Examen de Sistemas Lineales 1
10 de febrero del 2005

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente.

Ejercicio 1

a) Se considera el transformador real de la figura 1. Las impedancias de cortocircuito Z_{cc} y vacío Z_o modelan las distintas pérdidas del mismo. Mostrar que el circuito de la figura 2 es equivalente al primero desde el punto de vista de la corriente en el secundario entregada a una carga cualquiera Z.

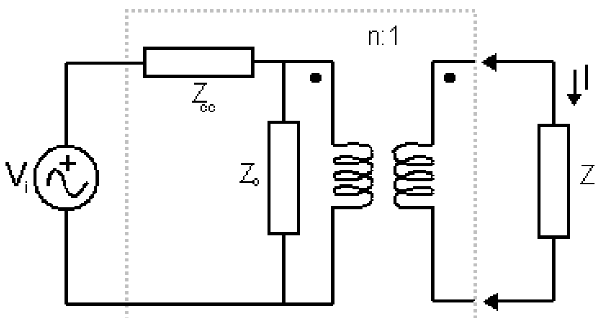


Figura 1

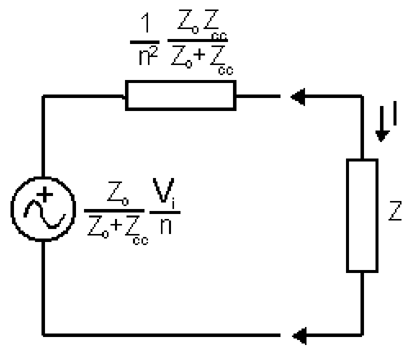


Figura 2

b) El circuito de la figura 3 corresponde al equivalente monofásico de una instalación para alimentar un motor en régimen sinusoidal.

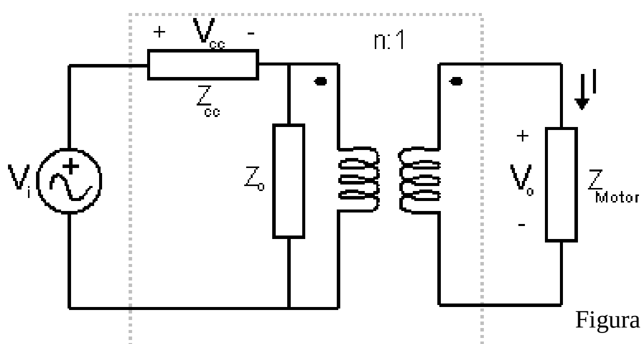


Figura 3

$$v_i(t) = \sqrt{2}.1000\sin(wt)\,\text{V}$$
$$w = 100p \ \text{rad}/\text{s}$$
$$n = 10/4$$
$$Z_{Motor} = (4+2\text{j})\Omega$$

i) Se sabe que las impedancias Z_{cc} y Z_0 valen $Z_{cc} = (6 + j12)\,\Omega$ y $Z_0 = j18\,\Omega$ a 60 Hz. Hallar las respectivas impedancias a 50 Hz.

ii) Hallar los fasores de corriente y tensión por el motor (I, V_o) y de tensión en Z_{cc} (V_{cc}). Ubicarlos en un diagrama fasorial junto al fasor de la fuente.

iii) Los datos del transformador indican que posee una corriente nominal por el secundario de I_{nom}=35A y en caso de excederla se limita la vida útil del mismo. Mostrar que en estas condiciones el transformador se encuentra sobrecargado y hallar el porcentaje de carga (I/I_{nom})x100%.

c) Para solucionar el problema de la sobrecarga se decide conectar un segundo transformador **idéntico** al primero en paralelo como se muestra en la figura 4.

i) Mostrar que en este caso no hay sobrecarga en ninguno de los transformadores calculando ambos porcentajes de carga de corriente por el secundario.

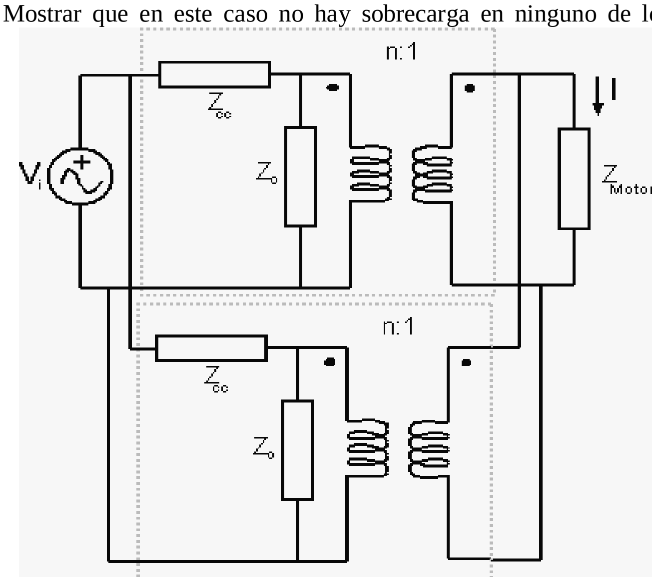


Figura 4

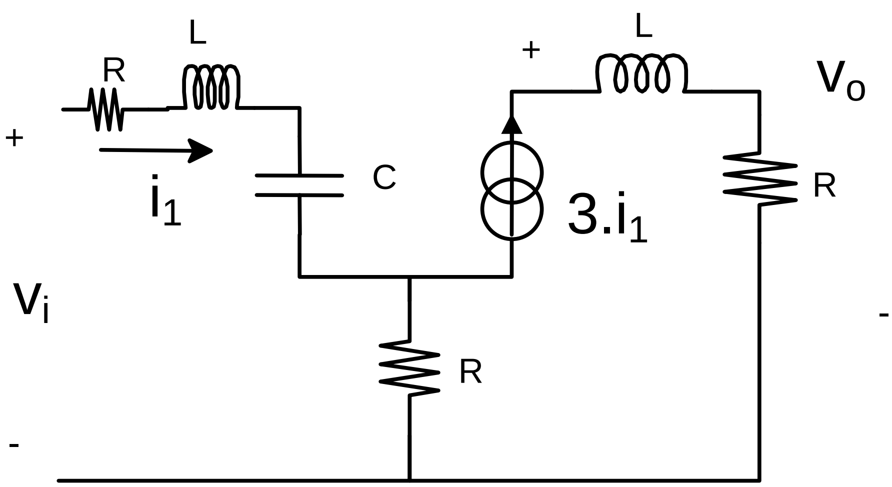
Sugerencia: para el cálculo de las corrientes, generalizar el resultado verificado en la parte a).

ii) Dar la expresión temporal para la corriente I en estas condiciones.

iii) Se desea realizar **una compensación local** de reactiva conectando un condensador en bornes del motor (en paralelo a Z_{Motor}). Hallar el valor de dicho condensador.

Ejercicio 2

a) En el circuito de la figura hallar la transferencia $H(j.w) = \dfrac{V_0(j.w)}{V_i(j.w)}$



b) Sabiendo que $w_0 = \dfrac{1}{RC} = \dfrac{R}{L}$, realizar los diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase de la transferencia de la parte anterior. **Explicar claramente cómo los construye**.

c) De los diagramas de Bode y la expresión de *H:*:

- **i)** Determinar la frecuencia a la cual *H(jw)* es real.
- **ii)** Hallar el módulo de *H(jw)* a esa frecuencia.
- **iii)** Ubicar en el diagrama de módulo el valor real de $H(jw_0)$.
- **iv)** En w_0, calcular la distancia exacta en decibeles entre el valor real y el asintótico.
- **v)** Bosquejar el diagrama real de módulo.

Examen de Sistemas Lineales 1
10 de febrero del 2005

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

a) Comentar cómo resolvería el siguiente problema: hallar una función f de clase C^2 tal que la distribución asociada $T_{Y.f}$ satisfaga la ecuación diferencial en distribuciones $DT_{Y.f} = \sum_{j=0}^{2} c_j . d^{(j)}$, siendo c_1 y c_2 números reales cualesquiera y D un operador diferencial lineal normalizado de segundo orden.

b) Resolver en D'_+: $T''+2T'+T = d + d'$.

Pregunta 2

a) Definir la noción de convergencia en distribuciones.

b) Mostrar que si $T_n \to T$ para $n \to \infty$, entonces $T'_n \to T'$.

c) Hallar $\lim_{n\to\infty} T_n$, siendo T_n la distribución asociada a la función h_n de la figura 1.

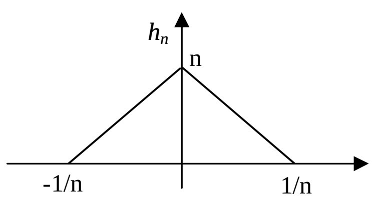


Figura 1

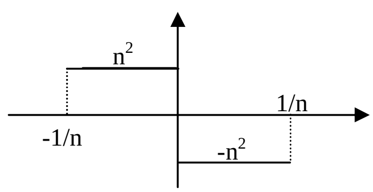


Figura 2

d) Deducir el límite de la sucesión de distribuciones de término genérico asociado a la función de la figura 2.

Pregunta 3

Consideremos la aplicación $S(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} d\left(t-nT\right)$ denominada Peine de Dirac , definida por $\left\langle S,j\right\rangle=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} j\,(nT)$.

a) Mostrar que *S* es una distribución bien definida. (Sugerencia: recordar la definición de distribución).
b) Mostrar que *S* es periódica y calcular la frecuencia fundamental.
c) Hallar la Serie de Fourier asociada a *S*.
d) Hallar la Transformada de Fourier de la función $e^{-j2p\,at}$, con $a > 0$.
e) Hallar la Transformada de Fourier de *S*.

Pregunta 4

Dada una impedancia de carga en régimen sinusoidal $Z = R + jX = \left|Z\right|e^{jj}$, con voltaje en bornes V_{ef} y corriente I_{ef} , se define el Vector Volt-Ampere o Potencia Compleja *S*, como $S = V_{ef}\,\overline{I_{ef}} = P + jQ$, en que P es la potencia activa y Q la potencia reactiva.

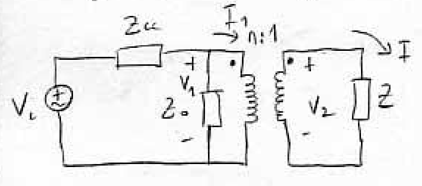
a) A partir de la definición de *S*, escribir P y Q en función de $R, X, \left|I_{ef}\right|$.
b) A partir de la definición de *S*, escribir P y Q en función de $R, X, \left|V_{ef}\right|$.
c) A partir de la definición de *S*, escribir P y Q en función de V_{ef}, I_{ef}, j .
d) Una carga conectada a $V_{ef} = 220V$ consume una potencia activa $P = 10kW$. ¿Qué rango puede tener j si la corriente no debe superar 100A eficaces?

SISTEMAS LINEALES 1: FEBRERO 2005

(1)

Ejercicio 1 :

(a) Para verificar la equivalencia calculo la corriente I para Z arbitrario en ambos casos y verifico son iguales.



Relaciones del transformador ideal: $V_1 = n V_2$

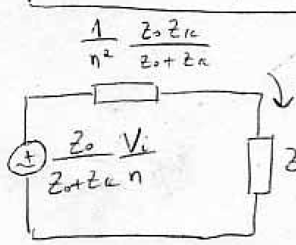
$n I_1 = I$.

Planteando el nudo en el primario: $\dfrac{V_i - V_1}{Z_{cc}} = \dfrac{V_1}{Z_o} + I_1$

En el secundario: $V_2 = Z I$

$$\Rightarrow \frac{V_i - nZI}{Z_{cc}} = \frac{nZI}{Z_o} + \frac{I}{n} \quad \Rightarrow V_i = I\left[nZ\left(1 + \frac{Z_{cc}}{Z_o}\right) + \frac{Z_{cc}}{n}\right]$$

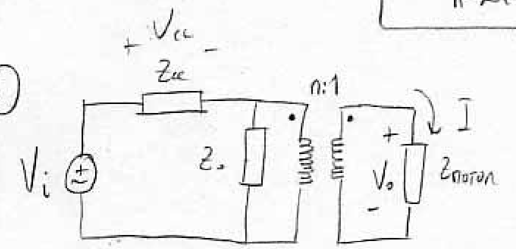
$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{n Z_o V_i}{n^2 Z (Z_o + Z_{cc}) + Z_o Z_{cc}}}$$



$$I = \frac{\frac{Z_o}{Z_o + Z_{cc}}\left(\frac{V_i}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n^2}\right)\frac{Z_o Z_{cc}}{Z_o + Z_{cc}} + Z} = \frac{n Z_o V_i}{Z_o Z_{cc} + Z n^2 (Z_o + Z_{cc})},$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{n Z_o V_i}{n^2 Z (Z_o + Z_{cc}) + Z_o Z_{cc}}}$$ igual que antes como se quería.

(b)



$v_i(t) = \sqrt{2}\, 1000 \sin(\omega t)\, V$

$\omega = 100\pi$ rad/s

$n = 10/4$

$Z_{motor} = (4 + 2j)\,\Omega$

(i) $Z_{cc} = (6 + j12)\,\Omega$

@ 60Hz

$Z_o = j10\,\Omega$

Debo corregir las impedancias a 50Hz $\Rightarrow Z_{cc} = (6 + j\, 12 \frac{50}{60})\,\Omega \Rightarrow \boxed{Z_{cc} = (6 + j\,10)\,\Omega}$

$Z_o = j\, 18 \cdot \frac{50}{60}\,\Omega \Rightarrow \boxed{Z_{cc} = j\,15\,\Omega}$

2

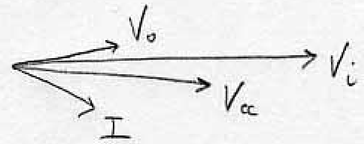
(ii) Utilizo el resultado de la parte ⓐ $V_i = 1000V\angle 0°$

$$I = \frac{n\, Z_o\, V_i}{n^2 Z_{rotor}(Z_o+Z_{cc})+Z_o Z_{cc}} \Rightarrow \boxed{I = (41-16j)A = 44{,}1A\angle -21{,}6°}$$

$$V_o = Z_{rotor}\, I \Rightarrow \boxed{V_o = (196{,}7+17{,}1j)V = 197{,}4V\angle 5°}$$

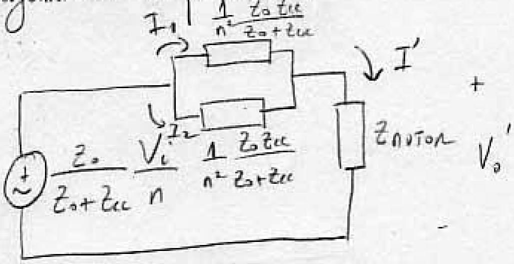
$V_i = V_{cc} + V_1$ donde V_1 es el voltaje en el primario del transformador ideal.

$$\Rightarrow V_i = V_{cc} + nV_o \Rightarrow V_{cc} = V_i - nV_o \Rightarrow \boxed{V_{cc} = (508 - j42{,}9)V = 510V\angle -5°}$$



(iii) $|I| > I_{nom}$ y el transformador está sobrecargado $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Carga} = 126\%}$

ⓒ (i) Utilizo de nuevo el equivalente visto del secundario de la parte ⓑ, pero para los transformadores en paralelo:



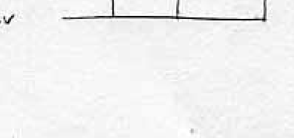
$$I' = \frac{\frac{Z_o}{Z_o+Z_{cc}}\left(\frac{V_i}{n}\right)}{Z_{rotor} + \left(\frac{1}{2n^2}\right)\frac{Z_o Z_{cc}}{Z_o+Z_{cc}}} = 48A\angle -17{,}7°$$

$$I_1 = I_2 = \frac{\frac{Z_o}{Z_o+Z_{cc}}\frac{V_i}{n} - V_o'}{\left(\frac{1}{n^2}\right)\frac{Z_o Z_{cc}}{Z_o+Z_{cc}}} = 24A\angle -17{,}6°$$

Ambos transformadores se cargan igual $\boxed{\text{Carga} = 69\%}$

(ii) $\boxed{i(t) = \sqrt{2}\; 48 \sin(\omega t - 17{,}7°)\; A}$

(iii)



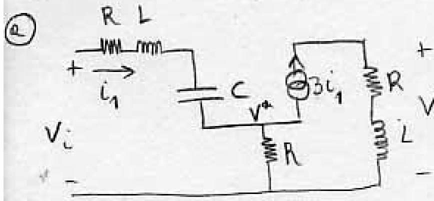
Debo imponer Z_v resistiva. Es más cómodo verlo en admitancias. $\Rightarrow G_{rotor} = \frac{1}{R} - j\frac{1}{X}$

$$\Rightarrow G_v = Cj\omega + \frac{1}{R} - j\frac{1}{X} \Rightarrow C = \frac{1}{X\omega} \Rightarrow \boxed{C = 318\mu F}$$

Ejercicio 2:

3

a)



$V_o = 3i_1(R+Lj\omega) \Rightarrow i_1 = \dfrac{V_o}{3(R+Lj\omega)}$

Planteando la ecuación de nudos: $i_1 = \dfrac{V^*}{R} + 3i_1 \Rightarrow V^* = -2Ri_1$

Calculando i_1: $i_1 = \dfrac{V_i + 2Ri_1}{R + Lj\omega + \dfrac{1}{Cj\omega}}$

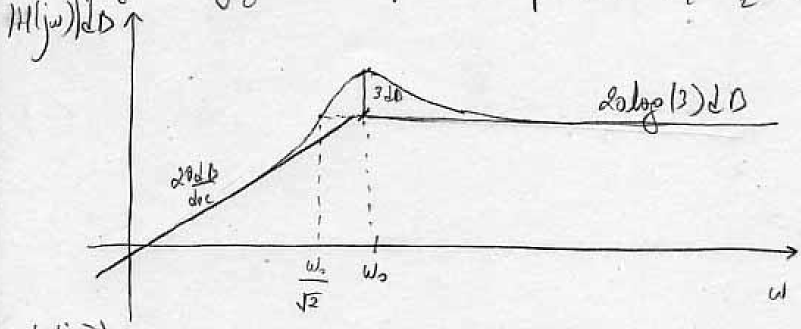
Eliminando i_1 y operando resulta: $V_i = V_o \dfrac{[LC(j\omega)^2 - RC j\omega + 1]}{3Cj\omega[R+Lj\omega]} \rightarrow \boxed{H(j\omega) = \dfrac{3j\omega\left(j\omega + \frac{R}{L}\right)}{(j\omega)^2 - \frac{R}{L}j\omega + \frac{1}{LC}}}$

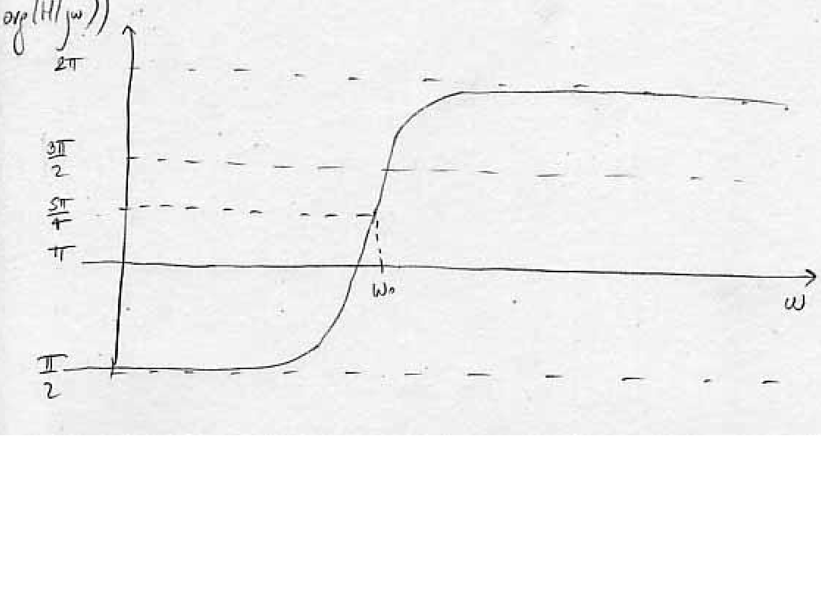
b) $\omega_o = \dfrac{1}{RC} = RL \Rightarrow H(j\omega) = \dfrac{3j\omega(j\omega+\omega_o)}{(j\omega)^2 - j\omega\omega_o + \omega_o^2}$ Polos complejos conjugados con: $\xi = -\dfrac{1}{2}$, $\omega_n = \omega_o$

Para $\omega \ll \omega_o \Rightarrow H(j\omega) \simeq \dfrac{3j\omega}{\omega_o} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq 20\log\left(\frac{3}{\omega_o}\right) + 20\log\omega \ dB \\ \arg(H(j\omega)) \simeq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Para $\omega \gg \omega_o \Rightarrow H(j\omega) \simeq 3 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq 20\log(3) \ dB \\ \arg(H(j\omega)) \simeq 2\pi \end{cases}$

Notar que se tiene un adelanto de fase de $\frac{3\pi}{2}$ en ω_o (de $\frac{\pi}{2}$ a 2π). Esto se debe a que el adelanto de $\frac{\pi}{2}$ que introduce el cero en $-\omega_o$ se suma al adelanto de π introducido por los polos complejos conjugados de parte real positiva ($\xi = -\frac{1}{2} < 0$)





c) (i) Impongo $H(j\omega) = \alpha \in \mathbb{R}$ a la frecuencia buscada. (4)

$\Rightarrow \alpha[\omega_0^2 - \omega^2 - j\omega\omega_0] = 3[j\omega\omega_0 - \omega^2]$

Igualando partes imaginarias : $-\alpha\omega\omega_0 = 3\omega\omega_0 \Rightarrow \alpha = -3$

Igualando partes reales : $\alpha(\omega_0^2 - \omega^2) = -3\omega^2 \Rightarrow \omega_0^2 = 2\omega^2 \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}}$

(ii) $H(j\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}) = -3 \Rightarrow \boxed{|H(j\omega)|_{dB} = 20\log(3)\,dB}$

(iii) $H(j\omega_0) = -3(1+j) \Rightarrow \boxed{H(j\omega_0) = 3\sqrt{2} \angle \frac{5\pi}{4}}$

(iv) En $\omega_0 \Rightarrow |H(j\omega_0)|_{real} = 20\log(3)\,dB + 3\,dB$

$|H(j\omega_0)|_{asintótico} = 20\log(3)\,dB$

$\Rightarrow$ Distancia $= |H(j\omega_0)|_{real} - |H(j\omega_0)|_{asintótico} \Rightarrow \boxed{\text{Distancia} = 3\,dB}$