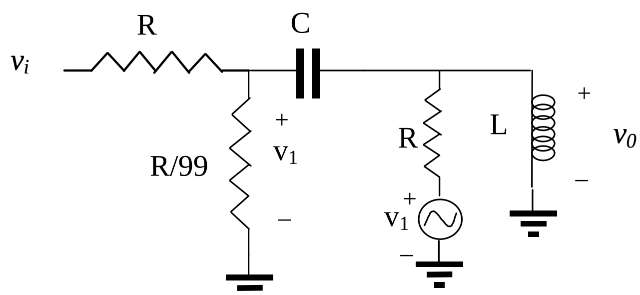
Examen de Sistemas Lineales 1
28 de enero del 2003

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo y al menos dos preguntas completas. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. En las preguntas teóricas, se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Ejercicio 1

1) En el circuito de la figura obtener la transferencia $H(jw)=\dfrac{V_o(jw)}{V_i(jw)}$, donde $RC=100\dfrac{L}{R}=t$.

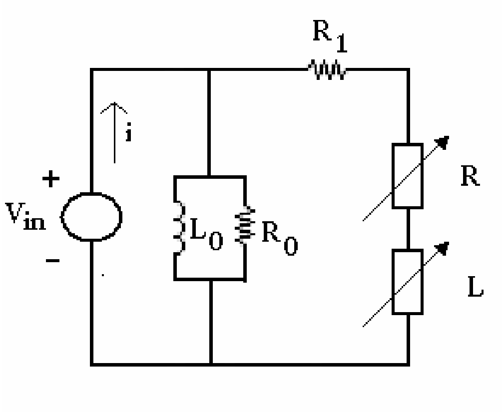


2) Realizar los diagrama de bode asintóticos de $H(jw)$ y bosquejar los reales.
3) a) Utilizando los Diagramas asintóticos, obtener la frecuencia angular w_0 a la cual la transferencia $H(jw_0)$ es imaginaria pura.

   b) Hallar la frecuencia angular w_0 exacta a la cual $H(jw_0)$ es imaginaria pura.

Ejercicio 2

En el circuito de la figura R y L son variables de acuerdo con el punto de funcionamiento.



$V_{in} = 220\sqrt{2}\cos(100p\, t)$
L_0=1 Hy
R_0=220 Ohms
R_1=1,2 Ohms

a) i) Para un determinado punto de funcionamiento se conoce la $P = 2500W$ (potencia activa) y $Q = 100Var$ (potencia reactiva) consumida a la fuente. Hallar el valor de los parámetros R y L en ese punto de funcionamiento.

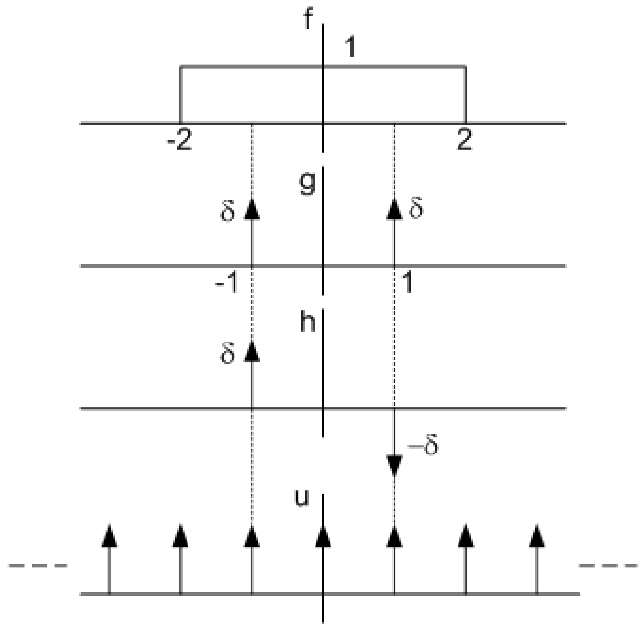
ii) Realizar un diagrama fasorial que involucre a V (fasor de tensión de entrada) e I (fasor de corriente de entrada), indicando módulos y desfasajes.

iii) Ubicar en el diagrama fasorial el lugar geométrico de todos los puntos de funcionamiento (considerando la variación de I) en donde se consume la misma potencia activa, teniendo en cuenta que $L \geq 0$. Justificar debidamente.

b) Se da un nuevo punto de funcionamiento mediante $P = 2500W$ (potencia activa consumida a la fuente de entrada) e $|I| = 15A$ (módulo del fasor de corriente de entrada):

i) Calcular el factor de potencia en ese punto de funcionamiento y anular la potencia reactiva; indicar qué elemento se va a colocar, el valor del mismo y dónde lo colocaría.
ii) Hallar en nuevo valor de los parámetros L y R para el nuevo punto de funcionamiento.
iii) Hallar los fasores I (fasor de corriente de entrada), I_0 (fasor de corriente por la rama 0) e I_1 (fasor de corriente por la rama 1), y relacionarlos mediante un diagrama fasorial.
iv) Hallar las expresiones temporales de $i(t)$ e $i_0(t)$.

Pregunta 1



Dadas las distribuciones f, g, h, u, indicadas en la figura, dibujar:

1) $f*h$
2) $f'*g$
3) $f*g'$
4) $g*u$
5) $h*u$

Justificar la relación entre los resultados de 2) y 3).

Pregunta 2

1) Expresar la condición N y S para que una distribución *T* cumpla: $t.T(t) = 0$

2) Sea *U* una distribución temperada asociada a una función infinitamente diferenciable y sea *V* una distribución temperada cualquiera. A partir de la identidad $F[S*T]=F[S].F[T]$, válida para *T* y *S* distribuciones temperadas cualesquiera, y válida también para la Transformada Conjugada de Fourier, probar que se cumple la identidad:

$$F[\mathrm{U.V}] = F[\mathrm{U}] * F[\mathrm{V}]$$

3) Calcular $F[t]$ (Sugerencia: Partir de $F[1]$ y aplicar teoremas de derivación).

4) Verificar que si $t.T(t) = 0$, la relación $F[t.T] = F[t] * F[T]$, conduce a un resultado coherente con la condición de la parte 1).

Pregunta 3

a) Definir precisamente el concepto de **fasor**.
b) Deducir las *impedancias complejas* asociadas a las componentes básicas de un circuito eléctrico - resistencia, condensador y bobina- funcionando en régimen sinusoidal.
c) Definir la *potencia instantánea* y a partir de ella la *potencia media* de una componente en régimen sinusoidal.
d) Deducir una expresión fasorial para la potencia media.

Pregunta 4

Consideremos el Diagrama de Bode de módulo de la transferencia $H(jw) = \dfrac{1}{jw+1}$.

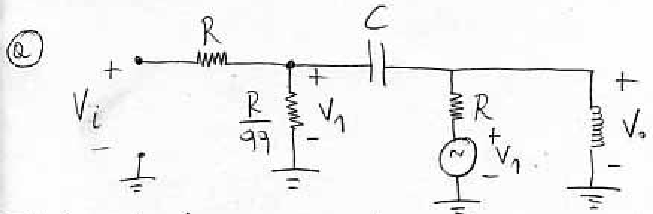
a) Deducir la distancia en decibeles entre el Diagrama asintótico y el real en las siguientes frecuencias:
   i) $\omega=1$;
   ii) $\omega=0.1$;
   iii) $\omega=100$;

b) Hallar la salida $v_o(t)$ en régimen para la entrada $v_i(t)=cos(t+p/6)$.

SISTEMAS LINEALES 1: Febrero 2003 (1)

Ejercicio 1:

a)



$RC = 100\frac{L}{R} = \tau = \frac{1}{\omega_0}$

Planteando las ecuaciones de nudo:

$$\frac{V_i - V_1}{R} = \frac{99V_1}{R} + Cj\omega(V_1 - V_0) \Rightarrow \frac{V_i}{R} = V_1\left(\frac{100}{R} + Cj\omega\right) - Cj\omega V_0$$

$$Cj\omega(V_1 - V_0) = \frac{V_0 - V_1}{R} + \frac{V_0}{Lj\omega} \Rightarrow V_1\left(\frac{1}{R} + Cj\omega\right) = V_0\left(Cj\omega + \frac{1}{R} + \frac{1}{Lj\omega}\right)$$

$$V_1 = \frac{V_0}{(RCj\omega + 1)} \frac{(RLC(j\omega)^2 + Lj\omega + R)}{Lj\omega} \Rightarrow V_i = V_0 \frac{(100 + RCj\omega)(RLC(j\omega)^2 + Lj\omega + R) - RLC(j\omega)^2(RCj\omega + 1)}{(RCj\omega + 1)Lj\omega}$$

Operando, $\frac{V_0}{V_i} = \frac{(RCj\omega + 1)Lj\omega}{100RLC(j\omega)^2 + (100L + R^2C)j\omega + 100R} \Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{1}{100}\frac{j\omega(j\omega + \omega_0)}{(j\omega)^2 + 2\omega_0 + 100\omega_0^2}}$

b) $H(j\omega) = \frac{1}{100}\frac{j\omega(j\omega + \omega_0)}{(j\omega)^2 + 2\omega_0 j\omega + (10\omega_0)^2}$

En el denominador tengo raíces complejas conjugadas con $\omega_n = 10\omega_0$, $\xi = \frac{1}{10} < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ hay pico de resonancia.

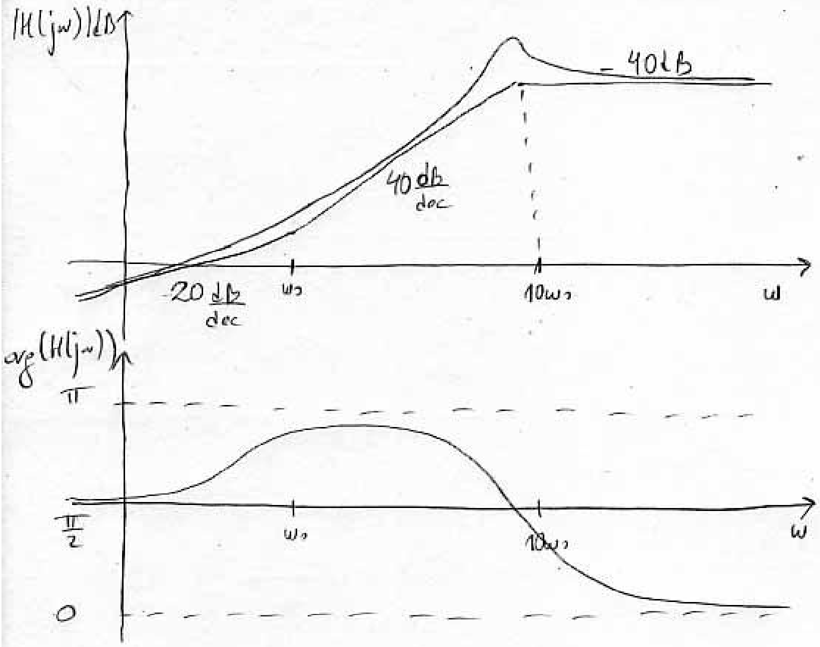
Para $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \approx \frac{j\omega}{10^4\omega_0} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq -20\log(10^4\omega_0) + 20\log\omega \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) \simeq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Para $\omega_0 \ll \omega \ll 10\omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \simeq \frac{-\omega^2}{10^4\omega_0^2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq -20\log(10^4\omega_0^2) + 40\log\omega \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega))_{dB} \simeq \pi \end{cases}$

Para $\omega \gg 10\omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \simeq \frac{1}{100} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| \simeq -40 \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) \simeq 0 \end{cases}$

Se tiene un retardo de fase de π ya que los polos complejos conjugados tienen parte real negativa.

(2)



(c)(i) De los diagramas asintóticos se observa que $H(j\omega)$ es imaginaria pura $\left(\arg\{H(j\omega)\} = \frac{\pi}{2}\right)$ para $\omega' = 10\omega_0$.

(ii) Para el cálculo de la frecuencia exacta imponemos que a la frecuencia ω':

$$H(j\omega') = \alpha j = \frac{1}{100}\,\frac{j\omega'\omega_0 - \omega'^2}{100\omega_0^2 - \omega'^2 + 2j\omega_0\omega'} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (100\omega_0^2 - \omega'^2)\alpha j - 2\alpha\omega_0\omega' = \frac{1}{100}(\omega'\omega_0 j - \omega'^2)$$

Igualando partes reales: $-2\alpha\omega_0 = \frac{-\omega'}{100} \Rightarrow \alpha = \frac{\omega'}{200\omega_0}$

Igualando partes imaginarias: $(100\omega_0^2 - \omega'^2)\alpha = \frac{1}{100}\omega'\omega_0$

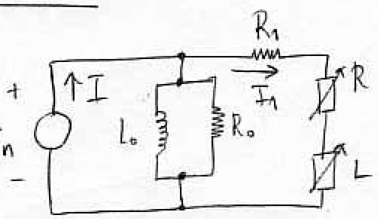
$$\Rightarrow 100\omega_0^2 - \omega'^2 = 2\omega_0^2 \Rightarrow \omega'^2 = 98\omega_0^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega' = \sqrt{98}\,\omega_0} \approx 10\omega_0$$

3

Ejercicio 2:

(a) (i)



$V_{in}(t) = 220\sqrt{2}\cos(100\pi t)$

$L_0 = 1\,Hy$

$R_0 = 220\,\Omega$

$R_1 = 1{,}2\,\Omega$

Punto de operación en $P = 2500\,W$, $Q = 100\,Var$

$$I_1 = \frac{V_{in}}{R_1 + R + Lj\omega} \Rightarrow |I_1| = \frac{|V_{in}|}{\sqrt{(R_1+R)^2 + (L\omega)^2}}$$

$$P = \frac{|V_{in}|^2}{R_0} + (R_1+R)\frac{|V_{in}|^2}{(R_1+R)^2 + (L\omega)^2} \Rightarrow P_{RAMA\,1} = \frac{(R_1+R)|V_{in}|^2}{(R_1+R)^2 + (L\omega)^2} = 2280\,W$$

$$Q = \frac{|V_{in}|^2}{L_0\omega} + L\omega\frac{|V_{in}|^2}{(R_1+R)^2 + (L\omega)^2} \Rightarrow Q_{RAMA1} = L\omega\frac{|V_{in}|^2}{(R_1+R)^2 + (L\omega)^2} = -54{,}1\,Var$$

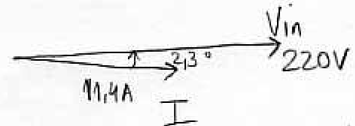
Siendo $Q_{RAMA1} < 0$, notamos que $L < 0$ correspondiente a un condensador de valor $C = \frac{-1}{L\omega^2}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones no lineales se obtiene: $L = -1{,}6 \times 10^{-3}$

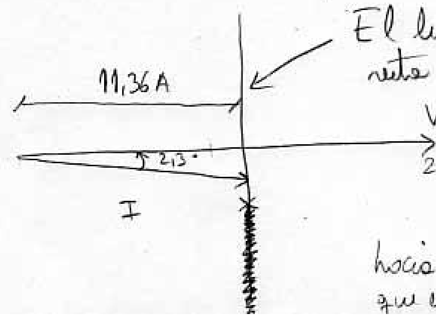
$\Rightarrow \boxed{C = 6{,}3\,mF}$, $\boxed{R = 20\,\Omega}$

(ii) $Z_{eq} = R_0 \| L_0 j\omega \| (R_1 + R + Lj\omega) \Rightarrow Z_{eq} = (19{,}3 + j0{,}77)\,\Omega$

$I = \frac{V_{in}}{Z_{eq}}$ con $V_{in} = 220V\angle 0^\circ \Rightarrow \boxed{I = (11{,}37 - j0{,}454)A = 11{,}4A\angle -2{,}3^\circ}$



(iii) $P = |V_{in}||I|\cos\varphi$ y como $|V_{in}|$ es constante, $|I|\cos\varphi$ debe ser constante. Pero $|I|\cos\varphi$ es la proyección de I en fase con V_{in}. $\frac{P}{|V_{in}|} = 11{,}36\,A$



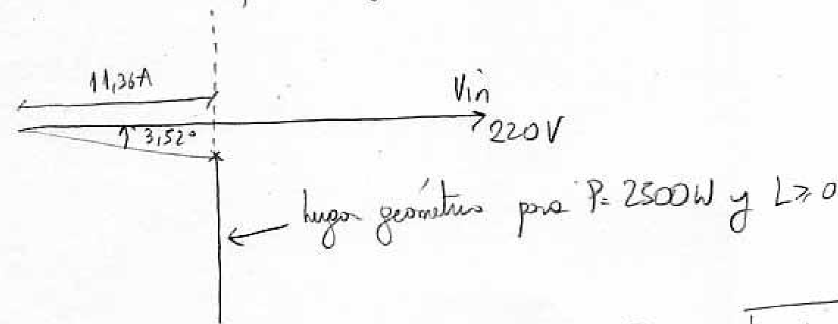
El lugar geométrico está contenido en esta recta. La recta es el lugar geométrico para $L \in \mathbb{R}$. Para $L \geq 0$ se que debería ser a partir de un punto X y para hacia abajo (carga inductiva). Notar que el punto de trabajo actual tendrá $L < 0$

(4)

Calculemos x. Sea $L = 0$

$$\Rightarrow P = 2500W = \frac{|V_{in}|^2}{R_0} + \frac{|V_{in}|^2}{R_1 + R} \Rightarrow \boxed{R = 20{,}2\Omega}$$

$$\Rightarrow Z_{eq}' = R_0 \| L_j\omega \| (R_1 + R) \Rightarrow Z_{eq} = (19{,}3 + j\,1{,}18\Omega)\,\Omega = 19{,}3\Omega \angle 3{,}52°$$



(b) (i) $P = 2500W$ e $|I| = 15A \Rightarrow P = |V_{in}||I|\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{P}{|V_{in}||I|} \Rightarrow \boxed{\cos\varphi = 0{,}757}$

$Q = |V_{in}||I|\sin\varphi \Rightarrow Q = 2154\,Var$

Conecto un condensador en paralelo tal que entregue la potencia reactiva consumida a la fuente: $-Q_C + Q = 0 \Rightarrow -(\omega|V_{in}|)^2 + Q = 0 \Rightarrow C = \frac{Q}{|V_{in}|^2\omega}$, $\boxed{C = 141\mu F}$

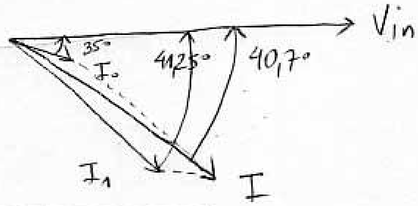
(ii) Con un razonamiento análogo al de la parte (a)(i) para $P = 2500W$ y $Q = 2154\,Var$

$\Rightarrow \boxed{L = 33{,}5\,mHy}$, $\boxed{R = 10{,}8\Omega}$

(iii) $I_0 = \frac{V_{in}}{R_0 \| L_0 j\omega} \Rightarrow \boxed{I_0 = (1 - 0{,}7j)A = 1{,}22A \angle -35°}$

$I_1 = \frac{V_i}{R_1 + R + L'j\omega} \Rightarrow \boxed{I_1 = (10{,}36 - 9{,}08j)A = 13{,}8A \angle -41{,}25°}$

$I = I_1 + I_0 \Rightarrow \boxed{I = (11{,}36 - 9{,}78j)A = 15A \angle -40{,}7°}$



(iv) $$\boxed{\begin{array}{l} i(t) = \sqrt{2}\,15A\cos(\omega t - 0{,}71) \\ i_0(t) = \sqrt{2}\,1{,}22A\cos(\omega t - 0{,}61) \end{array}}$$