Sistemas Lineales 1

Segundo parcial, 11 de julio 2006

Recomendaciones generales:

Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.

En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar de problema y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.

Justificar claramente los pasos realizados para resolver los problemas.

En caso de utilizar alguna propiedad o resultado particular, enúncielo claramente, enfatizando por qué puede usarlo.

HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.

PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.

En lo posible usar las hojas de un solo lado.

Se recuerda que la prueba es individual.

Problema 1 (12 puntos)

Se considera la transferencia en régimen sinusoidal $H(jw) = \dfrac{w_n(jw)}{(jw)^2 + 2z\, w_n(jw) + w_n^2}$ con $0 < \zeta^2 < 1$ y $\omega_n > 0$.

a) Mostrar que el denominador puede escribirse como $(jw+z).(jw+\bar{z})$, siendo $z = a+jb$ un número complejo con partes real e imaginaria no nulas. Hallar a y b, en función de z y ω_n.

b) Para $z > 0$, dibujar los Diagramas de Bode asintóticos de módulo y fase, explicando claramente como los construye –en particular el diagrama de fase- e indicando los valores de abscisas, ordenadas y pendientes que correspondan. Describir qué cambia si se toma $z < 0$.

c) Hallar $z > 0$ tal que $|H(jw_n)| = 20\,db$ (ese valor, que llamaremos z_0 será usado en el resto del problema.

d) Para las frecuencias $\omega_n/2$, ω_n y $10.\omega_n$, hallar:

- **i)** el valor respectivo de $|H(jw)|$ y ubicarlo en el diagrama construido en la parte **b)**.
- **ii)** las distancias “real-asintótico” en decibeles.

Problema 2 **(16 puntos)**

Se tiene un sistema trifásico equilibrado y perfecto de fuentes V_1, V_2 y V_3 que se muestra en la figura 1. Se considera una carga trifásica formada por tres impedancias idénticas de valor Z que pueden conectarse tanto en estrella como en triángulo.

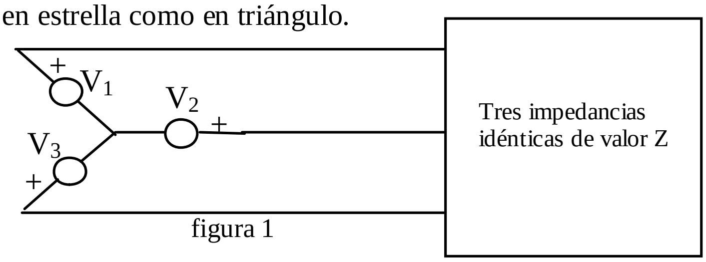


figura 1

$$Z = |Z|.e^{j\varphi} = R + jX$$

a) Conectar las cargas al sistema de fuentes de manera tal que la potencia activa consumida a dicho sistema sea mínima. **JUSTIFICAR LA RESPUESTA.** Para dicha elección, calcule el valor temporal de las tres corrientes de línea.

b) Para $Z=R+Ljw$ y la conexión elegida en la parte anterior,

- **i)** Calcular la potencia reactiva Q consumida al sistema de fuentes.
- **ii)** Diseñar una compensación de dicha potencia reactiva.
- **iii)** Conectar dicha compensación de manera tal de minimizar el valor de las componentes diseñadas.
- **iv)** Calcular la potencia activa P luego de realizada la compensación.

c) En la figura 2, hallar el valor exacto que debe tener el cociente $\mathbf{n_1}/\mathbf{n_2}$ para asegurar que los dos siguientes circuitos sean equivalentes desde el punto de vista de las corrientes consumidas al sistema de fuentes. Recordando que $\mathbf{n_1}$ y $\mathbf{n_2}$ son las vueltas respectivas de primario y secundario de los transformadores ideales del circuito, dar un valor posible del cociente $\mathbf{n_1}/\mathbf{n_2}$ que aproxime el valor exacto deseado.

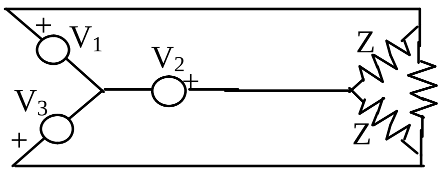
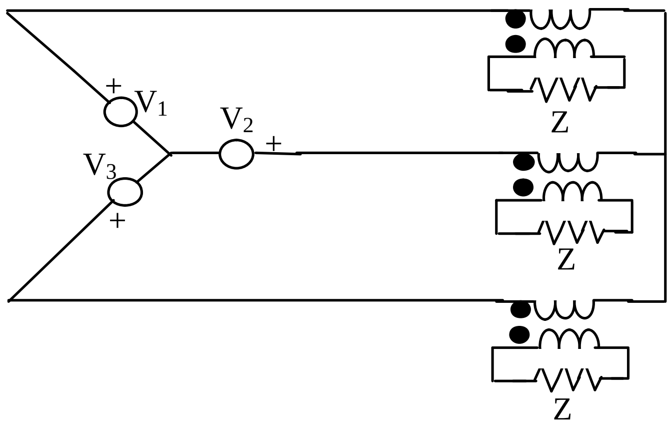


figura 2



<u>Problema 3</u> **(12 puntos)**

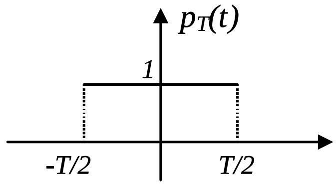


figura 1

a) Hallar la Transformada de Fourier $F[p_T(t)](f)$ del pulso de la figura 1.

b) Calcular la integral impropia y verificar que dicho valor no depende de T.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(p\ xT)}{p\ x} dx$$

c) Se considera el sistema de la figura 2. Bosquejar aproximadamente los espectros de las señales x(t), $r_1(t)$ y $r_2(t)$ e indicar cuál de las dos señales $r_1(t)$ y $r_2(t)$ tiene más energía. JUSTIFICAR.

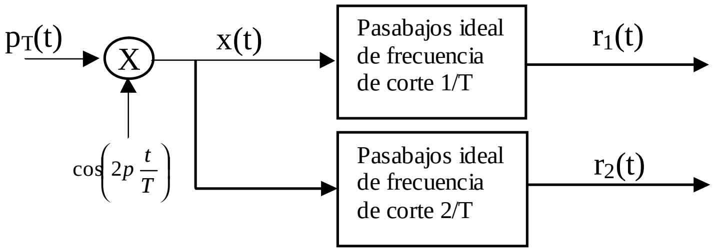
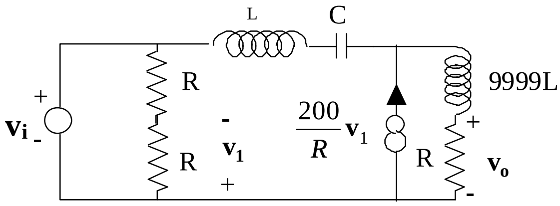


figura 2

Problema 4 **(20 puntos)**

Sea el circuito de la figura, con $\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R}}=\frac{1}{100w_0}$, $\mathrm{RC}=\frac{100}{w_0}$.



a) Hallar la transferencia $H(j\omega)=V_o(j\omega)/V_i(j\omega)$.

De ahora en más, asumir que la transferencia se puede escribir así:

$$H(jw)=-\frac{1}{100}.\frac{(jw)^2-w_0.(jw)+w_0^2}{(jw)^2+\frac{w_0}{100}.(jw)+\frac{w_0^2}{10^4}}.$$

b) Realizar los diagramas de Bode asintóticos y bosquejar los reales.

c) Hallar gráficamente:

i) el rango de frecuencias en las cuales el sistema amplifica.

ii) la frecuencia a la cual v_o está en fase con v_i.

d) Corroborar los resultados de la parte c con la transferencia real.

e) Hallar aproximadamente la salida $v_o(t)$, cuando la entrada es

i) $v_i(t) = 100\text{V}\cos(\omega_0 t)$.

ii) $v_i(t) = 1\text{V}\,\text{sen}(\omega_0 t/10)$.

iii) $v_i(t) = 0{,}01\text{V}\cos(\omega_0 t/100 + \pi/2)$.

SISTEMAS LINEALES 1: SEGUNDO PARCIAL 2006

1

Problema 1:

a) Los polos de $H(j\omega)$ son las soluciones de $(j\omega)^2+2\zeta\omega_n(j\omega)+\omega_n^2=0$

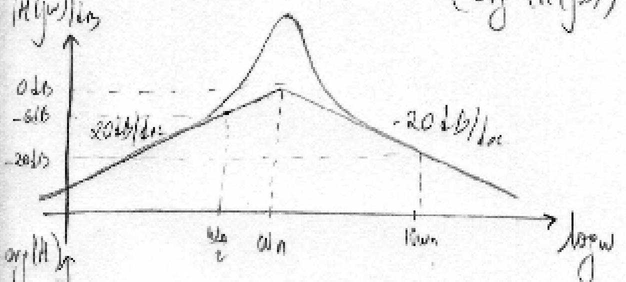
$$\Rightarrow (j\omega) = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2-4\omega_n^2}}{2} \underset{\zeta^2-1<0}{=} -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \Rightarrow \text{Si } \boxed{z = \underbrace{\zeta\omega_n}_{\alpha} + j\underbrace{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}_{\beta}}$$

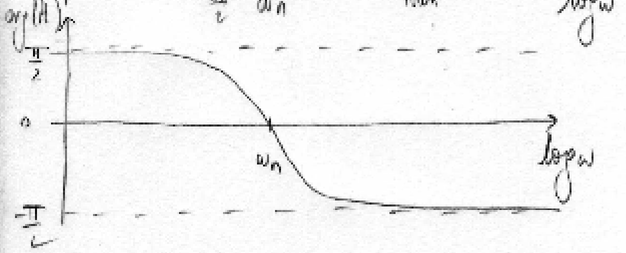
$$\Rightarrow (j\omega)^2+2\zeta\omega_n(j\omega)+\omega_n^2 = (j\omega+z)(j\omega+\bar{z})$$

b) $H(j\omega) = \dfrac{\omega_n(j\omega)}{(j\omega)^2+2\zeta\omega_n(j\omega)+\omega_n^2}$ Ceros: 0, Polos: complejos conjugados con amortiguamiento ζ y frecuencia natural ω_n.

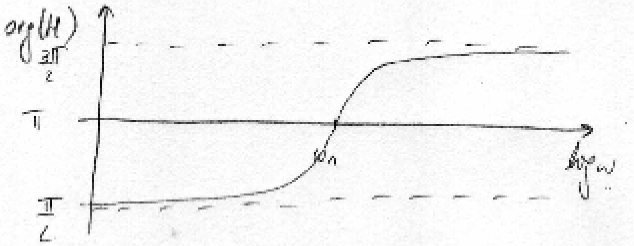
Si $\omega \ll \omega_n \Rightarrow H(j\omega) \simeq \dfrac{j\omega}{\omega_n} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq 20\log\omega - 20\log\omega_n \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) \simeq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Si $\omega \gg \omega_n \Rightarrow H(j\omega) \simeq -j\dfrac{\omega_n}{\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq 20\log\omega_n - 20\log\omega \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) \simeq \dfrac{-\pi}{2} \text{ ó } \cancel{\dfrac{3\pi}{2}} \end{cases} \leftarrow H(j\omega_n) = \dfrac{1}{2\zeta}$





Si $\zeta<0$ el módulo no cambia (depende de ζ^2). Cambia la fase donde hay un adelanto de π



c) $|H(j\omega_n)|_{dB} = 20\text{dB} \Rightarrow |H(j\omega_n)| = 10 = \dfrac{1}{2\zeta_0} \Rightarrow \boxed{\zeta_0 = \dfrac{1}{20}}$

d) $H\left(j\dfrac{\omega_n}{2}\right) = \dfrac{j\frac{\omega_n^2}{2}}{\omega_n^2 - \frac{\omega_n^2}{4} + j\frac{\omega_n^2}{20}} = \dfrac{j}{\frac{3}{2}+\frac{j}{10}} \Rightarrow \left|H\left(j\dfrac{\omega_n}{2}\right)\right|_{real} = -3{,}541\text{ dB}$

$\left|H\left(j\dfrac{\omega_n}{2}\right)\right|_{asin} = -6\text{dB} \Rightarrow \boxed{D_{\frac{\omega_n}{2}} = 2{,}459\text{ dB}}$

$|H(j\omega_n)|_{real} = 20\text{dB}, \quad |H(j\omega_n)|_{asin} = 0\text{dB} \Rightarrow \boxed{D_{\omega_n} = 20\text{ dB}}$

$H(j10\omega_n) = \dfrac{j10\omega_n^2}{\omega_n^2 - 100\omega_n^2 + j\omega_n^2} = \dfrac{10j}{-99+j} \Rightarrow \begin{matrix} |H(j10\omega_n)|_{real} = -19{,}913\text{ dB} \\ |H(j10\omega_n)|_{asin} = -20\text{dB} \end{matrix} \Rightarrow \boxed{D_{10\omega_n} = 0{,}087\text{dB}}$

Problema 2: (2)

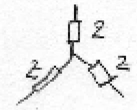
a) Para cualquiera de los dos esquemas de conexión de la carga, se tiene que $P = 3|V'|^2 \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{Z^*}\right\}$

donde V' es el voltaje de fase (en bornes de la carga).

$\Rightarrow$ Para cargas en estrella $|V'| = |V_i| \Rightarrow P = 3|V_i|^2 \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{Z^*}\right\}$

Para cargas en triángulo $|V'| = \sqrt{3}|V_i| \Rightarrow P = 9|V_i|^2 \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{Z^*}\right\}$

Para minimizar la potencia activa uniría en estrella



Sean $V_1 = V_e e^{j0}$, $V_2 = V_e e^{j\frac{2\pi}{3}}$, $V_3 = V_e e^{j\frac{4\pi}{3}}$ fasores eficaces asociados a las fuentes

$\Rightarrow$ las corrientes de línea resultan $I_i = \frac{V_i}{Z} = \frac{V}{|Z|} e^{j(\arg(V_i) - \varphi)}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} i_1(t) = \sqrt{2}\,\frac{V}{|Z|}\cos(\omega t - \varphi) \\ i_2(t) = \sqrt{2}\,\frac{V}{|Z|}\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) \\ i_3(t) = \sqrt{2}\,\frac{V}{|Z|}\cos\left(\omega t + \frac{4\pi}{3} - \varphi\right) \end{cases}}$$

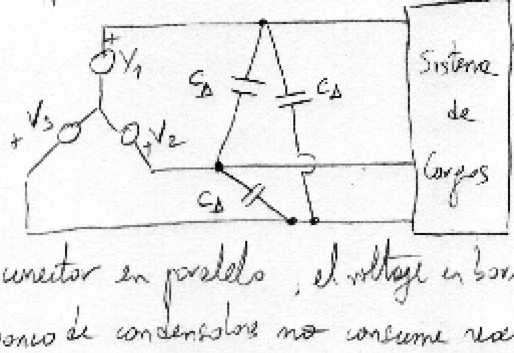
b) (i) $Q = 3\,\mathrm{Im}\{Z\}|I_i|^2 \Rightarrow \boxed{Q = 3\frac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}V^2}$

(ii) La carga es inductiva $\Rightarrow$ compenso con un banco de condensadores en paralelo a las fuentes. Los dimensiono de manera tal que entreguen la potencia reactiva originalmente consumida por las cargas a las fuentes $\Rightarrow Q_c + Q = 0$

Suponiendo un conexionado en estrella $\Rightarrow Q_c = -3C_\lambda \omega V^2 \Rightarrow \boxed{C_\lambda = \frac{L}{R^2 + L^2\omega^2}}$

(iii) Recordando el resultado de transfiguración estrella-triángulo: $Z_\lambda = \frac{Z_\Delta}{3}$

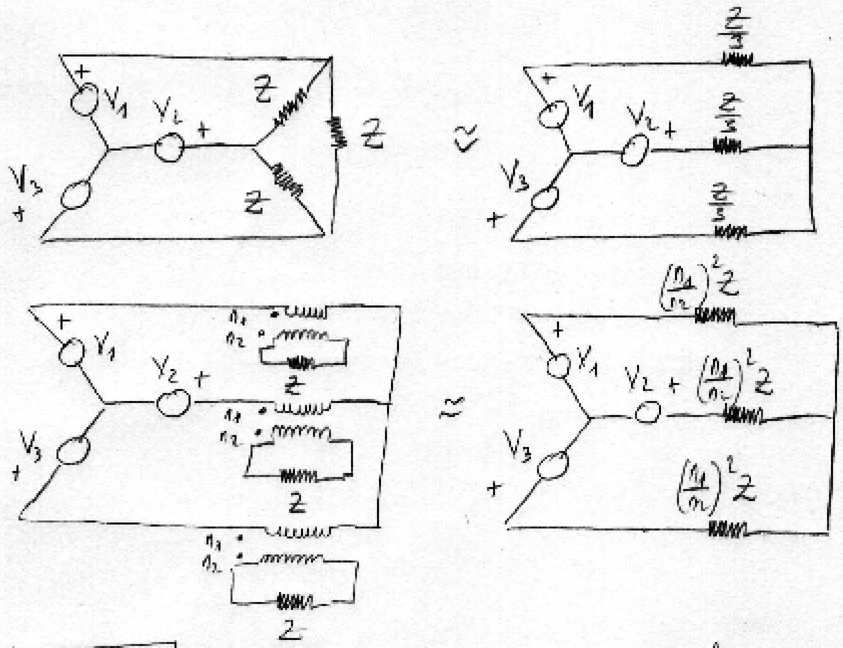
$\Rightarrow \frac{1}{C_\lambda j\omega} = \frac{1}{3C_\Delta j\omega} \Rightarrow C_\Delta = \frac{C_\lambda}{3}$ y compenso con un banco en triángulo para minimizar el valor de los componentes.



(iv) La potencia activa no cambia ya que al conectar en paralelo, el voltaje en bornes de las cargas no cambia. Además notar que el banco de condensadores no consume activa:

$P = 3\,\mathrm{Re}\{Z\}|I_i|^2 \Rightarrow \boxed{P = 3\frac{R}{R^2 + L^2\omega^2}V^2}$

c 3

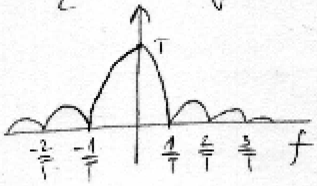


$\Rightarrow \boxed{\frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}}$ $\quad \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ por lo cual puede elegirse $n_2 = 173$ y $n_1 = 100$

Problema 3: 4

a) $\mathcal{F}[p_T(t)](f) = \int_{-\infty}^{\infty} p_T(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi f t}\, dt = \left.\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f}\right|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} \triangleq T\,\mathrm{sinc}(fT)$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}[p_T(t)](f) = T\,\mathrm{sinc}(fT)}$

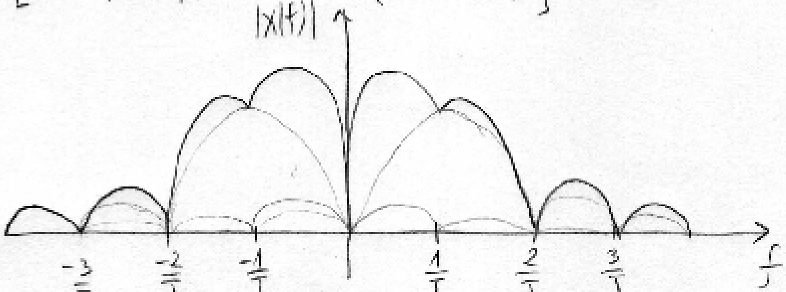


b) $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x T)}{\pi x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[p_T(t)](x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[p_T(t)](x)\, e^{j2\pi x t}\Big|_{t=0} dx = \overline{\mathcal{F}}\left\{\mathcal{F}[p_T(t)](x)\right\}(t=0)$

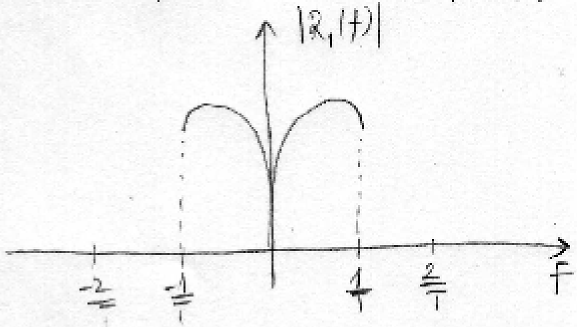
$\Rightarrow I = p_T(t=0) = 1$ que claramente no depende del ancho del pulso.

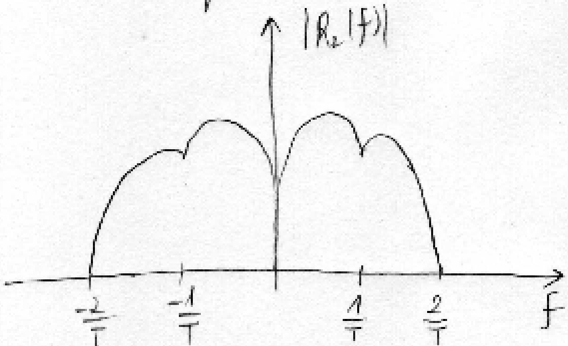
c) $x(t) = p_T(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \Rightarrow X(f) = T\,\mathrm{sinc}(fT) * \left[\frac{\delta(f-\frac{1}{T}) + \delta(f+\frac{1}{T})}{2}\right]$

$\Rightarrow X(f) = \frac{T}{2}\left[\mathrm{sinc}\left((f-\tfrac{1}{T})T\right) + \mathrm{sinc}\left((f+\tfrac{1}{T})T\right)\right]$



Tras los respectivos filtrados pasabajos se tienen los espectros de $r_1(t)$ y $r_2(t)$



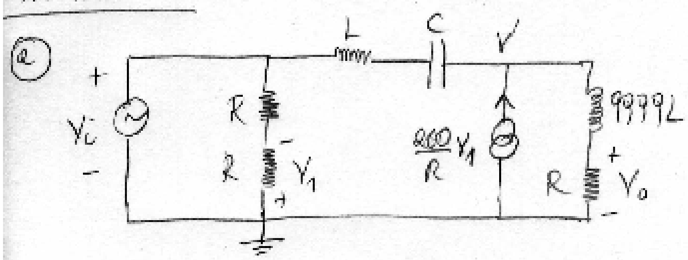


Por el teorema de Parseval la energía de la señal $E = \int_{-\infty}^{\infty} |r_i(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |R_i(f)|^2 df$ y es claro que $r_2(t)$ tiene mayor energía ya que el área bajo la curva de su espectro es mayor.

Problema 4:

5

a



De los divisores de tensión:

$$V_1 = -\frac{V_i}{2}$$

$$V' = \frac{9999Lj\omega + R}{R} V_o$$

Planteando la ecuación de nudos: $\dfrac{V_i - V'}{Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega}} + \dfrac{200}{R}V_1 = \dfrac{V_o}{R}$

Eliminando V_1 y V' $\Rightarrow V_i RCj\omega - (9999Lj\omega + R)Cj\omega V_o = (LC(j\omega)^2 + 1)V_o + 100(LC(j\omega)^2 + 1)V_i$

$$\Rightarrow V_i[-100LC(j\omega)^2 + RC(j\omega) - 100] = V_o[10000LC(j\omega)^2 + RC(j\omega) + 1]$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = -\frac{1}{100} \cdot \frac{(j\omega)^2 - \frac{1}{100}\frac{R}{L}(j\omega) + \frac{1}{LC}}{(j\omega)^2 + \frac{1}{10000}\frac{R}{L}(j\omega) + \frac{1}{10000LC}}$$

Si $\frac{L}{R} = \frac{1}{100\omega_o}$, $RC = \frac{100}{\omega_o} \Rightarrow \frac{1}{LC} = \omega_o^2$

$$\Rightarrow \boxed{H(j\omega) = -\frac{1}{100} \frac{(j\omega)^2 - \omega_o(j\omega) + \omega_o^2}{(j\omega)^2 + \frac{\omega_o}{100}(j\omega) + \frac{\omega_o^2}{10000}}}$$

b Ceros: complejos conjugados con $\omega_n = \omega_o$ y $\xi = \frac{1}{2}$

Polos: complejos conjugados con $\omega_n = \omega_o$ y $\xi = \frac{1}{2}$

Si $\omega \ll \frac{\omega_o}{100} \Rightarrow H(j\omega) \simeq -100 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq 40\,dB \\ \arg(H(j\omega)) \simeq \pi \end{cases}$

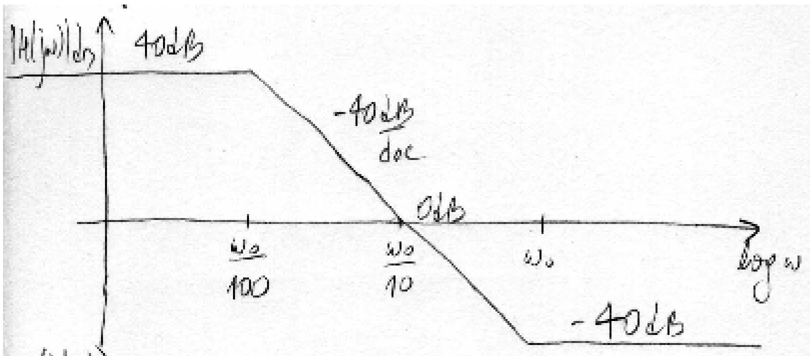
Si $\frac{\omega_o}{100} \ll \omega \ll \omega_o \Rightarrow H(j\omega) \simeq \frac{1}{100}\frac{\omega_o^2}{\omega^2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq 20\log\left(\frac{\omega_o^2}{100}\right) - 40\log\omega\ dB \\ \arg(H(j\omega)) \simeq 0 \text{ ó } \cancel{2\pi} \end{cases}$

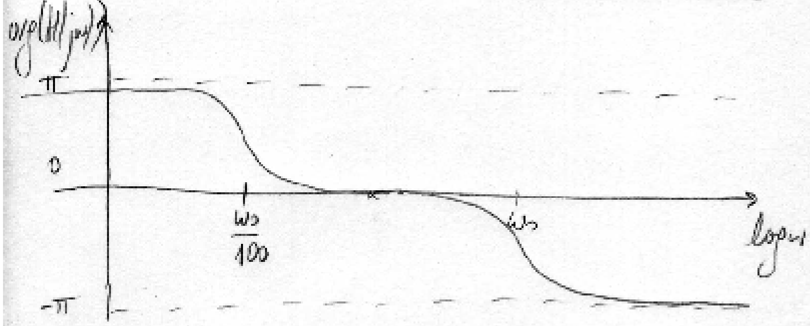
$$H\left(j\frac{\omega_o}{100}\right) \simeq -\frac{1}{\cancel{100}} \frac{\omega_o^2}{j\frac{\omega_o^2}{\cancel{10000}}} = j100 = 100\angle\frac{\pi}{2}$$

Si $\omega \gg \omega_o \Rightarrow H(j\omega) \simeq -\frac{1}{100} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq -40\,dB \\ \arg(H(j\omega)) \simeq \cancel{\pi} \text{ ó } -\pi \end{cases}$

$$H(j\omega_o) \simeq -\frac{1}{100} \cdot \frac{-j\cancel{\omega_o^2}}{\cancel{-\omega_o^2}} = \frac{-j}{100} = \frac{1}{100}\angle\frac{-\pi}{2}$$

5





c) (i) Observando que en baja frecuencia, la ganancia es de 40dB, y luego la caída es a $-40\frac{dB}{dec}$, se tiene que una década por arriba de $\frac{\omega_0}{100}$ la ganancia es de 0dB $\Rightarrow$ $\boxed{\text{La banda de amplificación es } \left(0, \frac{\omega_0}{10}\right)}$

(ii) Del diagrama de fase y por la simetría de la transferencia ($\zeta = \frac{1}{2}$ en numerador y denominador) se tiene que $\arg\left(H\left(j\frac{\omega_0}{10}\right)\right) = 0 \Rightarrow$ V_o estará en fase con V_i si la frecuencia de la entrada es $\boxed{\frac{\omega_0}{10}}$

d) $$H\left(j\frac{\omega_0}{10}\right) = \frac{-1}{100}\,\frac{-\frac{\omega_0^2}{100} - j\frac{\omega_0^2}{10} + \omega_0^2}{-\frac{\omega_0^2}{100} + j\frac{\omega_0^2}{1000} + \frac{\omega_0^2}{10000}} = 1$$ con lo cual se verifica que $$\begin{cases} \left|H\left(j\frac{\omega_0}{10}\right)\right|_{dB} = 0 \\ \arg\left(H\left(j\frac{\omega_0}{10}\right)\right) = 0 \end{cases}$$

e) (i) $H(j\omega_0) \approx \frac{1}{100} \angle -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{v_0(t) = 1V\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)}$

(ii) $H\left(j\frac{\omega_0}{10}\right) = 1 \Rightarrow \boxed{v_0(t) = 1V\sin\left(\frac{\omega_0 t}{10}\right)}$

(iii) $H\left(j\frac{\omega_0}{100}\right) \simeq 100 \angle \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{v_0(t) = -1V\cos\left(\frac{\omega_0 t}{100}\right)}$