Sistemas Lineales 1
Segundo parcial, 11 de julio 2005

Recomendaciones generales:

Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.
En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar de problema y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.
Justificar claramente los pasos realizados para resolver los problemas.
En caso de utilizar alguna propiedad o resultado particular, enúncielo claramente, enfatizando por qué puede usarlo.
Hacer problemas distintos en hojas separadas.
Poner el nombre en todas las hojas.
En lo posible usar las hojas de un solo lado.
Se recuerda que la prueba es individual.

Problema 1 **(14 puntos)**

Trabajaremos con la transferencia $H(jw) = K.\dfrac{(jw)^2}{(jw-0.1)(jw+10)}$.

- **a)** Hallar los valores de K para los cuales $\lim_{w \to +\infty} |H(jw)| = 40db$.
- **b)** Determinar K si además se pide que $\lim_{w \to 0} \arg[H(jw)] = 0\,rad$.
- **c)** Bosquejar los Diagramas de Bode asintóticos de $H(jw)$, **justificando detalladamente** los pasos seguidos para la obtención de los mismos.
- **d)** Calcular la distancia entre el Diagrama de módulo asintótico y el real para las siguientes frecuencias: $w = 0.1, 1, 10, 100$.
- **e)** ¿Si se coloca en cascada el sistema anterior con un retardo de valor $t_D > 0$, como se muestra en la figura 1, cómo se relacionan los Diagramas de Bode de módulo de $H(jw)$ y $H_T(jw)$? **Justificar.**

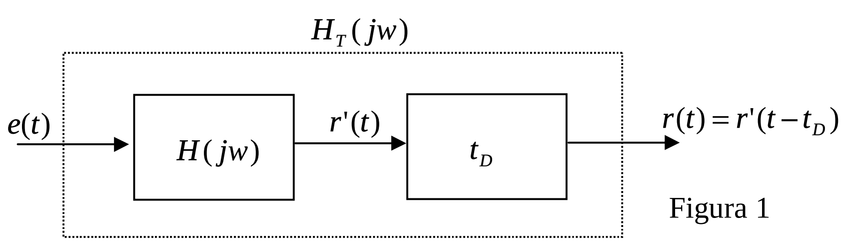
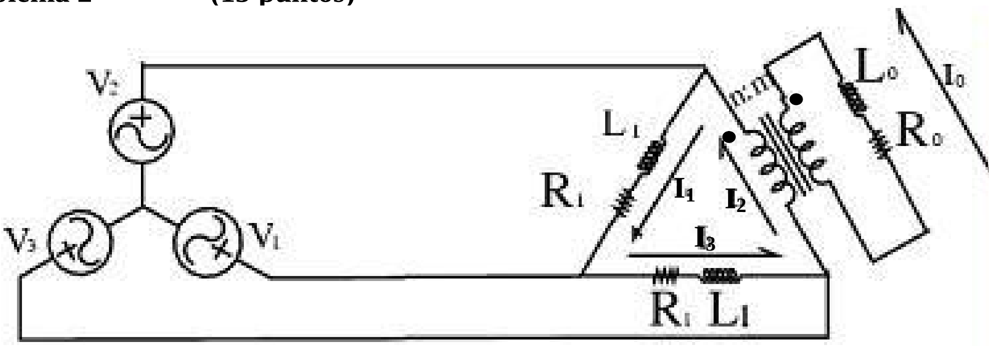


Figura 1

Problema 2 (15 puntos)



Un sistema de fuentes V_1, V_2 y V_3 alimenta un sistema de cargas con dos fases iguales entre sí (R_1 en serie con L_1) y una fase alimentada por medio de un transformador **ideal** con **n** vueltas en el primario y **m** vueltas en el secundario.

Se pide:

a) ¿Qué relación tienen que cumplir R_1 y L_1 , en función de R_0, L_0, n y m, para que el sistema de cargas que ven las fuentes sea equilibrado?

b) Si $R_1 = 100\Omega, L_1 = \dfrac{100}{2.p.f} Hy$, n=100, m=10 y f=50 Hz. Calcular el valor de R_0 y L_0 para que sea un sistema de cargas equilibrado.

Para el sistema de fuentes

$$\begin{cases} v_1(t) = 220.\sqrt{2}.\cos(2p.f.t) \\ v_2(t) = 220.\sqrt{2}.\cos\left(2p.\left(f.t + \frac{1}{3}\right)\right) \\ v_3(t) = 220.\sqrt{2}.\cos\left(2p.\left(f.t + \frac{2}{3}\right)\right) \end{cases}$$

c) Calcular los fasores asociados a las corrientes I_1 , I_2, I_3 e I_0 y ubicarlos en un diagrama fasorial junto a los fasores de las fuentes.

d) Dar las expresiones temporales de las corrientes I_1 , I_2, I_3 e I_0.

e) Calcular la potencia reactiva entregada por las fuentes.

f) Se quiere compensar la potencia reactiva. Calcule e indique claramente qué elementos colocaría y dónde, teniendo en cuenta que la compensación se quiere realizar en los bornes de las impedancias de carga.

<u>Problema 3</u> **(16 puntos)**

a) Se consideran las distribuciones temperadas de la figura 1. **Justificando claramente los pasos**[1], hallar sus respectivas Transformadas de Fourier y graficar los espectros.

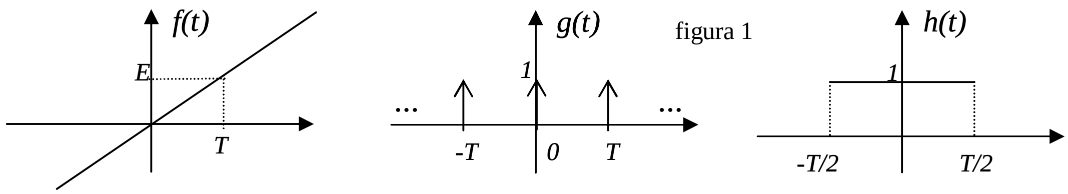


figura 1

b) Sea U(t) la distribución periódica temperada de la figura 2.

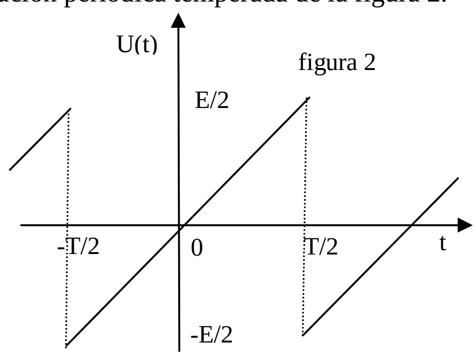


figura 2

i) Hallar una expresión para U(t) en función de las distribuciones de la parte a).

ii) Calcular su Transformada de Fourier.

c) Deducir el valor de los coeficientes $c_n(U)$ de su desarrollo en Series de Fourier en función de **sinc'(x),** derivada primera del $\mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\sin(px)}{px}$.

[1] **En caso de utilizar alguna propiedad o resultado particular, enúncielo claramente, enfatizando por qué puede usarlo**.

<u>Problema 4</u> **(15 puntos)**

a) Calcular las siguientes transferencias en régimen:

i) $H_1(jw) = \dfrac{Vo(jw)}{Vi(jw)}$

Para la figura 1**:** $R_1 C_1 = \dfrac{L_1}{R_1} = \dfrac{1}{w_0}$

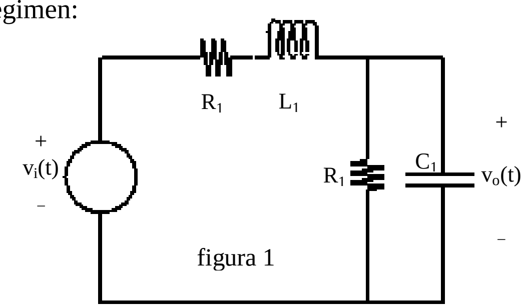


figura 1

ii) $H_2(jw) = \dfrac{Vo(jw)}{I(jw)}$

Para la figura 2:

$\dfrac{R}{L} = w_0$, $n >> 1$, $\dfrac{1}{n^2 LC} = w_0^2$

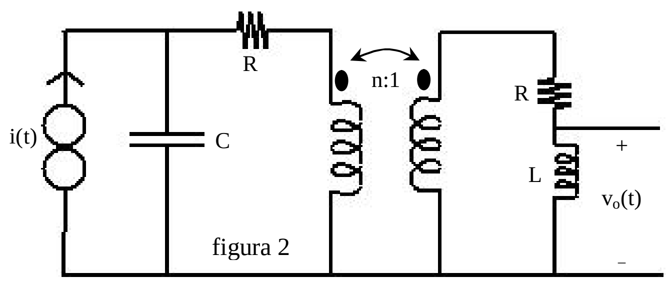


figura 2

b) Se desea tratar una señal periódica -que en principio puede ser una tensión o una corriente- cuya información relevante se encuentra principalmente en los primeros armónicos, para procesarla luego con un dispositivo que sólo admite señales de valor medio nulo y de banda acotada. ¿Cuál de los circuitos anteriores le parece más adecuado tratar la señal? ¿Cómo determinaría un valor apropiado de w_0? **Justifique claramente sus respuestas**.

(Si va a construir Diagramas de Bode, no se pide aquí un desarrollo detallado de la deducción de los mismos).

SISTEMAS LINEALES 1: SEGUNDO PARCIAL 2005 (1)

Problema 1: $H(j\omega) = K \dfrac{(j\omega)^2}{(j\omega - \frac{1}{10})(j\omega + 10)}$

a) Si $\omega \to \infty \Rightarrow H(j\omega) \simeq K \Rightarrow \boxed{K = \pm 100}$ para ganancia de 40dB en alta frecuencia.

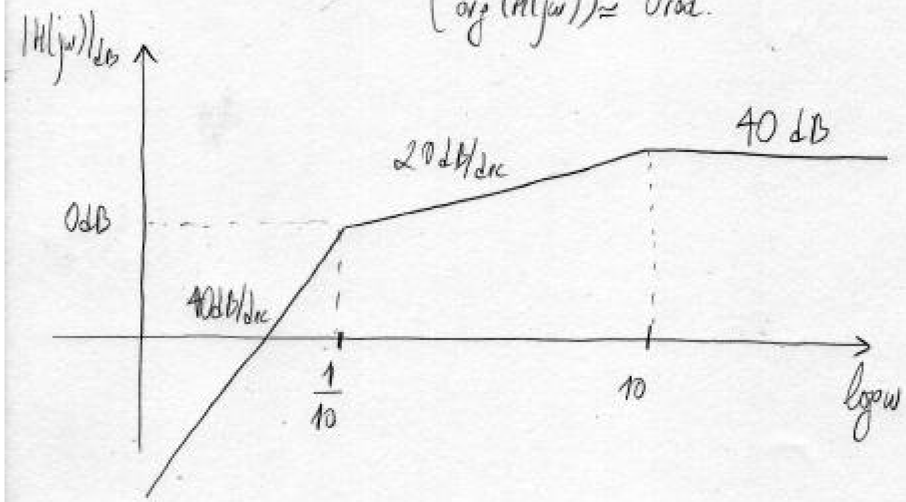
b) Si $\omega \to 0 \Rightarrow H(j\omega) \simeq K\omega^2 \Rightarrow \boxed{K = 100}$ para que el argumento sea 0 rad en baja frecuencia

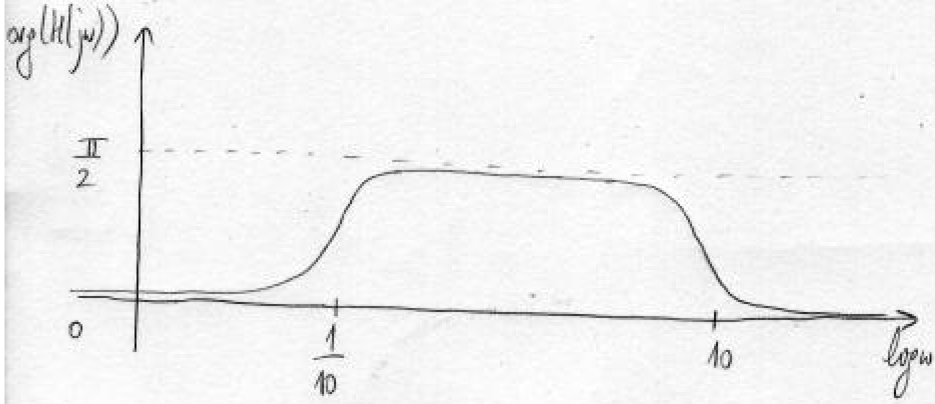
c) Ceros: 0 doble , Polos: $\frac{1}{10}$, -10.

$\omega \ll \frac{1}{10} \Rightarrow H(j\omega) \simeq 100\,\omega^2 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq 40 + 40\log\omega \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) \simeq 0 \text{ rad} \end{cases}$

$\frac{1}{10} \ll \omega \ll 10 \Rightarrow H(j\omega) \simeq 10j\omega \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq 20 + 20\log\omega \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) \simeq \frac{\pi}{2} \text{ rad} \end{cases}$

$\omega \gg 10 \Rightarrow H(j\omega) \simeq 100 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq 40 \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) \simeq 0 \text{ rad.} \end{cases}$





(2)

(d) Para $w = \frac{1}{10}$ rad/s $\Rightarrow |H(j\frac{1}{10})|_{asín} = 0dB$, $|H(j\frac{1}{10})|_{real} = -3{,}0107dB$

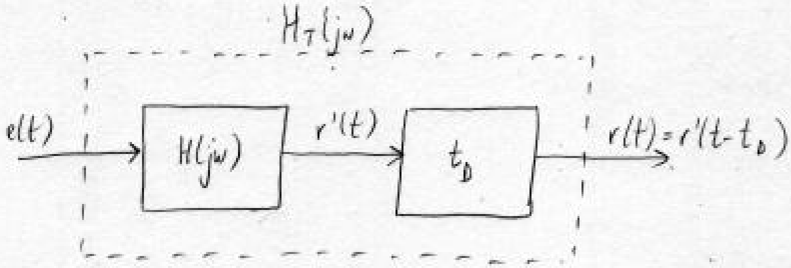
$\Rightarrow Dist = |H(j\frac{1}{10})|_{asín} - |H(j\frac{1}{10})|_{real} \Rightarrow \boxed{Dist = 3{,}0107dB}$

Para $w = 1$rad/s estoy una década por encima de $\frac{1}{10}$. En el asintótico tengo un crecimiento a $20dB|_{dec}$ y por lo tanto $|H(j)|_{asín} = 20dB$, $|H(j)|_{real} = 19{,}914dB \Rightarrow \boxed{Dist = 0{,}086\,dB}$

Para $w = 10$ rad/s $\Rightarrow |H(j10)|_{asín} = 40dB$, $|H(j10)|_{real} = 36{,}9893dB \Rightarrow \boxed{Dist = 3{,}0107dB}$

Para $w = 100$ rad/s $\Rightarrow |H(j100)|_{asín} = 40dB$, $|H(j100)|_{real} = 39{,}9568dB \Rightarrow \boxed{Dist = 0{,}0432dB}$

(e)



La respuesta impulsiva de un retardo es $h_{t_D}(t) = \delta(t-t_D)$ ya que $r(t) = \delta(t-t_D) * r'(t) = r'(t-t_D)$.

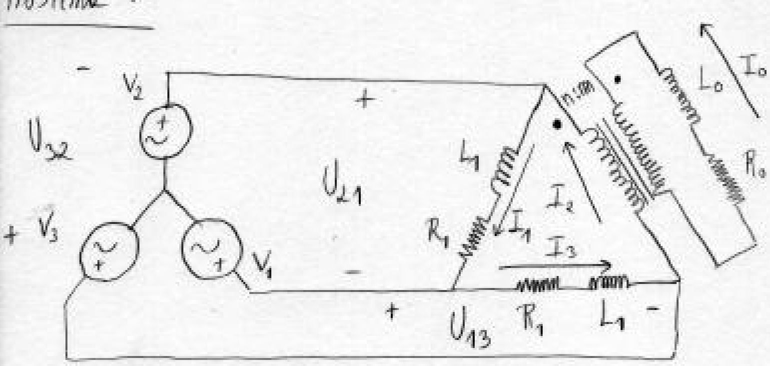
Por otro lado sabemos que la respuesta impulsiva de un sistema en cascada es la convolución de ambas respuestas impulsivas $\Rightarrow h_T(t) = h(t) * h_{t_D}(t)$

En frecuencia: $H_T(jw) = H(jw).\mathcal{F}[h_{t_D}(t)] = H(jw).\mathcal{F}[\delta(t-t_D)] = H(jw).e^{-jwt_D}$

Finalmente como $|e^{-jwt_d}| = 1$ se tiene que $\boxed{|H_T(jw)| = |H(jw)|}$

y los Diagramas de Bode de módulo son idénticos.

Problema 2: (3)



$v_1(t) = 220\sqrt{2}\cos(2\pi f t)$

$v_2(t) = 220\sqrt{2}\cos(2\pi f t + \frac{2\pi}{3})$

$v_3(t) = 220\sqrt{2}\cos(2\pi f t + \frac{4\pi}{3})$

$R_1 = 100\Omega$, $L_1 = \frac{100}{2\pi f}$ Hy

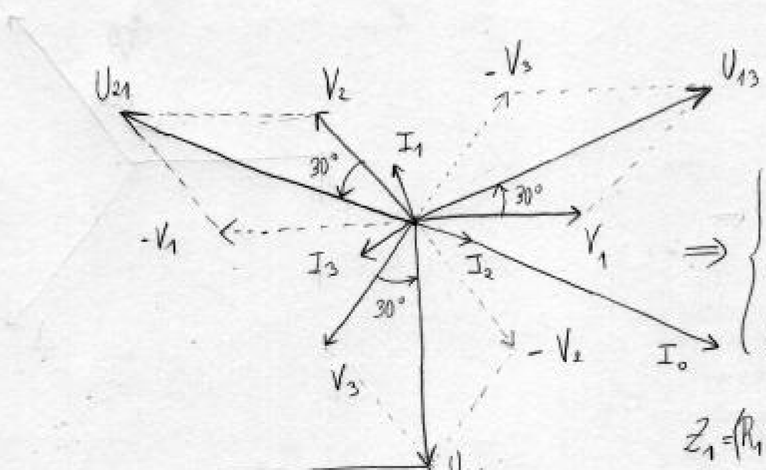
$n = 100$, $m = 10$, $f = 50$ Hz

a) Para que el sistema de cargas sea equilibrado, la impedancia vista desde el primario del transformador debe ser igual a $R_1 + L_1 j\omega$.

Por otro lado $Z_v = \left(\frac{n}{m}\right)^2 [R_0 + L_0 j\omega] \Rightarrow \boxed{R_1 = \left(\frac{n}{m}\right)^2 R_0,\ L_1 = \left(\frac{n}{m}\right)^2 L_0}$

b) A partir de las relaciones de la parte anterior: $\boxed{R_0 = 1\Omega,\ L_0 = \frac{1}{2\pi f}\ \text{Hy}}$

c) Calculo las siguientes tensiones compuestas: U_{21}, U_{13} y U_{32}



Si $\begin{cases} V_1 = 220V\angle 0 \\ V_2 = 220V\angle 120° \\ V_3 = 220V\angle 240° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{21} = 220\sqrt{3}V\angle 150° \\ U_{13} = 220\sqrt{3}V\angle 30° \\ U_{32} = 220\sqrt{3}V\angle 270° \end{cases}$

$Z_1 = (R_1 + L_1 j\omega)\Omega = 100(1+j)\Omega = 100\sqrt{2}\,\Omega\angle 45°$

$\Rightarrow I_1 = \frac{U_{21}}{Z_1} \Rightarrow \boxed{I_1 = 2{,}2\sqrt{\frac{3}{2}}A\angle 105°}$

$I_2 = \frac{U_{13}}{Z_1} \Rightarrow \boxed{I_2 = 2{,}2\sqrt{\frac{3}{2}}A\angle 345°}$

$I_3 = \frac{U_{32}}{Z_1} \Rightarrow \boxed{I_3 = 2{,}2\sqrt{\frac{3}{2}}A\angle 225°}$

De las relaciones del transformador ideal:

$-\frac{n}{m}I_2 + I_0 = 0 \Rightarrow I_0 = 10\, I_2$

$\Rightarrow \boxed{I_0 = 22\sqrt{\frac{3}{2}}A\angle 345°}$

4

d)

$$\boxed{\begin{aligned} i_1(t) &= 2{,}2\sqrt{3}A\cos(2\pi f t + 105^\circ)\\ i_2(t) &= 2{,}2\sqrt{3}A\cos(2\pi f t + 345^\circ)\\ i_3(t) &= 2{,}2\sqrt{3}A\cos(2\pi f t + 225^\circ)\\ i_0(t) &= 22\sqrt{3}A\cos(2\pi f t + 345^\circ)\end{aligned}}$$

e) La reactiva consumida por cada fase es: $Q_{mono} = L_1\omega|I|^2 = 726\ Var$

$\Rightarrow Q_{TRI} = 3\,Q_{mono} \Rightarrow \boxed{Q_{TRI} = 2178\ Var}$

f) Como las cargas son inductivas debo compensar con condensadores en bornes de las cargas.

Para las dos fases iguales con impedancia Z_1, se tiene:

$Q_C + Q_{mono} = 0 \Rightarrow -C\omega|V_c|^2 - Q_{mono} = 0$ donde $|V_c| = 220\sqrt{3}V$ y $Q_{mono} = 726\ Var$

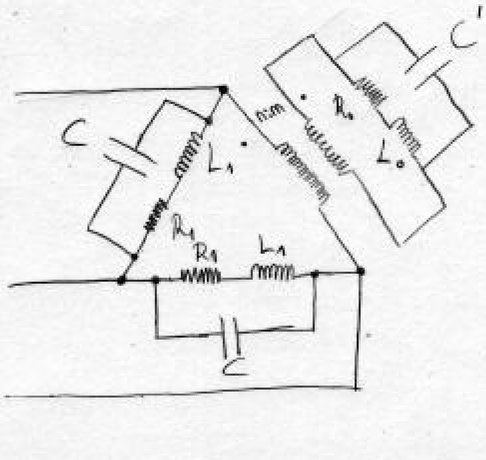
$$\Rightarrow C = \frac{Q_{mono}}{|V_c|^2\omega} \Rightarrow \boxed{C = 15{,}9\,\mu F}$$

Para la fase del transformador es similar, pero ahora se tiene:

$Q_{C'} + Q_{mono} = 0 \Rightarrow -C'\omega|V_{c'}|^2 - Q_{mono} = 0$ donde ahora $|V_{c'}| = \left(\frac{m}{n}\right)|V_c|$

$$\Rightarrow C' = \frac{Q_{mono}\cdot 100}{|V_c|^2\omega} \Rightarrow \boxed{C' = 1{,}59\,mF}$$

El esquema de conexiones sería el siguiente:



Problema 3: 5

(a) $f(t) = \frac{E}{T}\, t$. Recordando el resultado $\mathcal{F}[1] = \delta(f)$ y la propiedad de derivación en frecuencia, se tiene que $\mathcal{F}[-j2\pi t] = \delta'(f)$.

Por linealidad se tiene finalmente que $\boxed{\mathcal{F}[f(t)] = -\frac{E\,\delta'(f)}{j2\pi T}}$

$g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t-nT)$. Por linealidad, $\mathcal{F}[g(t)] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}[\delta(t-nT)]$

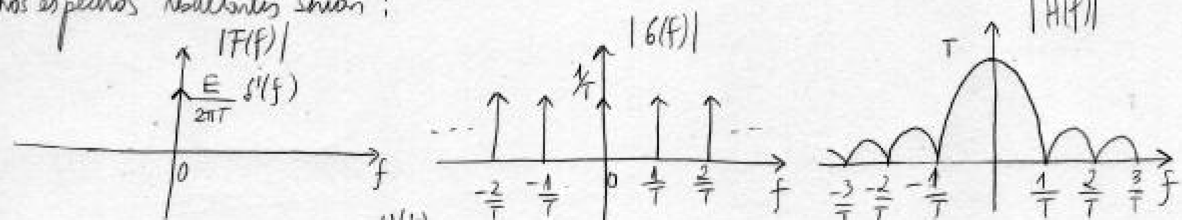
Recordando el resultado $\mathcal{F}[\delta] = 1$ y la propiedad de traslación temporal, resulta que $\mathcal{F}[g(t)] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-j2\pi f nT}$. Finalmente, a partir de la Serie de Fourier del peine de Dirac $\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(f-nf_0) = \frac{1}{f_0}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{j2\pi \frac{n}{f_0} f}\right)$ se tiene que

$$\boxed{\mathcal{F}[g(t)] = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta\left(f-\frac{n}{T}\right)}$$

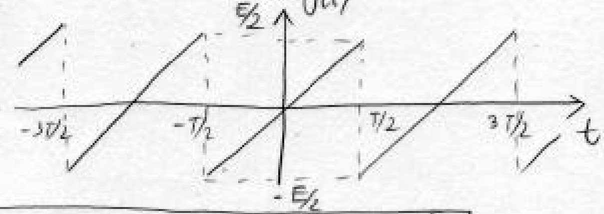
$$h(t) = p_T(t) \Rightarrow \mathcal{F}[h(t)] = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi f t}\,dt = \left.\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f}\right|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{e^{-j2\pi f\frac{T}{2}} - e^{j2\pi f T/2}}{-j2\pi f}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[h(t)] = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} \Rightarrow \boxed{\mathcal{F}[h(t)] = T\,\mathrm{sinc}(fT)}$$

Los espectros resultantes serán:



(b)



(i) $\boxed{U(t) = [f(t) \cdot h(t)] * g(t)}$

(ii) $\mathcal{F}[U(t)] = \mathcal{F}[f(t).h(t)].\mathcal{F}[g(t)] = [\mathcal{F}[f(t)] * \mathcal{F}[h(t)]].\mathcal{F}[g(t)]$ ⑥

$$\mathcal{F}[f(t)] * \mathcal{F}[h(t)] = -\frac{E\delta'(f)}{j2\pi T} * T\,\mathrm{sinc}(fT) = -\frac{E}{j2\pi}(\mathrm{sinc}(fT))' = -\frac{ET}{j2\pi}\mathrm{sinc}'(fT)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[U(t)] = -\frac{ET}{j2\pi}\mathrm{sinc}'(fT).\frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta(f-\tfrac{n}{T}) = \frac{-E}{j2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{sinc}'(fT).\delta(f-\tfrac{n}{T})$$

Recordando la propiedad en distribuciones $\underset{\in C^\infty}{\alpha(x)}.\delta(x-a) = \alpha(a).\delta(x-a)$ tenemos:

$$\boxed{\mathcal{F}[U(t)] = -\frac{E}{j2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{sinc}'(n)\delta(f-\tfrac{n}{T})}$$

ⓒ Antitransformando la expresión obtenida para $\mathcal{F}[U(t)]$ resulta:

$$U(t) = -\frac{E}{j2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{sinc}'(n)\overline{\mathcal{F}}[\delta(f-\tfrac{n}{T})] = \frac{-E}{j2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{sinc}'(n)e^{j2\pi\frac{n}{T}t} \quad (\mathrm{I})$$

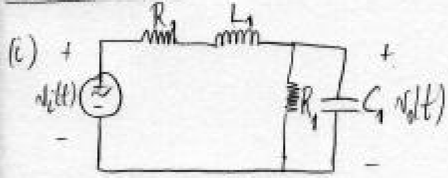
Siendo $U(t)$ periódica, admite un desarrollo en Series de Fourier de la forma:

$$U(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(U)e^{j2\pi\frac{n}{T}t} \quad (\mathrm{II})$$

De (I) y (II) se deduce que: $\boxed{c_n(U) = -\frac{E}{j2\pi}\mathrm{sinc}'(n)}$

Problema 4: (7)

(i)

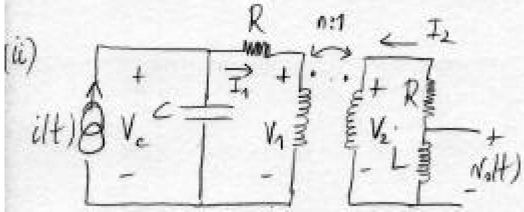


Del divisor de tensiones: $H_1(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{R_1 // 1/C_1 j\omega}{R_1 + L_1 j\omega + R_1 // 1/C_1 j\omega}$

$$\Rightarrow H_1(j\omega) = \frac{R_1}{(R_1+L_1j\omega)(R_1C_1j\omega+1)+R_1} = \frac{R_1}{R_1L_1C_1(j\omega)^2+(R_1^2C+L_1)(j\omega)+2R_1} = \frac{1/L_1C_1}{(j\omega)^2+\left(\frac{R_1}{L_1}+\frac{1}{R_1C_1}\right)(j\omega)+\frac{2}{L_1C_1}}$$

Si $R_1C_1 = \frac{L_1}{R_1} = \frac{1}{\omega_o}$ $\Rightarrow$ $\boxed{H_1(j\omega) = \frac{\omega_o^2}{(j\omega)^2+2\omega_o(j\omega)+2\omega_o^2}}$

(ii)



Del divisor de tensiones en el secundario: $V_o = \frac{Lj\omega}{R+Lj\omega}V_2$

$\frac{V_1}{n} = V_2 \Rightarrow V_1 = \frac{n(R+Lj\omega)}{Lj\omega}V_o$

$nI_1 + I_2 = 0 \Rightarrow nI_1 = -I_2 = \frac{V_o}{Lj\omega} \Rightarrow I_1 = \frac{V_o}{nLj\omega}$

Del nudo a la entrada: $I = V_cCj\omega + \frac{V_o}{nLj\omega}$

$$V_c = RI_1 + V_1 = V_o\left[\frac{R}{nLj\omega} + n\frac{(R+Lj\omega)}{Lj\omega}V_o\right]$$

$$\Rightarrow I = V_o\left[\frac{RCj\omega}{nLj\omega} + \frac{nCj\omega}{Lj\omega}(R+Lj\omega) + \frac{1}{nLj\omega}\right] = V_o\left[\frac{n^2LC(j\omega)^2+(n^2+1)RCj\omega+1}{nLj\omega}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{V_o(j\omega)}{I(j\omega)} = \frac{\frac{1}{nC}(j\omega)}{(j\omega)^2+\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\frac{R}{L}(j\omega)+\frac{1}{n^2LC}}$$

Si $\frac{R}{L} = \omega_o$, $n >> 1$, $\omega_o^2 = \frac{1}{n^2LC}$

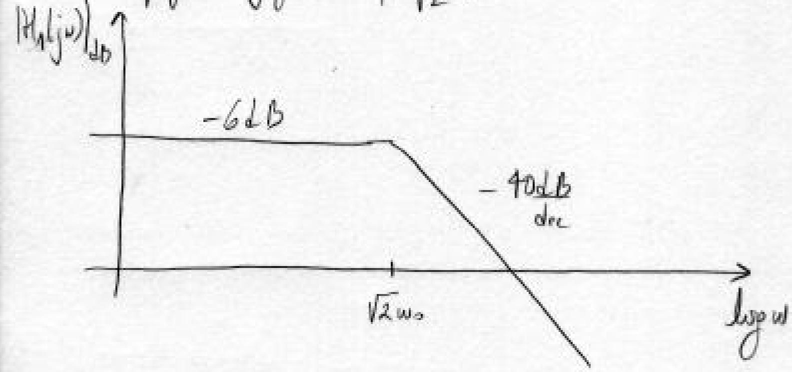
$$\Rightarrow \boxed{H_2(j\omega) = \frac{\frac{1}{nC}(j\omega)}{(j\omega)^2+\omega_o(j\omega)+\omega_o^2}}$$

8

b) Para $H_1(j\omega)$;

Ceros: –

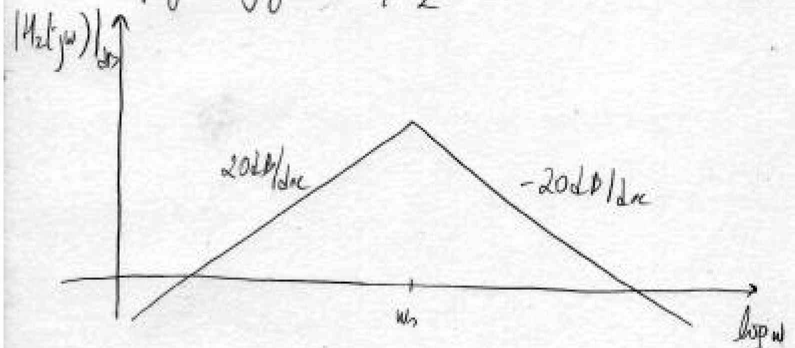
Polos: complejos conjugados $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\omega_n = \sqrt{2}\,\omega_0$



Para $H_2(j\omega)$:

Ceros: 0

Polos: complejos conjugados $\zeta = \frac{1}{2}$, $\omega_n = \omega_0$



El primer circuito implementa un pasabajos de 2º orden y no elimina el valor de continua por lo que no es adecuado para la aplicación que se plantea.

El segundo circuito es un pasabanda que elimina completamente el valor de continua (cero en 0) y puede ser adecuado para tratar la señal descripta si se sintoniza ω_0 en el centro de la banda de interés. Observar que de todas formas, los armónicos a la salida serán atenuados, pero igual es claramente la mejor opción.