Examen de Sistemas Lineales 1
1º de agosto del 2002

Ejercicio 1

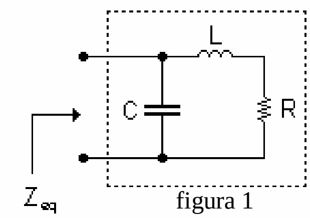


figura 1

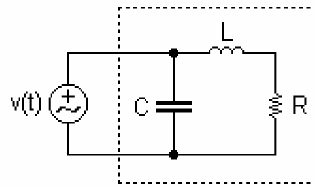


figura 2

$$v(t) = 220\sqrt{2}\,\text{sen}(100pt - p/6)$$
$$R = 22\Omega \qquad L = 120mHy \qquad C = 12mf$$

a) **i)** En la figura 1, hallar Z_{eq} en función de C, L y R.

ii) En la figura 2, hallar I (fasor de corriente de entrante a Z_{eq}) e I_L (fasor de corriente por la bobina). **Indicar claramente el fasor V (voltaje de la fuente) que se utiliza**.

iii) Realizar un diagrama fasorial con V, I e I_L.

iv) En el diagrama anterior ubicar I_C (fasor corriente por el condensador). **Justificar**.

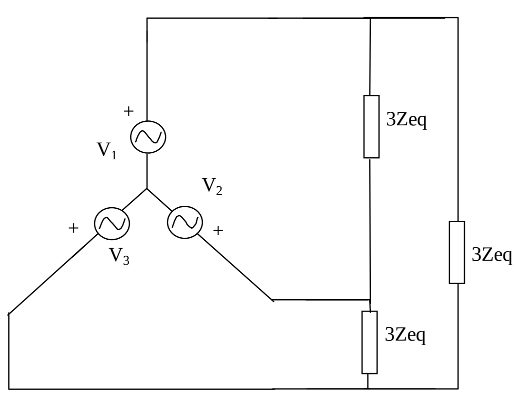
v) Utilizando el diagrama de la parte iii), realizar otro diagrama e indicar los sentidos de los fasores V_R (tensión en bornes de la resistencia), I_L (fasor de corriente por la bobina) y V_L (tensión en bornes de la bobina). **Justificar**.

b) **i)** Calcular Potencia activa y reactiva consumida a la fuente.

ii) Se dispone de 2 elementos para compensar la reactiva, C_1 y L_1. Elegir aquel que maximice el factor de potencia($\cos j$), y la ubicación del mismo (serie o paralelo) para que no cambie la potencia activa consumida a la fuente. **Justificar**.

$$C_1 = 45mf \qquad L_1 = 10mHy$$

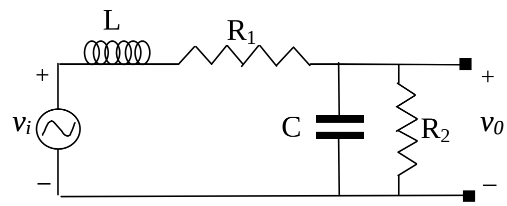
c) En el siguiente circuito trifásico, hallar las corrientes de línea $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $i_3(t)$.



$$v_1(t) = 220\sqrt{2}\,\text{sen}(100pt - p/6)$$
$$v_2(t) = 220\sqrt{2}\,\text{sen}(100pt - p/6 + 2p/3)$$
$$v_3(t) = 220\sqrt{2}\,\text{sen}(100pt - p/6 + 4p/3)$$

Ejercicio 2

a) Hallar la transferencia $H(jw) = \frac{V_o}{V_i}$, cociente entre los fasores asociados a $v_o(t)$ y $v_i(t)$, para el circuito de la figura:



b) Para $R_1 = \frac{3Lw_0}{2}$ $\quad R_2 = \frac{2}{Cw_0}$ $\quad L = \frac{4}{Cw_0^2}$,

i) hallar los Diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase de $H(jw)$, ***mostrando claramente los pasos realizados para su obtención y bosquejando los Diagramas reales***.

ii) ubicar en los Diagramas el punto correspondiente a $w = w_0$.

c)

i- Calcular la frecuencia angular ω a la cual el fasor de $v_o(t)$ es perpendicular al fasor de $v_i(t)$.

ii- Para esa frecuencia determinar la salida $v_o(t)$ si $v_i(t) = 1V.\cos(\omega t)$.

d)

i- Hallar ω para que el voltaje de salida esté desfazado –45º respecto al de entrada.

ii- Repetir la parte b)ii- para esta frecuencia.

Pregunta 1

En el circuito de la figura 1, A es un preamplificador, que trabaja con señales pequeñas y se comporta en frecuencia como un pasabajos de primer orden, de frecuencia de corte 7 kHz. B es un amplificador de salida, alimentado por fuentes de ±12V, que entrega una señal del orden de 10 V de pico y cuya relación entrada-salida se muestra en la figura 2. La respuesta de B es plana hasta 12 kHz, y cae fuertemente por encima de dicha frecuencia. El sistema se alimenta con la suma de una señal de 3 kHZ, una de 5 kHz, y una de 15 kHz, todas de amplitud similar.

Teniendo en cuenta los distintos tipos de distorsión, indicar qué frecuencias es esperable encontrar en la salida, y cuáles de ellas tendrán mayor peso relativo. **Justificar**.

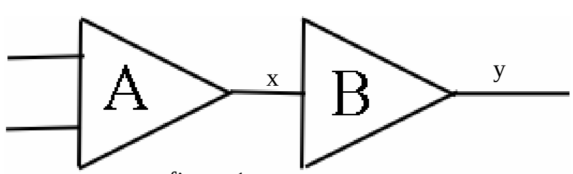


figura 1

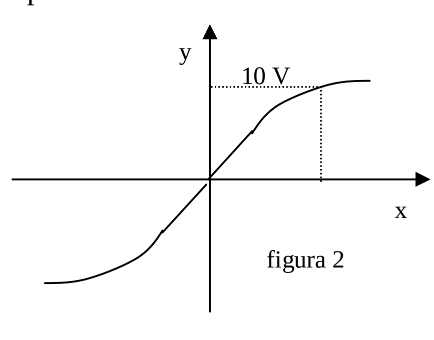


figura 2

Pregunta 2

Indicar a cuál o cuáles de las siguientes opciones es igual la expresión sen(3x+30).δ(x). **Justificar**.

a) sen(3x).δ(30)
b) sen(30).δ(x-30)
c) sen(3x+30).φ(0)
d) sen(30).δ(x)
e) sen(3x).δ(x-30)
f) sen(30).φ(0)

Pregunta 3

a) Hallar la transformada de Fourier del pulso de la figura 3.

b) Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{sen}(pfT)}{pf}\,df$.

c) Aplicando la Identidad de Parseval, calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{sen}^2(pfT)}{p^2 f^2}\,df$.

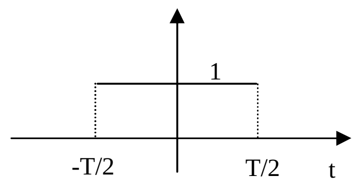


figura 3

Pregunta 4

a) Sea U una distribución periódica de periodo T. Hallar los coeficientes de Fourier de U'', $c_n(U'')$, en función de los de U, $c_n(U)$.
b) Hallar y bosquejar la derivada segunda de la distribución asociada a la función periódica de la figura 1.
c) Aplicando la parte **a)**, hallar los coeficientes de Fourier de la distribución asociada a la función periódica de la figura 4.

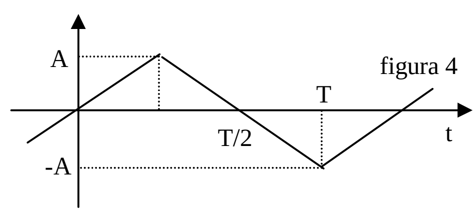


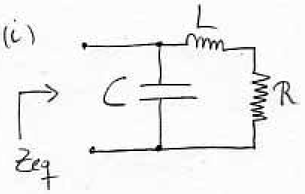
figura 4

SISTEMAS LINEALES 1 : AGOSTO 2002

(1)

Ejercicio 1:

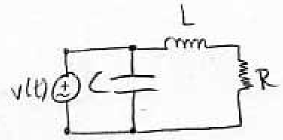
(a) (i)



$$Z_{eq} = \frac{1}{Cj\omega} // R + Lj\omega \Rightarrow Z_{eq} = \frac{\frac{R + Lj\omega}{Cj\omega}}{\frac{1}{Cj\omega} + R + Lj\omega} = \frac{R + Lj\omega}{LC(j\omega)^2 + RC(j\omega) + 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_{eq} = \frac{R + L(j\omega)}{1 + RC(j\omega) + LC(j\omega)^2}}$$

(ii)



$v(t) = 220\sqrt{2}\sin(100\pi t - \frac{\pi}{6})$

$R = 22\Omega$, $L = 120mHy$, $C = 12\mu F$

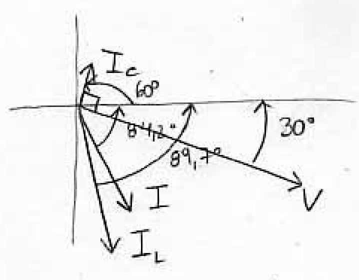
Evaluando, $Z_{eq} = (29,6 + j41,1)\Omega = 50,6\Omega \angle 54,2°$

Tomando el fasor de la fuente $V = 220V\angle -30°$ (valores eficaces)

$$I = \frac{V}{Z_{eq}} \Rightarrow \boxed{I = (0,44 - j4,32)A = 4,34A\angle -84,2°}$$

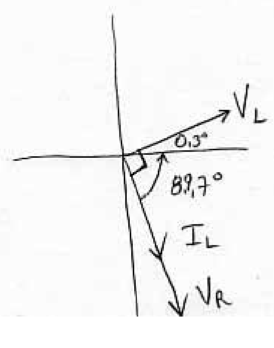
$$I_L = \frac{V}{R + Lj\omega} \Rightarrow \boxed{I_L = (0,023 - j5)A = 5,04A\angle -89,7°}$$

(iii)



(iv) $I = I_L + I_C \Rightarrow I_c = I - I_L$. Además sabemos que siendo la corriente a través de un condensador, debe estar 90° en adelanto del fasor V. Su fase debe ser 60°.

(v)



V_R es colineal a I_L

V_L debe estar 90° en adelanto de I_L

(2)

(b) (i) $P = Re[V\bar{I}] \Rightarrow \boxed{P = 559W}$

$Q = Im[V\bar{I}] \Rightarrow \boxed{Q = 775Var}$

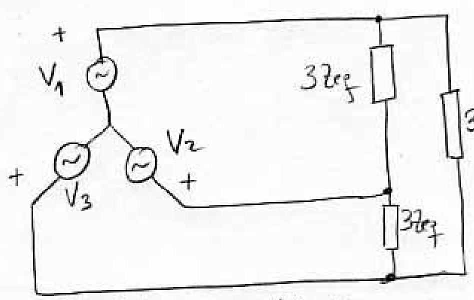
Otra forma: $P = R|I_L|^2 = 559W$

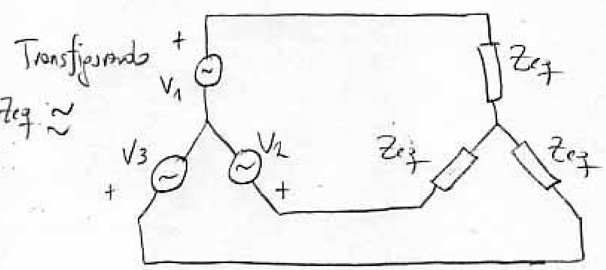
$Q = L\omega|I_L|^2 - C\omega|V|^2 = 775Var$

(ii) Para que no cambie la potencia activa, se debe conectar la componente en paralelo.
De esta forma se mantiene la corriente por Z_{eq} y no cambia P.
Siendo la carga inductiva, debo conectar la capacidad C en paralelo

$\Rightarrow Z_{eq}' = \frac{1}{C_1 j\omega} \parallel Z_{eq} = 85{,}5\Omega\angle 9^\circ \Rightarrow \varphi = 9^\circ$ y aumenta $\cos\varphi$ como se quería

(c)





$v_1(t) = 220\sqrt{2}\sin(100\pi t - \pi/6)$ V

$v_2(t) = 220\sqrt{2}\sin(100\pi t - \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})$ V

$v_3(t) = 220\sqrt{2}\sin(100\pi t - \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3})$ V

El equivalente monofásico es el ya estudiado $\Rightarrow$ $I_1 = 4{,}34A\angle -84{,}2^\circ$

$I_2 = 4{,}34A\angle -84{,}2^\circ + 120^\circ$

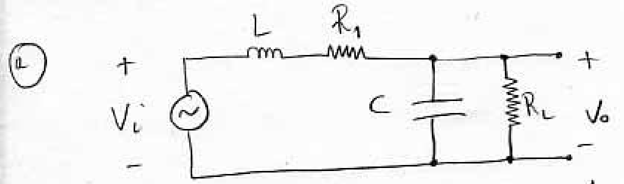
$I_3 = 4{,}34A\angle -84{,}2^\circ + 240^\circ$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} i_1(t) = \sqrt{2}\,4{,}34\sin(100\pi t - 1{,}47)A \\ i_2(t) = \sqrt{2}\,4{,}34\sin(100\pi t - 1{,}47 + \frac{2\pi}{3})A \\ i_3(t) = \sqrt{2}\,4{,}34\sin(100\pi t - 1{,}47 + \frac{4\pi}{3})A \end{array}}$$

(3)

Ejercicio 2:

(a)



Del divisor de tensiones: $H(j\omega) = \dfrac{\frac{1}{Cj\omega} \,//\, R_2}{Lj\omega + R_1 + \frac{1}{Cj\omega} \,//\, R_2}$ $\quad \dfrac{1}{Cj\omega} \,//\, R_2 = \dfrac{R_2}{R_2 C (j\omega) + 1}$

$$\Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{R_2}{R_2 C L (j\omega)^2 + (R_1 R_2 C + L)(j\omega) + R_1 + R_2}}$$

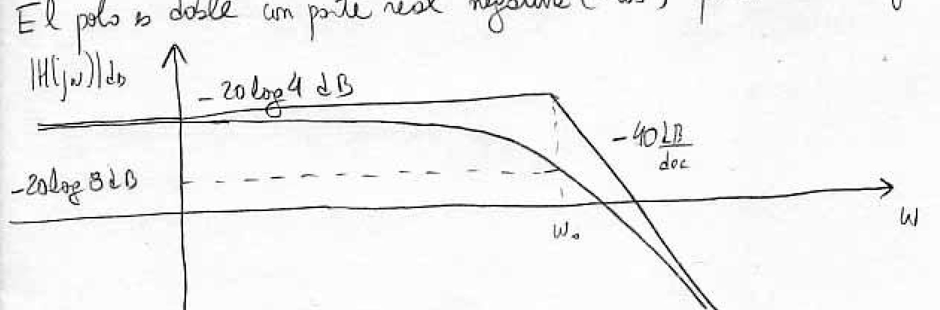
(b) (i) $\dfrac{R_1}{L} = \dfrac{3\omega_o}{2}$, $\dfrac{1}{R_2 C} = \dfrac{\omega_o}{2}$, $\dfrac{1}{LC} = \left(\dfrac{\omega_o}{2}\right)^2$

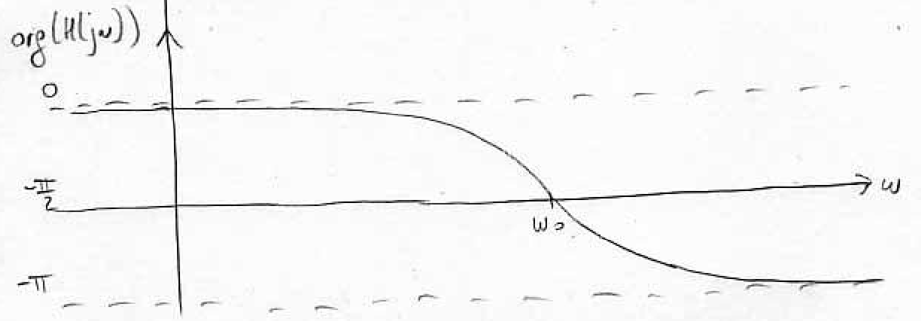
$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{\frac{1}{LC}}{(j\omega)^2 + \left(\frac{R_1}{L} + \frac{1}{R_2 C}\right)(j\omega) + \frac{1}{LC} + \frac{R_1}{R_2 L C}} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{\omega_o^2}{4} \frac{1}{((j\omega) + \omega_o)^2}$$

Para $\omega \ll \omega_o \Rightarrow H(j\omega) \simeq \dfrac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq -20 \log 4 \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) \simeq 0 \end{cases}$

Para $\omega \gg \omega_o \Rightarrow H(j\omega) \simeq \dfrac{-\omega_o^2}{4\omega^2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq 20 \log\left(\frac{\omega_o^2}{4}\right) - 40 \log \omega \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) \simeq -\pi \end{cases}$

El polo es doble con parte real negativa $(-\omega_o)$ por lo cual tengo un retardo de fase de π.





4

(ii) $H(j\omega_0) = \dfrac{1}{4(1+j)^2}$

$\Rightarrow \boxed{H(j\omega_0) = \dfrac{1}{8} \angle -\dfrac{\pi}{2}} \quad \Rightarrow |H(j\omega_0)| \approx -20 \log 8 \text{ dB}$

c) (i) La frecuencia es ω_0 ya que $\arg(H(j\omega_0)) = -\dfrac{\pi}{2}$

(ii) Si $v_i(t) = 1V \cos \omega_0 t$ la salida en régimen será

$v_0(t) = |H(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \arg(H(j\omega_0))) \rightarrow \boxed{v_0(t) = \dfrac{1}{8} V \cos\left(\omega_0 t - \dfrac{\pi}{2}\right)}$

d) (i) Si el desfasaje que introduce $H(j\omega')$ es $-45°$, se debe cumplir que

$Re[H(j\omega')] = -Im[H(j\omega')]$

$$H(j\omega) = \frac{\omega_0^2}{4} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - j\omega 2\omega_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\omega_0)^2}$$

$\Rightarrow \omega_0^2 - \omega'^2 = 2\omega'\omega_0 \quad \Rightarrow \omega'^2 + 2\omega'\omega_0 - \omega_0^2 = 0$

$\omega' = \dfrac{-2\omega_0 \pm \sqrt{4\omega_0^2 + 4\omega_0^2}}{2} = -\omega_0 \pm \sqrt{2}\,\omega_0 \quad \Rightarrow \boxed{\omega' = \omega_0(\sqrt{2} - 1)}$

(ii) $H(j\omega') = \dfrac{\sqrt{2}+2}{16} \angle -\dfrac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \boxed{v_0(t) = \dfrac{\sqrt{2}+2}{16} V \cos\left(\omega' t - \dfrac{\pi}{4}\right)}$