Sistemas Lineales 1
Segundo parcial, julio 2002

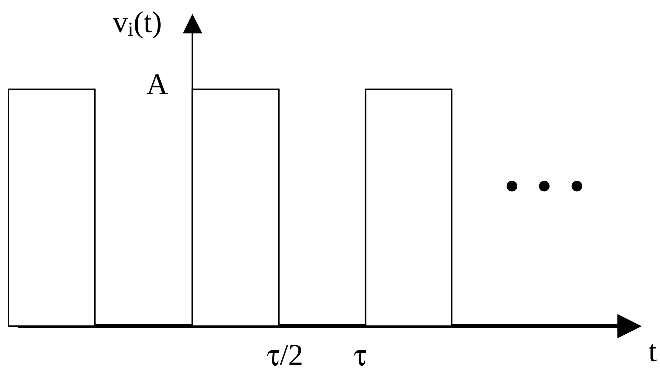
Recomendaciones generales:
Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.
En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar de problema y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.
Justificar claramente los pasos realizados para resolver los problemas.
Hacer problemas distintos en hojas separadas.
Poner el nombre en todas las hojas.
En lo posible usar las hojas de un solo lado.
Se recuerda que la prueba es **individual**.

Problema 1 (10 puntos)

a) Hallar la transformada de Fourier de una función periódica seccionalmente continua en función de sus coeficientes de Fourier.

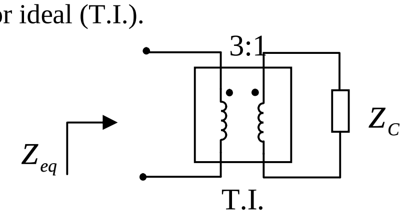
b) Sea un sistema lineal e invariante en el tiempo de respuesta al impulso h(t), mostrar que si a la entrada se inyecta un fasor V_i, de frecuencia angular ω la salida es el fasor $V_o = V_i.H(\omega/2\pi)$, donde H(f) es la Transformada de Fourier de h(t).

c) Sea el sistema lineal e invariante en el tiempo de respuesta al impulso: $h(t)=\dfrac{sen\left(p\,.\,{}^{4t}/_{t}\right)}{p\,t}={}^{4}/_{t}\,.\mathrm{sinc}\left({}^{4t}/_{t}\right)$. Hallar la Transferencia del sistema (TdF de h) y la respuesta del sistema a la entrada de la figura:



Problema 2 (20 puntos)

a) **i)** Dado el circuito de la figura, calcular la impedancia equivalente en bornes A, B en función de Z_C y la relación de vueltas del transformador ideal (T.I.).



ii) Dado el circuito de la figura1 en donde aparecen 3 transformadores ideales con la misma relación de vueltas que en la parte i), demostrar que el circuito de la figura 2 es un circuito equivalente a este.

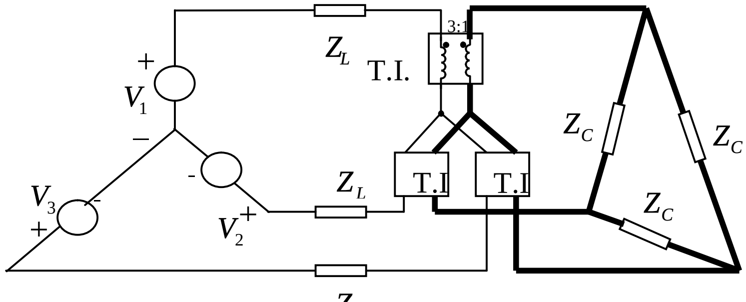


Figura 1

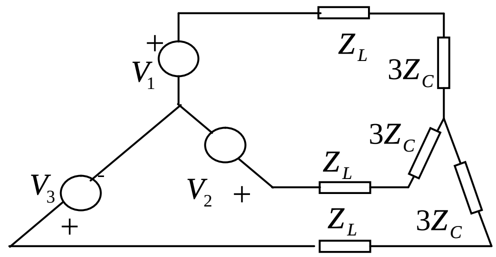


Figura 2

Sugerencia: Razonarlo por fase. **Justificar**

b) Sea el circuito de la figura2 y considerando que:

$$v_1(t) = 220\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(100pt)$$
$$v_2(t) = 220\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(100pt + 2p/3)$$
$$v_3(t) = 220\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(100pt + 4p/3)$$

$$Z_L = R_L + 1/C_L wj$$
$$Z_C = R_C + L_C wj$$
$$R_L = 1\Omega \qquad C_L = 39\,mf$$
$$R_C = 33\Omega \qquad L_C = 320\,mHy$$

i) Realizar un diagrama fasorial que involucre V_1 (fasor de voltaje de la fuente 1), V_2 (fasor de voltaje de la fuente 2), V_3 (fasor de voltaje de la fuente 3), I_1 (fasor de corriente de la linea 1), I_2 (fasor de corriente de la linea 2) e I_3 (fasor de corriente de la linea 3).

ii) ¿La carga que ve el sistema de fuentes es inductiva o capacitiva? Justificar.

iii) Hallar las expresiones temporales $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $i_3(t)$ de los fasores I_1, I_2 e I_3 respectivamente.

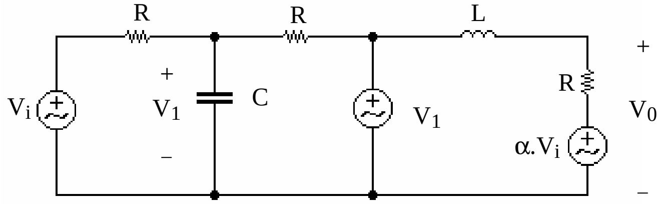
c) i) Enunciar el Teorema de Blondell para un sistema polifásico. El enunciado implica hipótesis, tesis y la definición de los parámetros que se involucran.

ii) Calcular la potencia activa y reactiva consumida al sistema de fuentes utilizando el teorema de Blondell.

iii) ¿De acuerdo con la parte anterior, qué elemento colocaría para compensar la reactiva teniendo en cuenta que solamente son accesibles los bornes de las fuentes, y el conexionado se realiza en estrella?; ¿cuál sería el valor del mismo?

<u>Problema 3</u> **(18 puntos)**

a) Hallar la transferencia $H(jw) = \dfrac{V_0(jw)}{V_i(jw)}$ del siguiente circuito (las dos fuentes de la derecha son dependientes):



b) Verificar que puede escribirse como $H\left(jw\right)=a\,.\dfrac{\left(jw\right)^2+\dfrac{1}{RC}\,jw+\dfrac{1}{aLC}}{\left(jw+\dfrac{1}{RC}\right)\left(jw+\dfrac{R}{L}\right)}$.

c) Para el caso $a=\dfrac{1}{100}$, $\dfrac{1}{RC}=10$, $\dfrac{R}{L}=\dfrac{1}{10}$, hallar:

i. los Diagramas de Bode asintóticos de $H\left(jw\right)$, indicando claramente los pasos utilizados en su construcción. Señalar las abscisas, ordenadas y pendientes notables.

ii. hallar la distancia aproximada en decibeles entre el Bode de módulo real y el asintótico para ω=0,1 y ω=10.

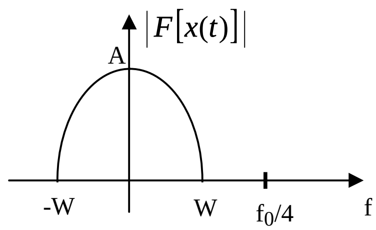
iii. la respuesta $v_0(t)$ en régimen del sistema para la entrada $v_i(t)=sen(10\ t)$.

Problema 4 (12 puntos)

a) Hallar la Transformada de Fourier de la siguiente distribución temperada:

$$U(t)=\frac{1}{f_0}\sum_{n\in Z} d\left(t-nT_0\right) \quad , \quad f_0=\frac{1}{T_0}$$

b) Hallar y dibujar el espectro de la señal $s(t)=x(t).U(t)$, siendo $x(t)$ la señal cuyo espectro se muestra en la figura.



c) Hallar y dibujar el espectro de la señal $q(t)=s(t).\left[1+2.\cos(p\ f_0\,t)\right]$.

d) Hallar y graficar en el tiempo la señal $r(t)=q(t)*\cos(p\ f_0\,t)$.

Observación:

- al dibujar los espectros, indicar ejes y valores notables de abscisas y ordenadas.
- enunciar claramente las propiedades utilizadas de la Transformada de Fourier.

SISTEMAS LINEALES 1: SEGUNDO PARCIAL 2002

(1)

Problema 1:

(a) Sea $g(t)$ periódica (período T) y seccionalmente continua. Sean $c_n(g)$ sus coeficientes de Fourier.

$$\Rightarrow g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g) e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[g(t)] = \mathcal{F}\Big[\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g) e^{j\frac{2\pi}{T}nt}\Big] \overset{\text{linealidad}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)\mathcal{F}\big[e^{j\frac{2\pi}{T}nt}\big] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)\delta(f-\tfrac{n}{T})$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}[g(t)] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)\delta(f-\tfrac{n}{T})}$$

(b) Sea un SLIT de respuesta impulsiva $h(t)$. Se le inyecta la señal compleja $v_i(t) = V_i\, e^{j\omega t}$, V_i fasor asociado a la entrada $v_i(t)$.

$\Rightarrow$ Sabemos que la salida se computa como: $v_o(t) = h(t) * v_i(t)$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[v_o(t)] = \mathcal{F}[h(t)*v_i(t)] = \mathcal{F}[h(t)].\mathcal{F}[v_i(t)] = H(f).\mathcal{F}[V_i e^{j\omega t}]$$

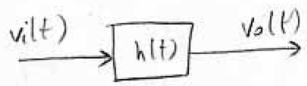
$$= H(f) V_i\, \delta(f-\tfrac{\omega}{2\pi}) = H(\tfrac{\omega}{2\pi}) V_i\, \delta(f-\tfrac{\omega}{2\pi})$$

Donde se usó que $\alpha(f)\,\delta(f-a) = \alpha(a)\,\delta(f-a)$

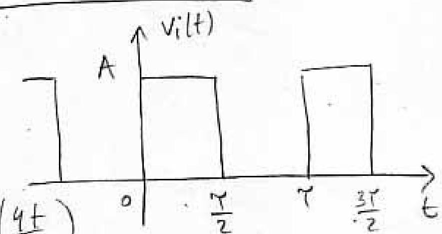
Antitransformando tenemos que: $v_o(t) = H(\frac{\omega}{2\pi}) V_i\, e^{j\omega t}$

Se deduce que el fasor asociado a la salida es $\boxed{V_o = H(\frac{\omega}{2\pi}) V_i}$

(c)



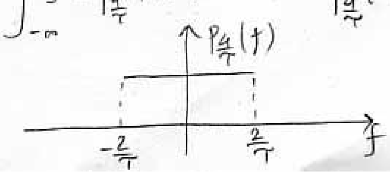
$h(t) = \frac{4}{\tau}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{4t}{\tau}\right)$



Suponemos conocido el resultado: $\mathcal{F}[p_{\frac{4}{\tau}}(f)] = \frac{4}{\tau}\mathrm{sinc}\left(\frac{4t}{\tau}\right)$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[h(t)] = \mathcal{F}\Big[\tfrac{4}{\tau}\mathrm{sinc}\big(\tfrac{4t}{\tau}\big)\Big] = \mathcal{F}\big[\mathcal{F}[p_{\frac{4}{\tau}}(f)]\big] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[p_{\frac{4}{\tau}}(f)]\, e^{j2\pi(-f)t}\, dt = p_{\frac{4}{\tau}}(-f)$$

Como el pulso es una función par: $\boxed{\mathcal{F}[h(t)] = p_{\frac{4}{\tau}}(f)}$



2

Se que la transformada de Fourier de la salida en régimen es:

$V_o(f) = H(f)V_i(f)$ con $H(f) = \Pi_{\frac{4}{\tau}}(f)$ filtro pasabajos ideal de frecuencia de corte $\frac{2}{\tau}$

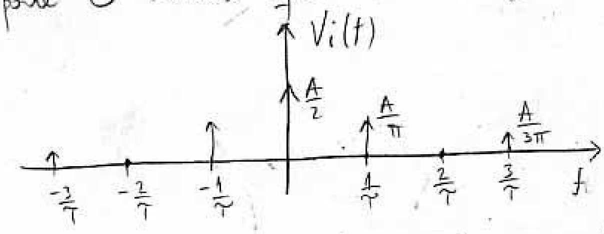
Calculando los coeficientes de Fourier de $v_i(t)$:

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^{\tau} v_i(t)\,dt = \frac{A}{2}$$

$$c_n = \frac{1}{\tau}\int_0^{\frac{\tau}{2}} A e^{-j\frac{2\pi}{\tau}nt}\,dt = \frac{-A}{j2\pi n} e^{-j\frac{2\pi}{\tau}nt}\Big|_0^{\frac{\tau}{2}} = \frac{A}{j2\pi n}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$\Rightarrow c_n = \begin{cases} \frac{A}{2} & n=0 \\ \frac{A}{j\pi n} & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$$

De la parte ⓐ sabemos que $V_i(f) = \frac{A}{2}\delta(f) + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ \text{impar}}} \frac{A}{j\pi n}\delta(f-\frac{n}{\tau})$



El filtro pasabajos solo dejará pasar la componente de continua y el primer armónico.

Además en la banda pasante $H(f) = 1$

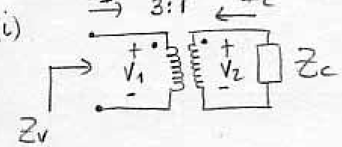
$$\Rightarrow V_o(f) = \frac{A}{2}\delta(f) + \left[\frac{A}{j\pi}\delta(f-\frac{1}{\tau}) - \frac{A}{j\pi}\delta(f+\frac{1}{\tau})\right]$$

Antitransformando: $v_o(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{j\pi}\left(e^{j\frac{2\pi t}{\tau}} - e^{-j\frac{2\pi t}{\tau}}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{v_o(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}$$

Problema 2: (3)

(a) (i)



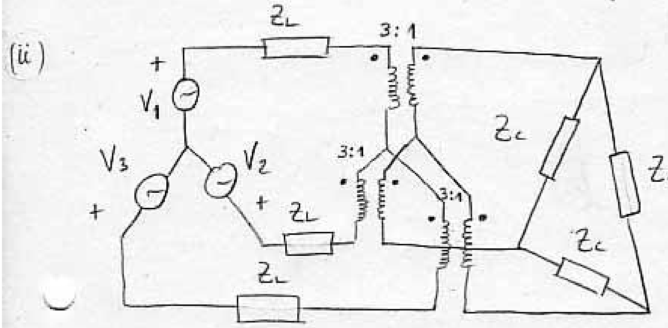
Las relaciones del transformador ideal son: $V_1 = 3V_2$

$3I_1 = -I_2$

Además, $V_2 = -Z_c I_2$

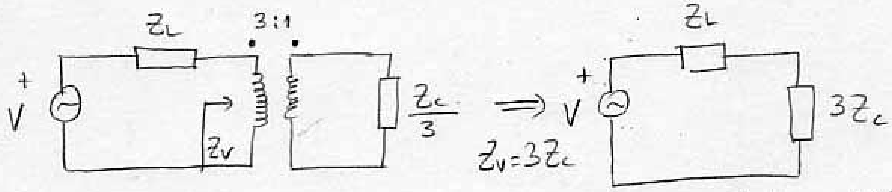
$\Rightarrow V_1 = -3Z_c I_2 = 9Z_c I_1 \qquad Z_v = \frac{V_1}{I_1} \Rightarrow \boxed{Z_v = 9Z_c}$

(ii)

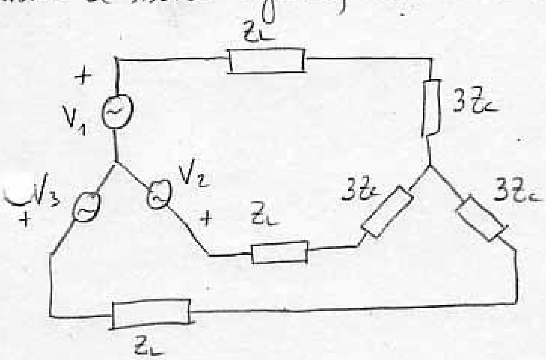


Transfigurando la carga en triángulo, obtenemos una carga en estrella con impedancias de valor $\frac{Z_c}{3}$.

El equivalente por fase resulta:



Volviendo al sistema trifásico, obtenemos el circuito equivalente pedido:



$v_1(t) = 220\sqrt{2}\sin(100\pi t)$

$v_2(t) = 220\sqrt{2}\sin(100\pi t + \frac{2\pi}{3})$

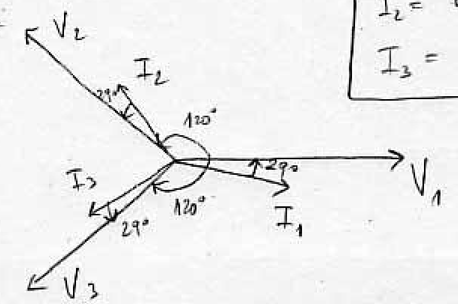
$v_3(t) = 220\sqrt{2}\sin(100\pi t + \frac{4\pi}{3})$

$Z_L = R_L + \frac{1}{C_L j\omega} \qquad R_L = 1\Omega, \; C_L = 39\mu F$

$Z_c = R_c + L_c j\omega \qquad R_c = 33\Omega, \; L_c = 320 mHy$

(b) (i) $V_1 = 220V\angle 0°$, $V_2 = 220V\angle 120°$, $V_3 = 220V\angle 240°$

$I_i = \frac{V_i}{Z_L + 3Z_c} \qquad i = 1,2,3 \qquad \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} I_1 = 0{,}91\,A\angle -66° \\ I_2 = 0{,}91\,A\angle -66°+120° \\ I_3 = 0{,}91\,A\angle -66°+240° \end{array}}$



(4)

(ii) En cada fase, la corriente atrasa al fasor de la fuente

⇒ la carga que ve la fuente es inductiva

(iii)

$$\boxed{\begin{aligned} i_1(t) &= \sqrt{2}\ 0{,}91\ A\ \sin(100\pi t - 1{,}14) \\ i_2(t) &= \sqrt{2}\ 0{,}91\ A\ \sin\left(100\pi t - 1{,}14 + \tfrac{2\pi}{3}\right) \\ i_3(t) &= \sqrt{2}\ 0{,}91\ A\ \sin\left(100\pi t - 1{,}14 + \tfrac{4\pi}{3}\right) \end{aligned}}$$

(c) (i) Sea un sistema polifásico alimentado por una fuente en estrella no necesariamente equilibrada ni perfecta y con una carga cualquiera, con la única condición de que si la carga está en estrella, no existe hilo neutro. Sea X un punto de referencia cualquiera y sea V_{jX} la tensión entre la línea j y el punto X. Entonces la potencia activa total consumida al sistema de fuentes viene dada por $\boxed{P = \sum_{j=1}^{q} Re[V_{jX}\, \overline{I}_j]}$

donde I_j es la corriente por la línea j.

(ii) Considero el punto X coincidente con la línea 3.

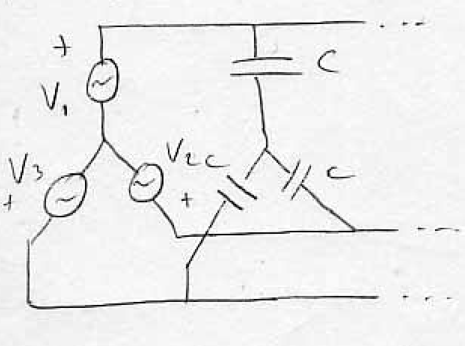
$$\Rightarrow P = \sum_{j=1}^{2} Re[V_{j3}\, \overline{I}_j] = Re[(V_1 - V_3)\overline{I}_1 + (V_2 - V_3)\overline{I}_2] \Rightarrow \boxed{P = 248\ W}$$

$V_{33} = 0$

$$\Rightarrow Q = \sum_{j=1}^{2} Im[V_{j3}\, \overline{I}_j] = Im[(V_1 - V_3)\overline{I}_1 + (V_2 - V_3)\overline{I}_2] \Rightarrow \boxed{Q = 547\ Var}$$

$V_{33} = 0$

(iii) Conecto un banco de condensadores en estrella en paralelo con las fuentes, de forma de que entreguen la potencia reactiva Q consumida.



$$\Rightarrow Q_C + Q = 0$$

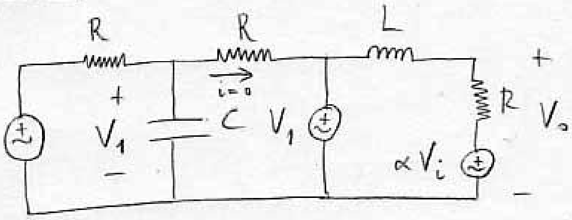
$$-3C\omega|V|^2 + Q = 0$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{3\omega|V|^2} \Rightarrow \boxed{C = 12\ \mu F}$$

5

Problema 3:

a)



La diferencia de tensión en bornes de la resistencia central es 0. Por lo tanto, no circula corriente por ella. Del divisor de tensiones: $V_1 = \dfrac{V_i}{RCj\omega+1}$

Igualando las corrientes a través de L y R: $\dfrac{V_1-V_o}{Lj\omega} = \dfrac{V_o-\alpha V_i}{R}$

$$\Rightarrow V_i\left[\frac{1}{RCj\omega+1} + \frac{\alpha Lj\omega}{R}\right] = V_o\left[1+\frac{Lj\omega}{R}\right] \Rightarrow V_i\left[\frac{R+\alpha Lj\omega+\alpha RLC(j\omega)^2}{(RCj\omega+1)\cancel{R}}\right] = V_o\left[\frac{Lj\omega+R}{\cancel{R}}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{V_o}{V_i} = \frac{\alpha RLC(j\omega)^2+\alpha L(j\omega)+R}{(RC(j\omega)+1)(L(j\omega)+R)}}$$

b) Dividiendo numerador y denominador entre αRLC se obtiene:

$$\boxed{H(j\omega) = \alpha \cdot \frac{(j\omega)^2+\frac{(j\omega)}{RC}+\frac{1}{\alpha LC}}{\left(j\omega+\frac{1}{RC}\right)\left(j\omega+\frac{R}{L}\right)}}$$

c) (i) $\alpha = \frac{1}{100}$, $\frac{1}{RC} = 10$, $\frac{R}{L} = \frac{1}{10}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{LC} = 1$

$$H(j\omega) = \frac{1}{100}\,\frac{(j\omega)^2+10(j\omega)+100}{(j\omega+10)\left(j\omega+\frac{1}{10}\right)}$$

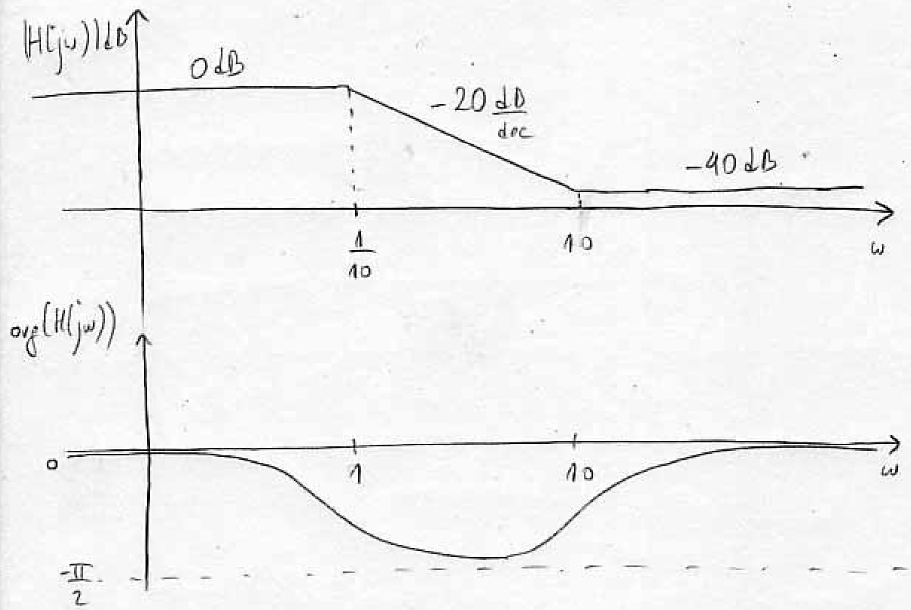
Tengo ceros complejos conjugados con $\omega_n = 10$, $\zeta = \frac{1}{2}$

Para $\omega \ll \frac{1}{10} \Rightarrow H(j\omega) \simeq 1 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq 0\ dB \\ \arg(H(j\omega)) \simeq 0 \end{cases}$

Para $\frac{1}{10} \ll \omega \ll 10 \Rightarrow H(j\omega) \simeq \frac{1}{10j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq -20 - 20\log\omega\ dB \\ \arg(H(j\omega)) \simeq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Para $\omega \gg 10 \Rightarrow H(j\omega) \simeq \frac{1}{100} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq -40dB \\ \arg(H(j\omega)) \simeq 0 \end{cases}$

(6)



(ii) $\left|H(j\tfrac{1}{10})\right|_{\substack{real\\dB}} - \left|H(j\tfrac{1}{10})\right|_{\substack{asín\\dB}} = 20\log\left|\dfrac{H(j\frac{1}{10})_{real}}{H(j\frac{1}{10})_{asín}}\right| = Dist_{\frac{1}{10}}$

$\left|H(j\tfrac{1}{10})\right|_{real} \approx 0{,}707$, $\left|H(j\tfrac{1}{10})\right|_{asín} = 1$

$\Rightarrow \boxed{Dist_{\frac{1}{10}} \approx -3{,}01 \text{ dB}}$

$\left|H(j10)\right|_{\substack{real\\dB}} - \left|H(j10)\right|_{\substack{asín\\dB}} = 20\log\left|\dfrac{H(j10)_{real}}{H(j10)_{asín}}\right| = Dist_{10}$

$\left|H(j10)\right|_{real} \approx 0{,}00707$, $\left|H(j10)\right|_{asín} \approx \dfrac{1}{100}$

$\Rightarrow \boxed{Dist_{10} \approx -3{,}01 \text{ dB}}$

(iii) Sea la entrada $v_i(t) = \sin(10t)$

La salida en régimen será: $v_o(t) = |H(j10)| \sin(10t + \arg(H(j10)))$

$\arg(H(j10)) \simeq -0{,}775 \text{ rad} \approx -44{,}4°$

$\Rightarrow \boxed{v_o(t) = 0{,}00707 \sin(10t - 0{,}775)}$

7

Problema 4:

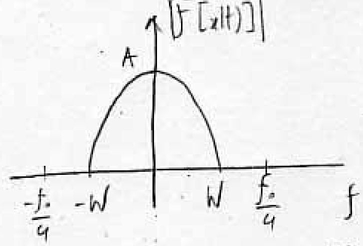
a) Sea la distribución temperada: $U(t) = \frac{1}{f_0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT_0)$, $f_0 = \frac{1}{T_0}$

$$\mathcal{F}[U(t)] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{f_0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t-nT_0)\right] \overset{\text{linealidad}}{=} \frac{1}{f_0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}[\delta(t-nT_0)] = \frac{1}{f_0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-jnT_0 f}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[U(t)] = \frac{1}{f_0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-j\frac{nf}{f_0}}$$

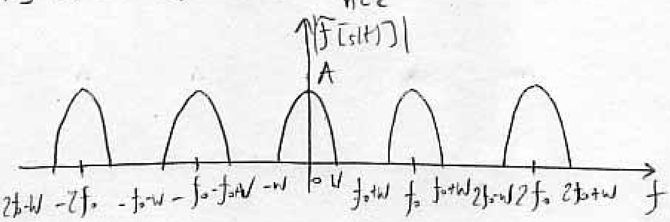
Recordando la Serie de Fourier del peine de Dirac, $\boxed{\mathcal{F}[U(t)] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(f - nf_0)}$

b) $s(t) = x(t)U(t)$



$$\Rightarrow \mathcal{F}[s(t)] = \mathcal{F}[x(t) \cdot U(t)] = \mathcal{F}[x(t)] * \mathcal{F}[U(t)] = X(f) * \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(f - nf_0)$$

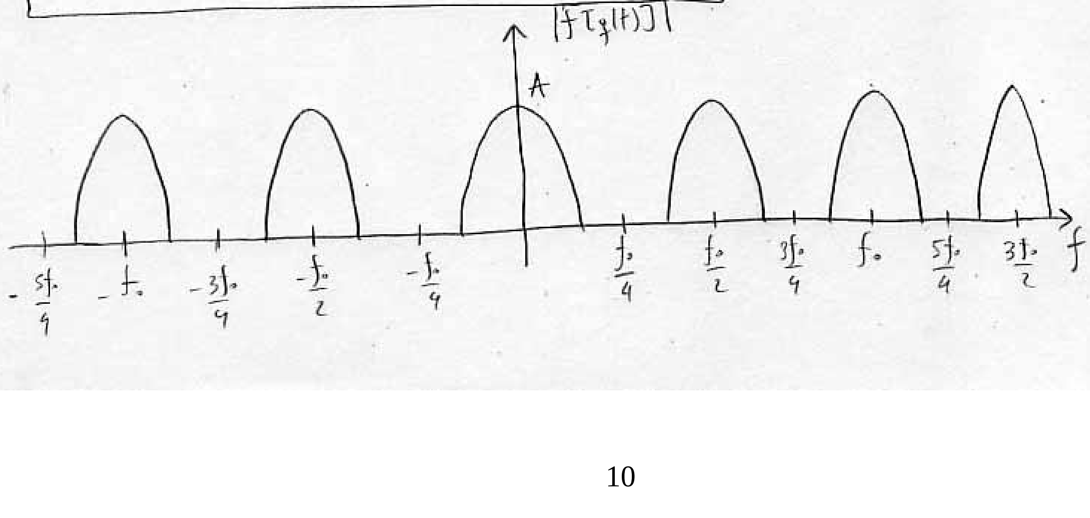
$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}[s(t)] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(f - nf_0)}$$



c) $q(t) = s(t)[1 + \cos(\pi f_0 t)]$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[q(t)] = \mathcal{F}[s(t)] + \mathcal{F}[s(t)\cos(\pi f_0 t)] = S(f) + S(f) * \left(\frac{\delta(f - \frac{f_0}{2}) + \delta(f + \frac{f_0}{2})}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}[q(t)] = S(f) + \frac{S(f - \frac{f_0}{2}) + S(f + \frac{f_0}{2})}{2}}$$



(8)

(d) $r(t) = q(t) * \cos(\pi f_0 t)$.

$$\Rightarrow \mathcal{F}[r(t)] = \mathcal{F}[q(t) * \cos(\pi f_0 t)] = \mathcal{F}[q(t)].\mathcal{F}[\cos(\pi f_0 t)] =$$

$$= Q(f)\left(\frac{\delta(f-\frac{f_0}{2}) + \delta(f+\frac{f_0}{2})}{2}\right) = \frac{Q(\frac{f_0}{2})\delta(f-\frac{f_0}{2}) + Q(-\frac{f_0}{2})\delta(f+\frac{f_0}{2})}{2}$$

$$Q(\tfrac{f_0}{2}) = Q(-\tfrac{f_0}{2}) = A$$

$\Rightarrow$ Antitransformando, tenemos que: $\boxed{r(t) = A\cos(\pi f_0 t)}$ Amplitud A, Período $\frac{2}{f_0}$