$

Sustituyendo el valor de y_0 en (II) y (III) y eliminando r^2 se tiene:

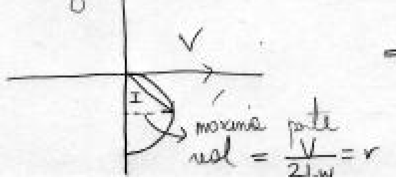
$$x_0^2 + \frac{V^2}{4(L\omega)^2} = \left(\frac{V}{2L\omega} - x_0\right)^2 = x_0^2 - \frac{x_0V}{2L\omega} + \frac{V^2}{4(L\omega)^2} \Leftrightarrow \boxed{x_0 = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{V}{2L\omega}}$$



La otra semicircunferencia se tiene para $R \in [0, -\infty)$

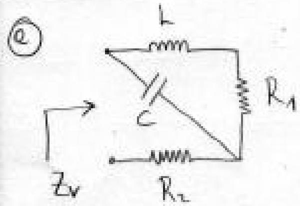
(b) Para maximizar la componente de I en fase con V, busco maximizar su parte real. Se ve claro del diagrama fasorial que dicho máximo se alcanza cuando dicha parte real es igual al radio de la circunferencia.



$$\Rightarrow Re(I) = \frac{VR}{R^2+(L\omega)^2} = \frac{V}{2L\omega} \Leftrightarrow \boxed{R = L\omega}$$

Problema 2: (2)

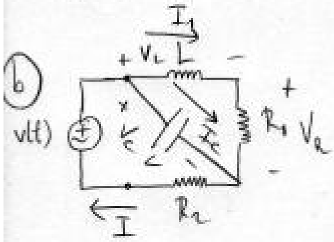
a)



$Z_V = R_2 + (Lj\omega + R_1) // \frac{1}{Cj\omega} = R_2 + \frac{Lj\omega + R_1}{Cj\omega(Lj\omega + R_1) + 1}$

$$\Rightarrow \boxed{Z_V = \frac{R_2 LC(j\omega)^2 + (R_2R_1C + L)(j\omega) + R_1 + R_2}{LC(j\omega)^2 + R_1C(j\omega) + 1}}$$

b)



$v(t) = 220\sqrt{2}\sin(\omega t)$
$\omega = 100\pi$
$L = 60\,mHy$
$C = 39\,\mu F$
$R_1 = 22\,\Omega$
$R_2 = 33\,\Omega$

Evaluando, $Z_V = (66{,}1 + j\,12{,}9)\,\Omega = 67{,}4\,\Omega \angle 11°$

Trabajando con valores eficaces, $V = 220V\angle 0°$

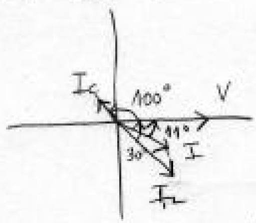
$\Rightarrow I = \frac{V}{Z_V} \Rightarrow \boxed{I = (3{,}2 - j\,0{,}63)A = 3{,}27A\angle -11°}$

Por Kirchoff de tensiones, $V_C = V - R_2 I$ y además $I_C = V_C Cj\omega$

$\Rightarrow \boxed{I_C = (-0{,}253 + j\,1{,}39)A = 1{,}42A\angle 100°}$

Planteando el nudo: $I_L = I - I_C \Rightarrow \boxed{I_L = (3{,}46 - j\,2{,}02)A = 4A\angle -30°}$

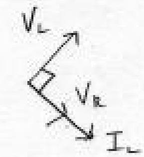
c) (i)



Notar que del diagrama se observa que la suma vectorial de los fasores I_L e I_C da I

(ii) $V_C = \frac{I_C}{Cj\omega}$

, $V_R = R_1 I_L$
$V_L = Lj\omega\, I_L$



d) (i) $P = Re[VI^*] \Rightarrow \boxed{P = 705{,}1W}$
$Q = Im[VI^*] \Rightarrow \boxed{Q = 137{,}5\ Var}$

(ii) Coloco un condensador que entregue la reactiva consumida a la fuente:

$Q + Q_C = 0$, $Q_C = -C\omega|V|^2 \Rightarrow C = \frac{Q}{\omega|V|^2}$, $\boxed{C = 9\mu F}$

Problema 3: (3)

ⓐ $v_i(t) \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow v_o(t)$ Sea $v_i(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t}$

Siendo el sistema lineal, sabemos que la respuesta a la entrada $v_i(t)$, es igual a la suma infinita de las respuestas a las entradas $v_i'(t) = c_n e^{jn\omega t}$.

Cada una de estas entradas es sinusoidal de pulsación $n\omega$ con fasor c_n ya que:

$\mathrm{Re}[c_n e^{jn\omega t}] = |c_n| \cos(n\omega t + \arg(c_n))$.

Por lo tanto la respuesta a cada una de estas entradas es $v_o'(t) = \underbrace{H(jn\omega)c_n}_{\text{fasor asociado a la señal de salida.}} e^{jn\omega t}$

$\Rightarrow \boxed{v_o(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n H(jn\omega) e^{jn\omega t}}$

ⓑ (i) $v_i(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ que se le puede asociar el fasor $V_i = Ae^{j\varphi}$

$\Rightarrow$ El fasor asociado a la salida es $V_o = H(j\omega)Ae^{j\varphi} = |H(j\omega)|Ae^{j(\varphi + \arg(H(j\omega)))}$

$\Rightarrow v_o(t) = \mathrm{Re}[V_o e^{j\omega t}] \Rightarrow \boxed{v_o(t) = |H(j\omega)|A\cos(\omega t + \varphi + \arg(H(j\omega)))}$

(ii) $v_i(t)$ periódica y real, $v_i(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega t}$

$v_i(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega t} = c_0 + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n\neq 0}} c_n e^{jn\omega t}$

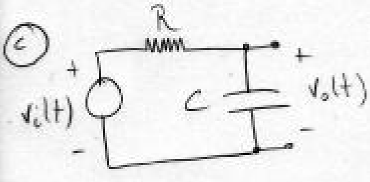
Para n arbitrario no nulo, siendo $v_i(t)$ real se cumple $c_{-n} = c_n^* \Rightarrow |c_{-n}| = |c_n|$, $\arg(c_{-n}) = -\arg(c_n)$

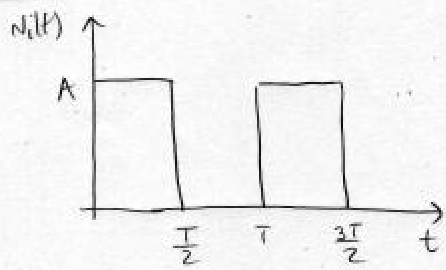
El n-ésimo armónico resulta $c_n e^{jn\omega t} + c_{-n}e^{-jn\omega t} = |c_n|e^{j(n\omega t + \arg(c_n))} + |c_{-n}|e^{-j(n\omega t - \arg(c_{-n}))}$

$= |c_n|\left[e^{j(n\omega t + \arg(c_n))} + e^{-j(n\omega t + \arg(c_n))}\right] = 2|c_n|\cos(n\omega t + \arg(c_n))$

$\Rightarrow \boxed{v_i(t) = c_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|\cos(n\omega t + \arg(c_n))}$

ⓒ





$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{Cj\omega}}{R + \frac{1}{Cj\omega}} = \frac{1}{RCj\omega + 1}$$

Calculemos la Serie de Fourier asociada a $v_i(t)$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (4)

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T v_i(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\,dt = \frac{A}{2}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T v_i(t)\,e^{-jn\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\,e^{-jn\omega t}\,dt = -\frac{A}{T}\left.\frac{e^{-jn\omega t}}{jn\omega}\right|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{A}{j2n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$\Rightarrow c_n(v_i) = \begin{cases} \frac{A}{2} & n=0 \\ 0 & n \text{ par} \neq 0 \\ \frac{A}{jn\pi} & n \text{ impar} \end{cases}$$

Usando los resultados encontrados antes : $v_o(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n H(j\omega n)\, e^{jn\omega t}$

$$\Rightarrow \boxed{v_o(t) = \frac{A}{2} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ \text{impar}}} \frac{A}{jn\pi}\frac{1}{RC(jn\omega)+1}\, e^{jn\omega t}}$$

La podemos escribir en términos de funciones reales notando que:

$$c_n(v_o) = \begin{cases} \frac{A}{2} & n=0 \\ 0 & n \text{ par} \neq 0 \\ \frac{A}{jn\pi}\frac{1}{RC(jn\omega)+1} & n \text{ impar} \end{cases}$$

Para n impar: $|c_n| = \frac{A}{n\pi}\frac{1}{\sqrt{1+(RCn\omega)^2}}$

$\arg(c_n) = \frac{-\pi}{2} - \arctan\left(RCn\omega\right)$

$$\Rightarrow \boxed{v_o(t) = \frac{A}{2} + 2\sum_{\substack{n=1\\ \text{impar}}}^{\infty} \frac{A}{n\pi}\frac{1}{\sqrt{1+(RCn\omega)^2}}\cos\left(n\omega t - \frac{\pi}{2} - \arctan\left(RCn\omega\right)\right)}$$

5

Problema 4:

$T(t) + 2T''(t) = \delta'(t)$. Sea el operador diferencial lineal $D = 2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1$

La ecuación diferencial puede escribirse como $DT(t) = \delta'(t)$

$D(\delta(t) * T(t)) = (D\delta(t)) * T(t) = \delta'(t) \Rightarrow T(t) = (D\delta(t))^{-1} * \delta'(t)$ que no es más que la derivada como distribución de $(D\delta(t))^{-1}$.

Calculemos $(D\delta(t))^{-1}$ para lo que consideramos el operador normalizado $\tilde{D} = \frac{1}{2}D$

Para $\tilde{D}$ estamos en condiciones de aplicar el resultado conocido para el cálculo de $(\tilde{D}\delta)^{-1}$

Dicho resultado dice que $(\tilde{D}\delta(t))^{-1} = Y(t)f(t)$ con $f(t)$ solución a la ecuación diferencial ordinaria: $\tilde{D}f(t) = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$

$f''(t) + \frac{f(t)}{2} = 0$, $\lambda^2 + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{j}{\sqrt{2}} \Rightarrow f(t) = Ae^{+j\frac{t}{\sqrt{2}}} + Be^{-j\frac{t}{\sqrt{2}}}$

$f(0) = 0 = A + B \Rightarrow A = -B$

$f'(0) = 1 = \frac{j}{\sqrt{2}}(A - B) = jA\sqrt{2} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2}j}$, $B = \frac{-1}{\sqrt{2}j}$

$\Rightarrow f(t) = \frac{e^{j\frac{t}{\sqrt{2}}} - e^{-j\frac{t}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}j} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow (\tilde{D}\delta(t))^{-1} = Y(t)\sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow (D\delta(t))^{-1} = (2\tilde{D}\delta(t))^{-1} = \frac{1}{2}(\tilde{D}\delta(t))^{-1} \Rightarrow (D\delta(t))^{-1} = \frac{Y(t)}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$

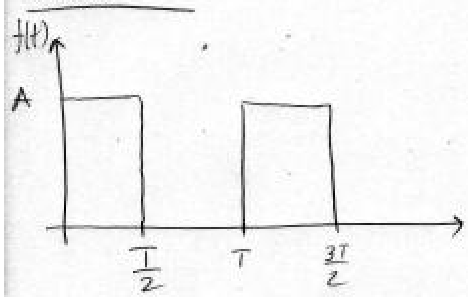
$$\Rightarrow \boxed{T(t) = \frac{Y(t)}{2}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)}$$

Verificación: $T'(t) = -\frac{Y(t)}{2\sqrt{2}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\delta(t)}{2}$

$T''(t) = -\frac{Y(t)}{4}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\delta'(t)}{2}$

$\frac{Y(t)}{4}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + 2\left(-\frac{Y(t)}{4}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\delta'(t)}{2}\right) = \delta'(t)$ como se quería.

Problema 5 : 6



Los coeficientes de Fourier de $f(t)$ son:

$$c_n = \begin{cases} \frac{A}{2} & n=0 \\ 0 & n \text{ par} \neq 0 \\ \frac{A}{jn\pi} & n \text{ impar} \end{cases}$$

La potencia media es $P_m = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2 dt \Rightarrow P_m = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A^2 dt = \frac{A^2}{2}$

Por otro lado, de la identidad de Parseval sabemos que:

$$P_m = \sum_{n\in Z} |c_n|^2 = |c_0|^2 + \sum_{\substack{n\in Z \\ n\neq 0}} |c_n|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ f(t)\text{ real} \\ c_{-n}=c_n^*}}{=} |c_0|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

$$P_{\text{Hasta el } 3^\circ} = |c_0|^2 + 2|c_1|^2 + 2|c_3|^3$$

$$\Rightarrow \frac{P_{\text{Hasta el } 3^\circ}}{P_m} = \frac{\frac{A^2}{4} + \frac{2A^2}{\pi^2} + \frac{2A^2}{9\pi^2}}{\frac{A^2}{2}} \times 100 \quad \Rightarrow \boxed{\frac{P_{\text{hasta el } 3^\circ}}{P_m} = 95{,}03\%}$$

Problema 6:

7

(a) Sea $\alpha(x) \in C^\infty$

$$\langle \alpha(x)\delta(x), \varphi(x) \rangle = \langle \delta(x), \alpha(x)\varphi(x) \rangle = \alpha(0)\varphi(0)$$

Por otro lado, sea la distribución $\alpha(0)\delta(x) \Rightarrow \langle \alpha(0)\delta(x), \varphi(x) \rangle = \alpha(0)\langle \delta(x), \varphi(x) \rangle = \alpha(0)\varphi(0)$

Siendo $\varphi(x)$ arbitraria, se tiene la identidad en distribuciones $\boxed{\alpha(x)\delta(x) = \alpha(0)\delta(x)}$

(b) (i) $\langle \alpha(x)\delta'(x), \varphi(x) \rangle = \langle \delta'(x), \alpha(x)\varphi(x) \rangle = -\langle \delta(x), (\alpha(x)\varphi(x))' \rangle$

$$= -\langle \delta(x), \alpha'(x)\varphi(x) + \alpha(x)\varphi'(x) \rangle = -\alpha'(0)\varphi(0) - \alpha(0)\varphi'(0)$$

Por otro lado, sea la distribución $-\alpha'(0)\delta(x) + \alpha(0)\delta'(x)$

$$\Rightarrow \langle -\alpha'(0)\delta(x) + \alpha(0)\delta'(x), \varphi(x) \rangle = -\alpha'(0)\langle \delta(x), \varphi(x) \rangle + \alpha(0)\langle \delta'(x), \varphi(x) \rangle$$

$$= -\alpha'(0)\varphi(0) - \alpha(0)\varphi'(0)$$

Siendo $\varphi(x)$ arbitraria, se tiene la identidad en distribuciones $\boxed{\alpha(x)\delta'(x) = -\alpha'(0)\delta(x) + \alpha(0)\delta'(x)}$

(ii) $\langle \alpha(x)\delta^{(n)}(x), \varphi(x) \rangle = \langle \delta^{(n)}(x), \alpha(x)\varphi(x) \rangle = (-1)^n \langle \delta(x), (\alpha(x)\varphi(x))^{(n)} \rangle$

$$= (-1)^n \langle \delta(x), C_n^0 \alpha^{(n)}(x)\varphi^{(0)}(x) + C_n^1 \alpha^{(n-1)}(x)\varphi^{(1)}(x) \ldots + C_n^{n-1}\alpha^{(1)}(x)\varphi^{(n-1)}(x) + C_n^n \alpha^{(0)}(x)\varphi^{(n)}(x) \rangle$$

$$= (-1)^n \langle \delta(x), \sum_{i=0}^{n} C_n^i \alpha^{(n-i)}(x)\varphi^{(i)}(x) \rangle = (-1)^n \sum_{i=0}^{n} C_n^i \alpha^{(n-i)}(0)\varphi^{(i)}(0)$$

Por otro lado, sea la distribución $\sum_{i=0}^{n} C_n^i (-1)^{n-i} \alpha^{(n-i)}(0)\delta^{(i)}(x) \Rightarrow$

$$\langle \sum_{i=0}^{n} C_n^i (-1)^{i} \alpha^{(n-i)}(0)\delta^{(i)}(x), \varphi(x) \rangle = (-1)^n C_n^0 \alpha^{(n)}(0) \underbrace{\langle \delta^{(0)}(x), \varphi(x) \rangle}_{\varphi(0)} + C_n^1 (-1)^{n-1}\alpha^{(n-1)}(0) \underbrace{\langle \delta'(x), \varphi(x) \rangle}_{(-1)^1 \varphi'(0)} + \ldots$$

$$+ C_n^{n-1}(-1)^1 \alpha^{(1)}(0) \underbrace{\langle \delta^{(n-1)}(x), \varphi(x) \rangle}_{(-1)^{n-1}\varphi^{(n-1)}(x)} + C_n^n (-1)^0 \alpha^{(0)}(0) \underbrace{\langle \delta^{(n)}(x), \varphi(x) \rangle}_{(-1)^n \varphi^{(n)}(x)} = (-1)^n \sum_{i=0} C_n^i \alpha^{(n-i)}(0)\varphi^{(i)}(x)$$

Por lo tanto se tiene la identidad en distribuciones $\boxed{\alpha(x)\delta^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i (-1)^{n-i} \alpha^{(n-i)}(0)\delta^{(i)}(x)}$

(c) $\alpha(x) = x \Rightarrow \alpha(0) = 0,\ \alpha'(0) = 1,\ \alpha^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \geq 2$

$\Rightarrow \boxed{x\delta(x) = 0}$ $\boxed{x\delta^{(n)}(x) = -C_n^{n-1}\delta^{(n-1)}(x)}$

$\boxed{x\delta'(x) = -\delta(x)}$