Examen de Sistemas Lineales 1
15 de diciembre del 2003

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente.

Ejercicio 1

En numerosas situaciones, es deseable que en cierta etapa de transformación se cambien los niveles de tensión en una pequeña cantidad. En estas circunstancias, es demasiado costoso elaborar un transformador con devanados independientes dimensionados para casi el mismo voltaje. Por lo tanto, para este fin suele usarse un transformador conectado de manera particular, obteniéndose el denominado *auto transformador*, que se muestra en la Figura 1. **Las bobinas de la figura funcionan como un transformador ideal.**

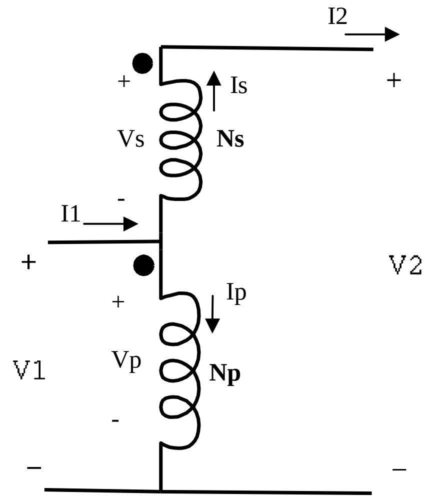


Figura 1

a) Para el auto transformador de la Figura 1:
   i) Hallar la relación entre las tensiones en el primario y secundario V_1 y V_2, en función de *Ns* y *Np*. De manera similar, hallar la relación entre las corrientes en el primario y el secundario, I_1 y I_2.
   ii) Si *Np=120*, hallar *Ns* para que la relación de elevación de tensiones, $\frac{V_2}{V_1}$, sea de 1.1. **Estos valores para las relaciones de vueltas se mantendrán para el resto del problema.**

b) Se conecta una carga en bornes del secundario como se muestra en la Figura 2 donde:

$$w = 100p$$
$$R = 100\Omega$$
$$C = 50mF$$
$$L = 100mHy$$

   i) Calcular la impedancia vista Z_v.
   ii) ¿Es una impedancia inductiva o capacitiva? Si se conecta Z_v a una fuente sinusoidal, ¿esperaría que el fasor de corriente a través de Z_v adelante al fasor de tensión de la fuente? ¿o que lo atrase? **Justifique cualitativamente. mediante un diagrama fasorial.**

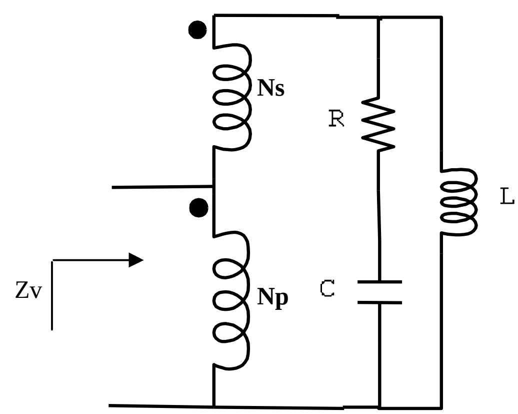


Figura 2

c) Se alimenta a Z_v con una fuente sinusoidal $v(t) = 220\sqrt{2}\cos(100pt)$.

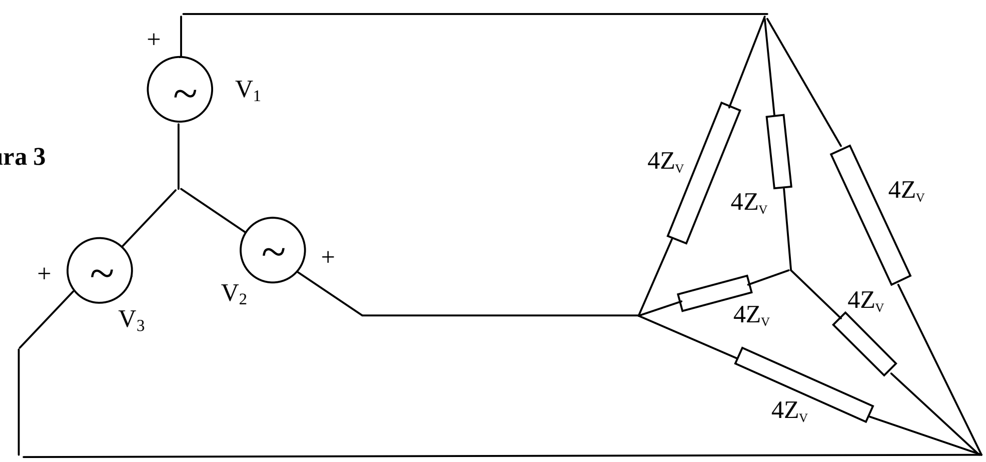
   i) Hallar el fasor de corriente I a través de la impedancia Z_v.

   ii) Calcular las potencias activa, reactiva y aparente consumidas a la fuente.

d) Para el sistema trifásico de la Figura 3 alimentado por el sistema de fuentes

$$v_1(t) = 220\sqrt{2}\cos(100pt)$$
$$v_2(t) = 220\sqrt{2}\cos\left(100pt + \frac{2p}{3}\right)$$
$$v_3(t) = 220\sqrt{2}\cos\left(100pt + \frac{4p}{3}\right)$$

Figura 3



   i) Hallar los fasores de corrientes de línea (I_1 , I_2 , I_3), y realizar un diagrama fasorial que involucre a I_1 , I_2 , I_3 y V_1 , V_2 , V_3.

   ii) Hallar las expresiones temporales de las corrientes de línea.

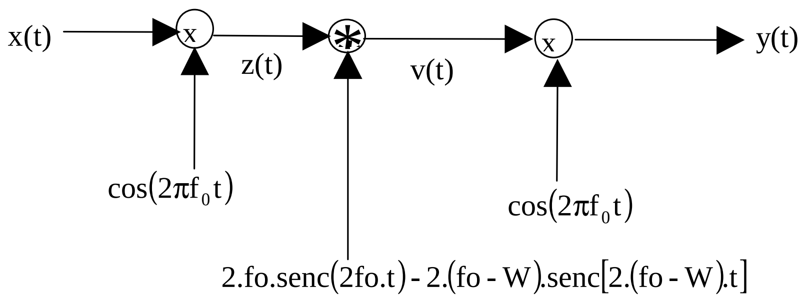
   iii) Calcular las potencias activa, reactiva y aparente consumidas al sistema de fuentes.

   iv) Realizar la compensación del factor de potencia del sistema de cargas mediante la conexión de tres componentes iguales y sin modificar la potencia activa entregada a la carga. Hallar el valor de las componentes e **indique claramente cómo las conectaría.**

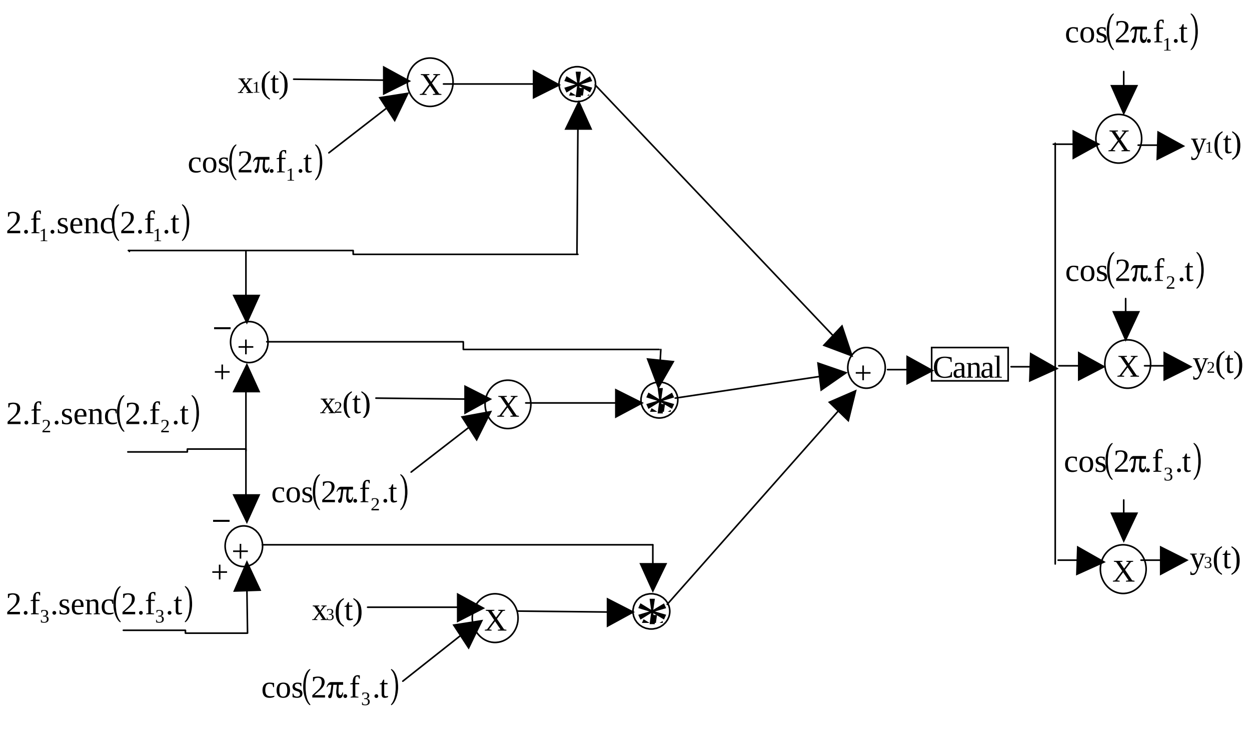
Ejercicio 2

a) Hallar la transformada de Fourier de $2.fo.senc(2fo.t) - 2.(fo - W).senc[2.(fo - W).t]$ y graficarla. Se cumple que $0 < W < fo$.

b) Dibujar los espectros de las señales z(t), v(t), y(t) en función del de x(t). Se cumple que $0 < W < fo$. Discutir según W_x, ancho de banda de la señal x(t), y W. Decir como haría para recuperar x(t) a partir de y(t) y en qué condiciones esto es posible.



c) Se quieren transmitir 3 señales, x_1 (t), x_2 (t), x_3 (t), de anchos de banda respectivos W_1, W_2, W_3, por un canal con un ancho de banda de 3 Mhz. Para ello se propone el esquema de la figura 2. Decir cuánto tienen que valer las f_i, i=1,2,3, y cuál es el ancho de banda máximo de las señales que se pueden transmitir si se quiere tener el mismo ancho de banda para las tres. Asumiremos que el canal es un pasabajos ideal con una frecuencia de corte de 3MHz.



d) Para las f_1, f_2 y f_3 halladas en la parte **c)**, calcular y dibujar la transformada de Fourier de la señal a la salida del canal si las entradas valen:

$$x_1(t) = sen(2p.f_0.t)$$
$$x_2(t) = \cos(4p.f_0.t) \qquad (f_0 = 0.3 \text{ MHz}).$$
$$x_3(t) = f_0.senc(f_0.t)$$

Examen de Sistemas Lineales 1
15 de diciembre del 2003

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

a) Enunciar una condición suficiente que deben cumplir los soportes de dos distribuciones S y T, para que exista su producto convolución. Justificar.

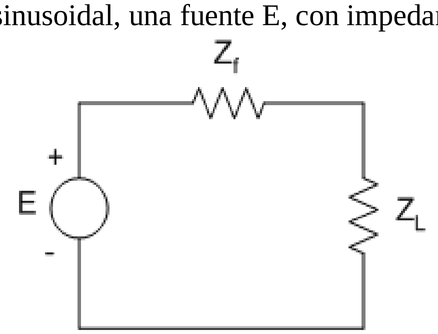
b) Describir un método gráfico para estimar el soporte del producto convolución R de dos distribuciones S y T . Para la descripción, se sugiere suponer que S y T son de soporte acotado

c) Hallar el soporte de R, si: $S = Y(t-2).Y(4-t)$
$T = Y(t+1).Y(1-t)$

d) Idem, si : $S = Y(t-2).Y(4-t)$
$T = Y(t-3).\mathrm{sen}\, t$

Pregunta 2

En régimen sinusoidal, una fuente E, con impedancia propia Z_f alimenta una carga Z_L.



$$\begin{cases} Z_f = R_f + jX_f \\ Z_L = R + jX \end{cases}$$

a) Calcular la potencia activa P en la carga Z_L en función de los datos del circuito.

Dados E y Z_f se desea hacer máxima dicha potencia P.

b) Escribir (sin necesidad de demostrar) la condición que debe cumplir Z_L

c) Si Z_L está restringida por la condición de tener fase constante (con lo que $X = kR$), hallar la condición que debe cumplir $|Z_L|$ para tener máxima P.

Pregunta 3

Dada la siguiente transferencia: $H(jw)=10w_0.\frac{(w_0+jw)}{(10w_0-jw).(w_0+j10w)}$,

a) Realizar los Diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase. Explicitar y justificar las aproximaciones realizadas y señalar en los Diagramas las abscisas, ordenadas y pendientes notables.

b) Hallar la distancia en db entre el Diagrama de Bode de módulo real y el asintótico a la frecuencia w_1, tres octavas por encima de la frecuencia $10w_0$. Para ello se pide:

- **i)** hallar el valor exacto $H_{ex}(jw_1)$.
- **ii)** hallar el valor aproximado $H_{apr}(jw_1)$ a partir de la aproximación asintótica.
- **iii)** hallar su distancia en db.

Pregunta 4

a) Sea *f* una función continua, diferenciable y periódica deperiodo *T*. **Deducir** la relación entre los coeficientes de Fourier de f, $c_n(f)$, y los de su derivada *f'*, $c_n(f')$.

b) Repetir la parte a) para el caso de una distribución periódica *U* de periodo *T*.

c) Sea *U* una distribución periódica de periodo *T*. **Deducir** la relación entre sus coeficientes de Fourier, $c_n(U)$, y los de la distribución $S(t)=U(t-t_0)$, siendo t_0 un real positivo.

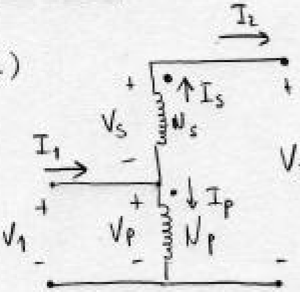
d) Consideremos una función real *f* periódica, de periodo *T*, de valor medio nulo y de potencia finita *P*. **Deducir**, **justificando**, la inecuación que permitiría determinar el mínimo número de primeros armónicos que aportan el 90% de la potencia de la señal.

SISTEMAS LINEALES 1: AGOSTO 2003

1

Problema 1:

a) (i)



Las ecuaciones del transformador ideal, con las polaridades indicadas son: $\frac{V_p}{N_p} = \frac{V_s}{N_s}$, $I_p N_p = I_s N_s$

Tenemos que: $V_2 = V_s + V_p = V_s + V_1 = V_1 \frac{N_s}{N_p} + V_1$:

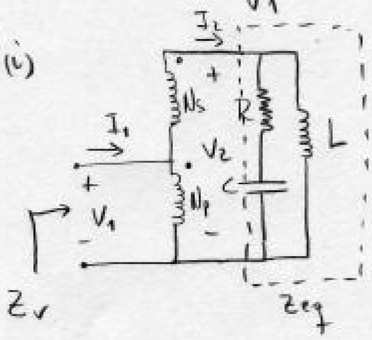
$\Rightarrow V_2 = V_1 \left(\frac{N_s + N_p}{N_p} \right) \Rightarrow \boxed{\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_s + N_p}{N_p}}$

Análogamente para las corrientes: $I_1 = I_p + I_s = I_p + I_2 = I_2 \frac{N_s}{N_p} + I_2$

$\Rightarrow I_1 = I_2 \left(\frac{N_s + N_p}{N_p} \right) \Rightarrow \boxed{\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_p}{N_s + N_p}}$

(ii) $N_p = 120$, $\frac{V_2}{V_1} = 1{,}1 = \frac{N_s + N_p}{N_p} \Rightarrow N_s = 0{,}1 N_p \Rightarrow \boxed{N_s = 12}$

b) (i)



$R = 100\Omega$
$L = 100 \text{ mHy}$
$C = 50 \mu F$
$\omega = 100\pi \frac{rad}{s}$

$Z_{eq} = \left(R + \frac{1}{C\omega j}\right) \| L\omega j$

$\Rightarrow Z_{eq} = (8{,}9 + 34{,}3 j)\Omega = 35{,}9\Omega \angle 75°$

$Z_v = \frac{V_1}{I_1}$ y $Z_{eq} = \frac{V_2}{I_2}$. Usando las relaciones halladas para el autotransformador se tiene que:

$V_1 = \frac{N_p}{N_s + N_p} V_2$, $I_1 = \frac{N_s + N_p}{N_p} I_2 \Rightarrow Z_v = \frac{V_1}{I_1} = \left(\frac{N_p}{N_s + N_p}\right)^2 Z_{eq}$

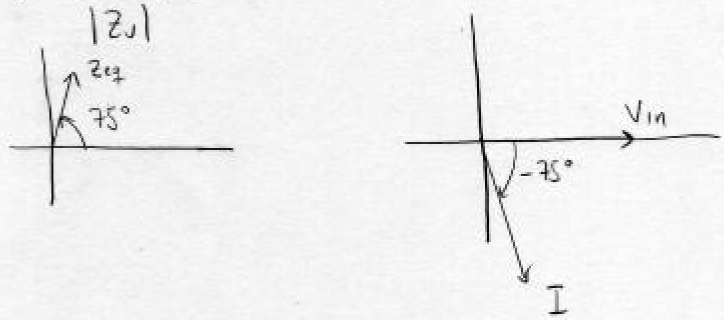
$\Rightarrow \boxed{Z_v = (7{,}4 + 28{,}3 j)\Omega = 29{,}3\Omega \angle 75°}$

2

(ii) La impedancia Z_v presenta una fase de 75°, comprendida entre 0 y 180° por lo que se trata de una carga inductiva:

Si conectamos una fuente cuyo fasor sea $V_{in} e^{j0}$ $\Rightarrow V_{in} = I Z_v = I|Z_v| e^{j\arg(Z_v)}$

$\Rightarrow I = \frac{V_{in}}{|Z_v|} e^{-j\arg(Z_v)}$



Vemos que el fasor corriente atrasa al fasor de tensión lo que vale para cualquier carga inductiva.

(c) (i) $V = 220\, e^{j0}$ (valores eficaces)

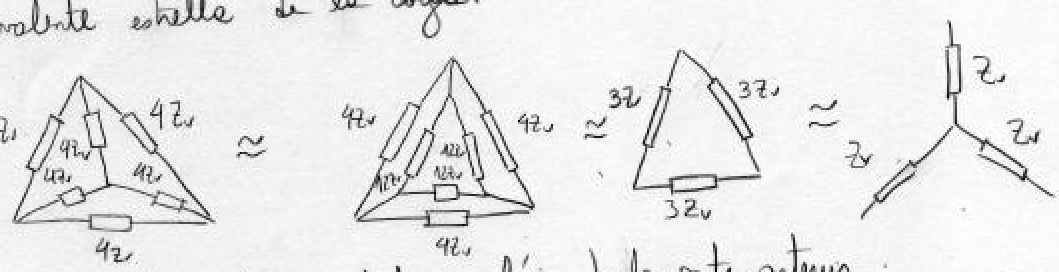
$\Rightarrow I = \frac{V}{Z_v} \Rightarrow \boxed{I = (1,9 - j\,7,3)A = 7,51A \angle -75°}$

(ii) $S = V I^* \Rightarrow S = 417 + j\,1599 \Rightarrow \boxed{|S| = 1652\,VA}$

$P = Re(S) \Rightarrow \boxed{P = 417\,W}$

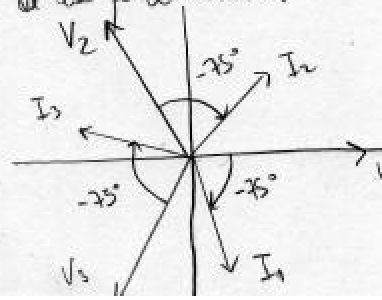
$Q = Im(S) \Rightarrow \boxed{Q = 1599\,Var}$

(d) (i) Transfigurando y calculando los paralelos resultantes, obtengo el equivalente estrella de la carga:



Por lo tanto, obtengo el equivalente monofásico de la parte anterior

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 &= 7,51A \angle -75° \\ I_2 &= 7,51A \angle -75°+120° \\ I_3 &= 7,51A \angle -75°+240° \end{aligned}}$$



3

(ii) $$\boxed{\begin{aligned} i_1(t) &= \sqrt{2}\cdot 7{,}51\cos(100\pi t - 1{,}316)\ A \\ i_2(t) &= \sqrt{2}\ 7{,}51\cos\left(100\pi t - 1{,}316 + \tfrac{2\pi}{3}\right) A \\ i_3(t) &= \sqrt{2}\ 7{,}51\cos\left(100\pi t - 1{,}316 + \tfrac{4\pi}{3}\right) A \end{aligned}}$$

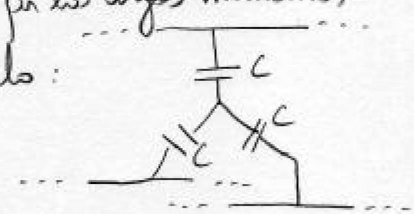
(iii) Las potencias en cada fase son iguales a las del sistema monofásico ya estudiado. Por lo tanto las potencias totales consumidas al sistema de fuentes son:

$$|S| = 3\,|S_{mono}| \Rightarrow \boxed{|S| = 4956\ VA}$$

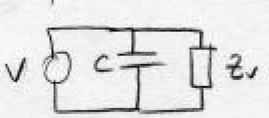
$$P = 3\,P_{mono} \Rightarrow \boxed{P = 1251\ W}$$

$$Q = 3\,Q_{mono} \Rightarrow \boxed{Q = 4797\ VAr}$$

(iv) Para compensar la potencia reactiva consumida por las cargas inductivas, conecto una estrella de condensadores en paralelo:



El equivalente monofásico resulta:



$$\Rightarrow Q_c + Q_{mono} = 0$$

$$C\omega|V|^2 = Q_{mono} \Rightarrow C = \frac{Q_{mono}}{\omega|V|^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{C = 105\,uF}$$

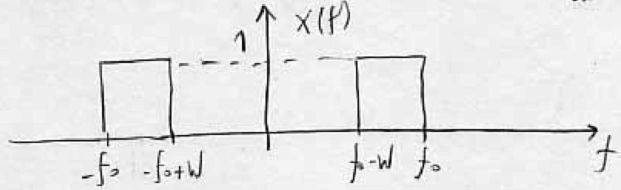
Ejercicio 2:

(4)

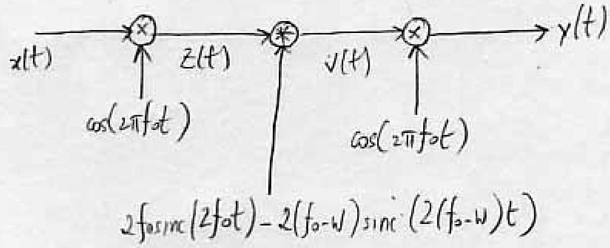
a) Sabemos que $\mathcal{F}[f_0 \,\text{sinc}(f_0 t)](f) = \Pi_{f_0}(f)$

$\Rightarrow \mathcal{F}[2f_0 \,\text{sinc}(2f_0 t) - 2(f_0-W)\,\text{sinc}(2(f_0-W)t)] = X(f) = \Pi_{2f_0}(f) - \Pi_{2(f_0-W)}(f)$, $f_0 > W$

El espectro resulta:

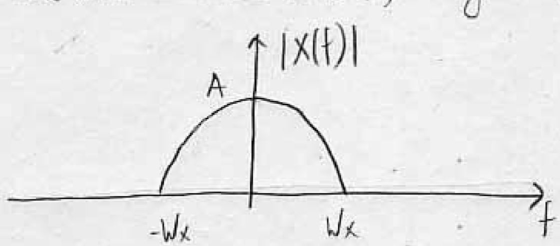


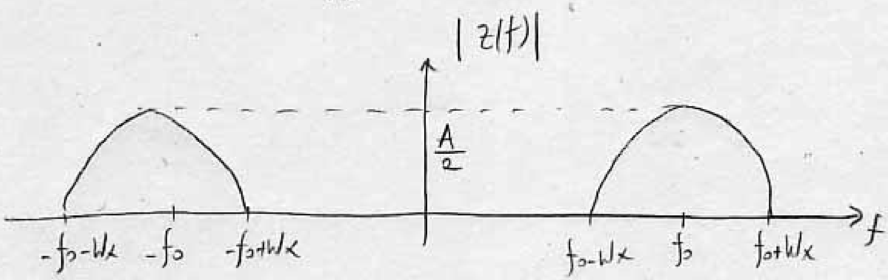
b)

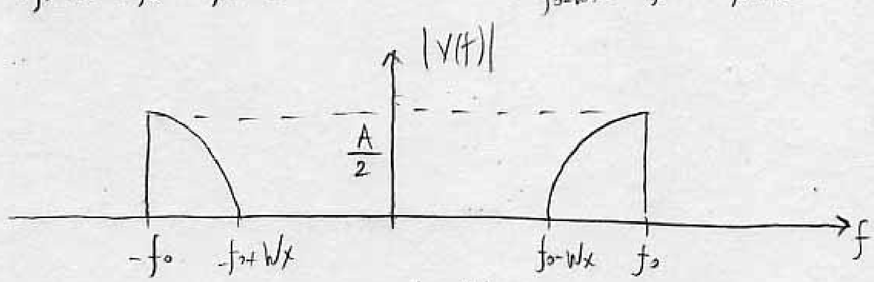


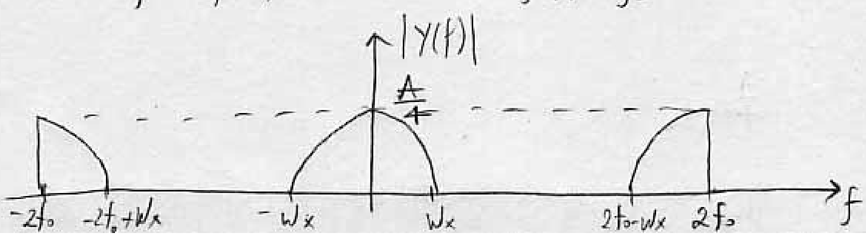
Discutimos según si W_x (ancho de banda de $x(t)$) es mayor o menor a W

$W_x < W$





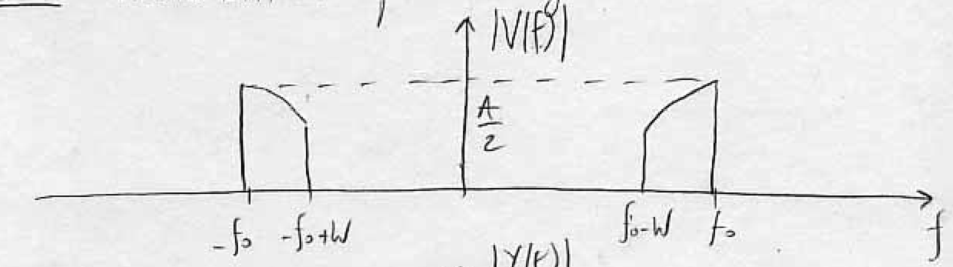


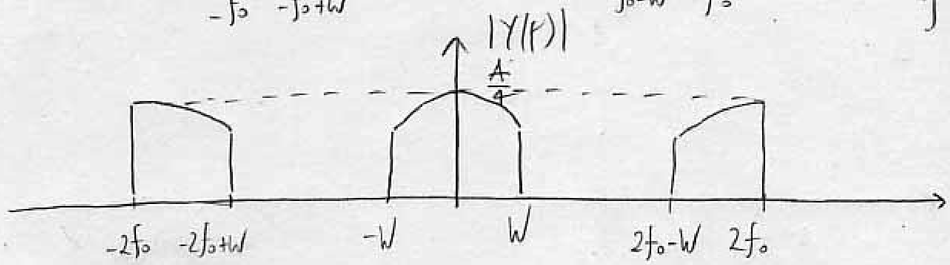


5

En estas condiciones puede recuperarse x(t) a partir de un filtrado pasobajos de y(t), la ganancia del filtro debe ser 4 y el ancho de banda W_x.

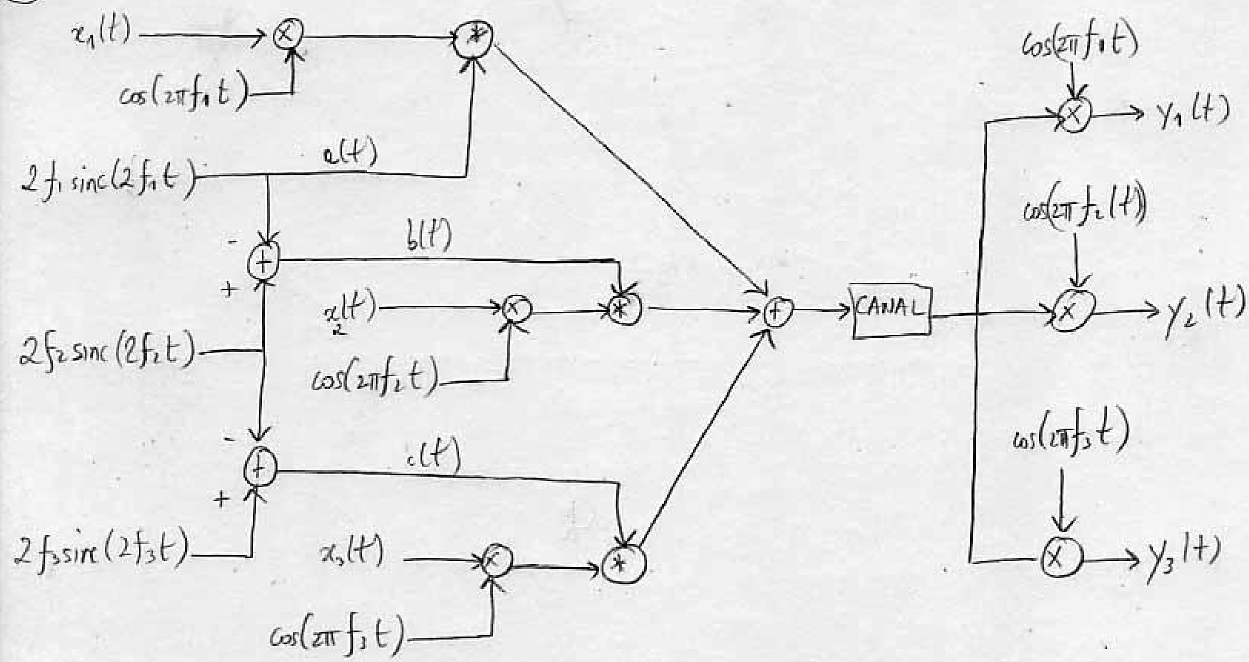
$W_x > W$ Hasta Z(f) los espectros son iguales.





En este caso no puede recuperarse x(t) a partir de y(t).

c



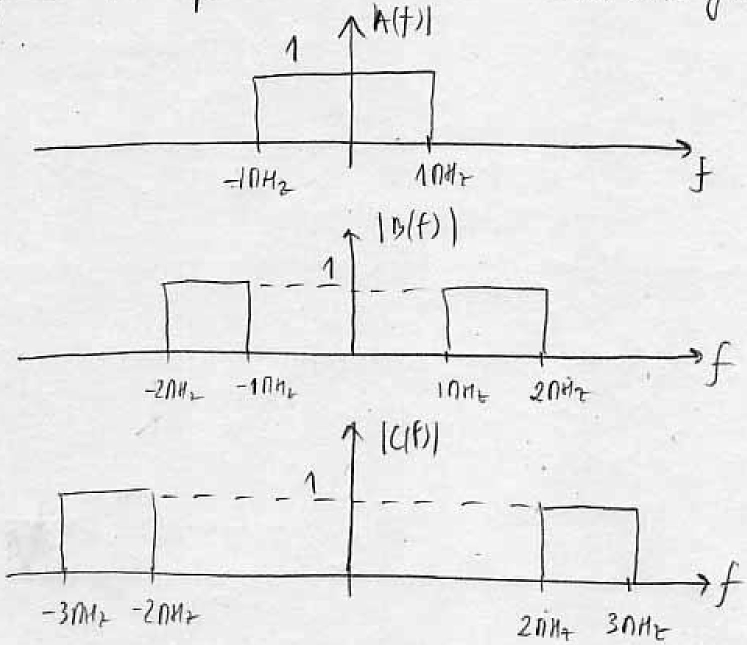
El ancho de banda del canal es de 3 MHz modelado como un pasobajos ideal. Basandonos en los resultados anteriores vamos a mostrar que se pueden transmitir tres señales de ancho de banda máximo 1 MHz

6

El método se basa en elegir f_1, f_2, f_3 de manera adecuada para crear tres "sub" canales dentro del canal total y luego modular las señales sobre esos "sub" canales para que no se solapen.

Elijo $\boxed{f_1 = 1\,MHz,\ f_2 = 2\,MHz \text{ y } f_3 = 3\,MHz}$

Veamos cómo quedan los espectros de las señales $a(t)$, $b(t)$ y $c(t)$ que generan estos "sub" canales.



Los cosenos primeros modulan las señales x_1, x_2 y x_3 dentro de sus respectivos canales. Luego se transmiten todos los mensajes por el canal de $3\,MHz$ y finalmente los cosenos demodulan cada señal original a banda base en y_1, y_2, y_3.

$\Rightarrow \boxed{W_{MAX} = 1\,MHz}$ En estas condiciones se pueden recuperar las señales originales filtrando y_1, y_2, y_3 con un pasabajos ideal de ganancia 4 y frecuencia de corte de $1\,MHz$

(1) $x_1(t) = \sin(2\pi f_0 t) \longrightarrow X_1(f) = \dfrac{\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)}{2j}$ $\qquad f_0 = 0{,}3\,MHz$

$x_2(t) = \sin(4\pi f_0 t) \longrightarrow X_2(f) = \dfrac{\delta(f-2f_0) + \delta(f+2f_0)}{2j}$

$x_3(t) = f_0 \operatorname{sinc}(f_0 t) \longrightarrow X_3(f) = P_{f_0}(f)$

7

El espectro de la señal transmitida por el canal resulta: