Examen de Sistemas Lineales 1
31 de julio del 2007

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente.

Ejercicio 1

a) Se considera la carga que se muestra en la figura 1. Se sabe que a la tensión y frecuencia de trabajo, consume potencia activa P>0 y potencia reactiva Q<0.

i) Hallar una representación *en paralelo* de la impedancia Z. $\left(Z = R_P \parallel jX_P\right)$

ii) Hallar un a representación *serie* de Z $\left(Z = R_S + jX_S\right)$.

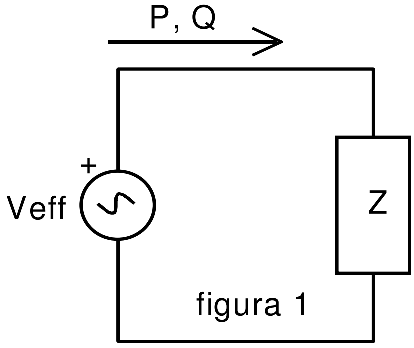


figura 1

Para las siguientes partes, considerar: V_{eff}=220 voltios, P = 1.2 kW, Q=-110 VAR, f=50Hz.

iii) Calcular el factor de potencia de la impedancia Z e indicar si es inductiva o capacitiva.

iv) Representar en un diagrama los fasores de tensión y corriente en la carga.

v) Compensar la potencia reactiva consumida por Z a la fuente, mediante la colocación de un elemento adecuado, que se diseñará. Esta compensación no deberá alterar la potencia activa consumida a la fuente.

vi) Para el sistema compensado, calcular la corriente que entrega la fuente.

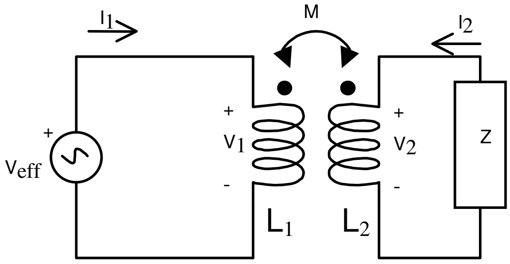


figura 2

b) Se considera el transformador perfecto de la figura 2, que está cargado con la impedancia Z de la parte a).

i) Hallar L_2 para que la corriente del primario esté en cuadratura con la del secundario.

ii) Si V=220 voltios y se trabaja a 50 Hz, bosquejar en un diagrama los fasores V_1, V_2, I_1 e I_2.

Ejercicio 2

a) Hallar las siguientes Transformada de Fourier y Transformada Conjugada de Fourier: $F\,[\delta(t-T_0)](f)$ y $\overline{F}\,[\delta(t-T_0)](f)$.

b) Mostrar que $F\left[\sum_{n\in Z}\delta(t-nT_0)\right](f) = f_0.\sum_{n\in Z}\delta(f-n\,f_0) \quad , \quad f_0 = \dfrac{1}{T_0}$.

c) Calcular $\overline{F}[X(f)](t)$, siendo *X(f)* el filtro pasabajos ideal de frecuencia de corte $f_S/2$:

$$H(f) = \begin{cases} 1 & -\dfrac{f_0}{2} < f < \dfrac{f_0}{2} \\ 0 & |f| > \dfrac{f_0}{2} \end{cases}$$

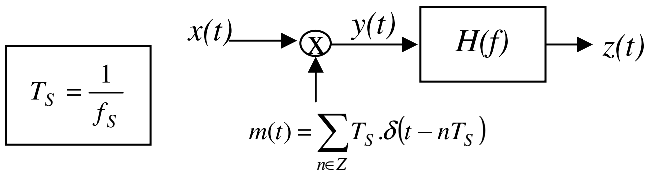


figura 1

d) Se tiene el sistema de la figura 1, donde el bloque *H* es un filtro pasabanda ideal, centrado en la frecuencia $N.f_S$ y de ancho de banda f_S:

$$H(f) = \begin{cases} 1 & N.f_S - \dfrac{f_S}{2} < |f| < N.f_S + \dfrac{f_S}{2} \\ 0 & \textbf{en otro caso} \end{cases}$$

i) Calcular la respuesta al impulso *h(t)* del filtro pasabanda.

ii) Si la señal de entrada *x(t)* es de banda acotada $f_S/2$, bosqueje los espectros de las señales *y(t)* y la salida del sistema *z(t)*.

iii) ¿Cómo es la energía de la señal *z(t)* en relación con la de la entrada?

Examen de Sistemas Lineales 1

31 de julio del 2007

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

Sea a y ω_0 números reales positivos. Consideremos el sistema lineal de transferencia en régimen

$$H(j\omega)=\frac{\left(1+\dfrac{j\omega}{a\omega_0}\right)}{\left(1+\dfrac{j\omega}{\omega_0}\right)}=\frac{1}{a}.\frac{(a\omega_0+j\omega)}{(\omega_0+j\omega)}$$

denominado *adelanto-atraso* (*lead-lag* en inglés). De los Diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$, deducir una condición para el valor a que asegure que el sistema sólo adelanta en fase.

Justificar claramente la respuesta.

Pregunta 2

a) Sea S(t) una distribución. ¿Qué se puede afirmar de S(t) si se sabe que t.S(t)=0?

b) Sea T(t) una distribución que cumple t.T(t) = -t. Hallar T(t) sabiendo que aplicada a una $\varphi(t) \in$ D que en 0 vale 1 [$\varphi(0) = 1$] y que encierra un área A sobre el eje t, da $<T,\varphi> = 0$.

Pregunta 3

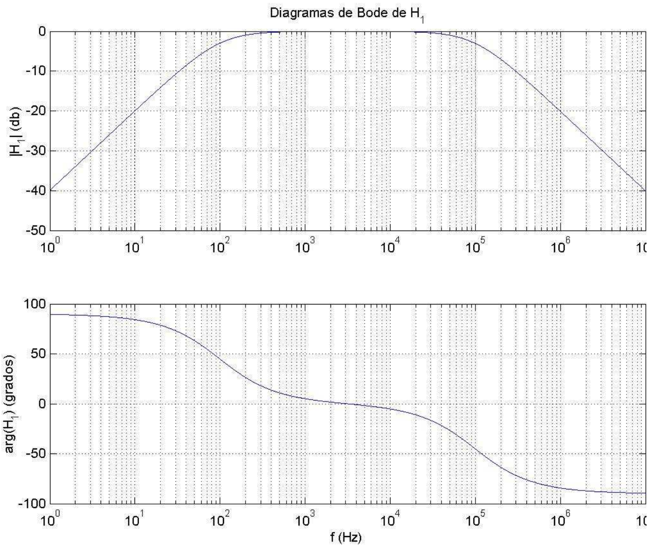
Dado un sistema de fuentes equilibrado y perfecto $V=\begin{Bmatrix} v_1 = V_1\cos(2.\pi.50.t) \\ v_2 = V_2\cos(2.\pi.50.t+\dfrac{2.\pi}{3}) \\ v_3 = V_3\cos(2.\pi.50.t+\dfrac{4.\pi}{3}) \end{Bmatrix}$ en estrella y un sistema de cargas $Z=\begin{Bmatrix} Z_1 = R_1 + jX_1 \\ Z_2 = R_2 + jX_2 \\ Z_3 = R_3 + jX_3 \end{Bmatrix}$ conectado en estrella:

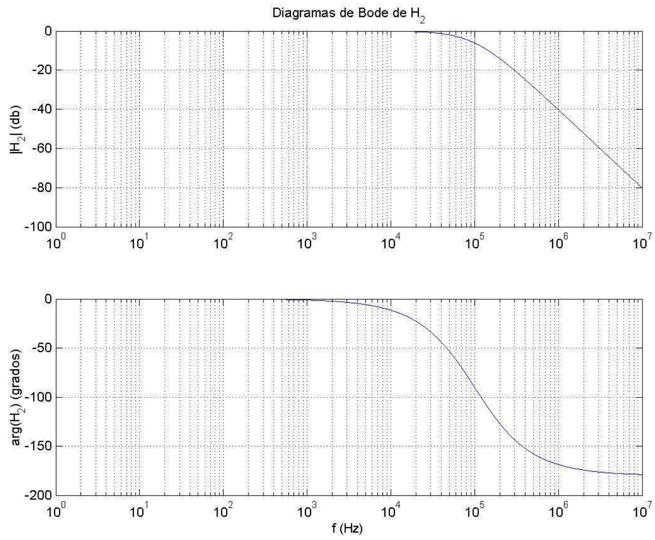
a) Realizar un diagrama fasorial donde aparezcan los fasores asociados a las fuentes y los voltajes de línea.

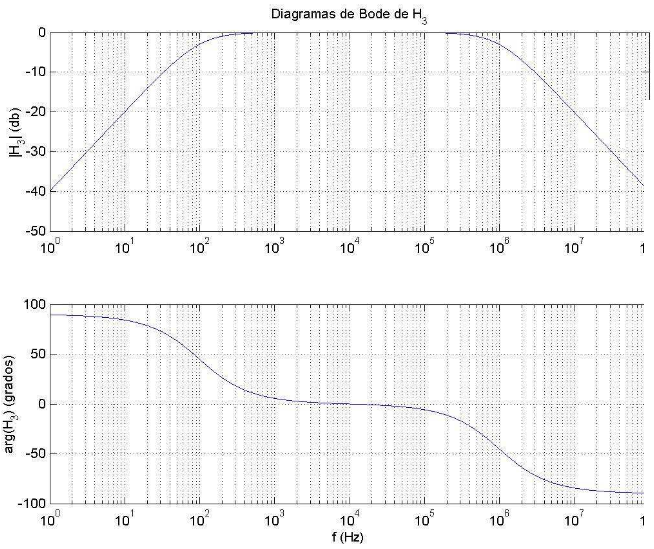
b) Enunciar el teorema de Blondell y describir el Método de los dos Vatímetros.

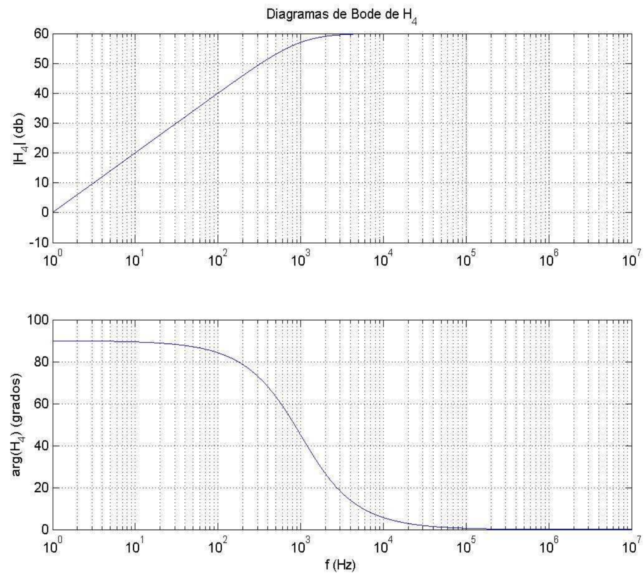
Pregunta 4

Se dispone de cuatro sistemas lineales, descritos por los Diagramas de Bode que se muestran a continuación:









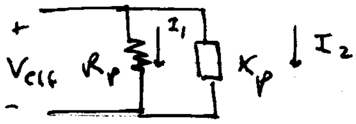
Se desea resolver el siguiente problema:

> Procesar una señal periódica de 10kHz, de manera de obtener una señal de banda acotada incluida en [-200kHz,+200kHz] y de valor medio nulo.

<u>Para cada sistema, indicar si sirve o no, y por qué.</u>

EJERCICIO 1

a) i) MODELO PARALELO:



$$P = V_{eff} \cdot \overline{I_1} = V_{eff} \cdot \frac{\overline{V_{eff}}}{R_p} = \frac{|V_{eff}|^2}{R_p} \Rightarrow R_p = \frac{|V_{eff}|^2}{P}$$

$$jQ = V_{eff} \cdot \overline{I_2} = V_{eff} \cdot \overline{\left(\frac{V_{eff}}{jX_p}\right)} = j\frac{|V_{eff}|^2}{X_p} \Rightarrow X_p = \frac{|V_{eff}|^2}{Q}$$

ii) MODELO SERIE:

$$Z = R_p \,//\, jX_p = \frac{R_p(jX_p)}{R_p + jX_p}$$

$$= j\frac{R_p X_p (R_p - jX_p)}{R_p^2 + X_p^2} =$$

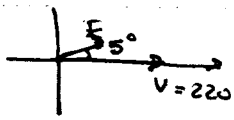
$$= \frac{R_p X_p^2}{R_p^2 + X_p^2} + j\frac{R_p^2 X_p}{R_p^2 + X_p^2}$$

$$\Rightarrow R_s = \frac{R_p X_p^2}{R_p^2 + X_p^2} \overset{\text{sustituyo}}{=} |V_{eff}|^2 \cdot \frac{P}{P^2 + Q^2}$$

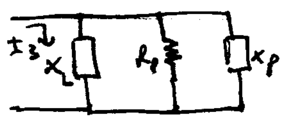
$$X_s = \frac{R_p^2 X_p}{R_p^2 + X_p^2} \overset{\text{sustituyo}}{=} |V_{eff}|^2 \cdot \frac{Q}{P^2 + Q^2}.$$

iii) $\cos(\varphi) = \dfrac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}} = 0.996$. CAPACITIVO POR SER $Q < 0$.

iv) $R_p = 40{,}3\ \Omega \Rightarrow I_1 = 220/40{,}3 = 5{,}45\ A.$
$X_p = -440\ \Omega \Rightarrow I_2 = 220/j(-440) = j0.5\ A.$
$\Big\} \Rightarrow I = 5{,}45 + j0.5\ A.$



v) AGREGO UN ELEMENTO EN PARALELO X_L:



COMPENSACIÓN: $I_3 = -I_2$

$$\Rightarrow I_3 = -j0.5\ A \Rightarrow \frac{V_{eff}}{jX_L} = -j0.5\ A \Rightarrow jX_L = j440\ \Omega$$

ELEMENTO INDUCTIVO CON $X_L = 440\ \Omega \Rightarrow L = \dfrac{440\ \Omega}{\omega} = 1{,}4\ Hy.$

vi) $I_c = I_1 + \cancel{I_2} + \cancel{I_3} = I_1 = 5{,}45\ A.$

b) i) USANDO LA GANANCIA DE CORRIENTE DEL TRANSFORMADOR PERFECTO:

$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{n}{1+\frac{Z_L}{j\omega L_2}} = H_I(j\omega)$$

CON $n = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$ REAL (RELACIÓN DE VUELTAS).

$\Rightarrow$ PARA CUADRATURA NECESITAMOS $H_I(j\omega)$ IMAGINARIO PURO $\Rightarrow 1 + \frac{Z_L}{j\omega L_2} \in \text{Im}$.

$$\Rightarrow \frac{j\omega L_2 + Z_L}{j\omega L_2} \in \text{Im} \Rightarrow j\frac{Z_L - \omega L_2}{-\omega L_2} \in \text{Im} \Rightarrow \boxed{-\omega L_2 + jZ_L \in \mathbb{R}}$$

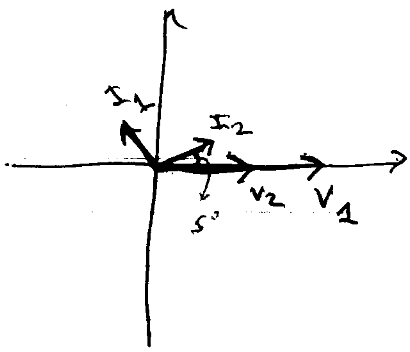
$$Z_L = R_s + jX_s \Rightarrow jZ_L = -X_s + jR_s \Rightarrow -\omega L_2 + jZ_L \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$-\omega L_2 - X_s = 0 \Leftrightarrow L_2 = -\frac{X_s}{\omega}$$ (OBS: $X_s < 0$ POR SER CAPACITIVO)

$$\Rightarrow \underline{\underline{L_2}} = -\frac{(-3{,}66\,\Omega)}{2\pi \cdot 50} = \underline{\underline{11{,}6\ \text{mHy}}}.$$

ii) CON EL VALOR ANTERIOR $\frac{I_2}{I_1} = \frac{-n}{jR_s/\omega L_2} = -j\frac{n\omega L_2}{R_s}$

$\Rightarrow$ I_2 ATRASA $90°$ RESPECTO A I_1.
$V_2 = (1/n)V_1 \Rightarrow$ ESTÁN EN FASE



Ejercicio 2

a) $\mathcal{F}\left[\delta(t-T_0)\right](f) \overset{def}{=} U(f)$

Por definición $\langle U(f), \varphi(f)\rangle = \langle \delta(t-T_0), \mathcal{F}(\varphi)(t)\rangle =$

$$= \langle \delta(t-T_0), \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(f) e^{-j2\pi f t} df \rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(f) e^{-j2\pi f T_0} df = \langle e^{-j2\pi T_0 f}, \varphi(f)\rangle$$

$$\rightarrow U(f) = e^{-j2\pi T_0 f}$$

Análogamente $\bar{\mathcal{F}}\left[\delta(t-T_0)\right] = \bar{U}(f) = e^{j2\pi T_0 f}$.

b) $\mathcal{F}\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t-nt_0)\right] \overset{\text{linealidad}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(\delta(t-nT_0)) \overset{\text{parte a)}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-j2\pi n T_0 f} =$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{j2\pi n\cdot(1/f_0)\cdot f} = \underbrace{f_0\left(\frac{1}{1/f_0}\right)\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{j(2\pi/f_0)nf}}_{SDF} \overset{\text{SDF de Poisson}}{=}$$

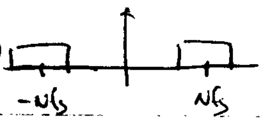
→ $T_0 = 1/f_0$

→ cambiar n por $-n$ no modifica la suma en $\mathbb{Z}$

$$= f_0 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(f - nf_0).$$

c) $\bar{\mathcal{F}}\left[X(f)\right](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} dt = \int_{-f_0/2}^{f_0/2} e^{j2\pi f t} dt = \frac{e^{j2\pi \frac{f_0}{2} t} - e^{-j2\pi \frac{f_0}{2} t}}{j2\pi t}$

$$= \frac{\operatorname{sen}(\pi f_0 t)}{\pi t} = f_0 \cdot \operatorname{sinc}(f_0 t).$$

d) i) 

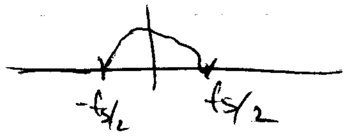
Filtro pasabanda.

Obs: $H(f) = H_0(f) * \left(\delta(f-Nf_s) + \delta(f+Nf_s)\right)$ con H_0 un filtro pasabajos ideal.

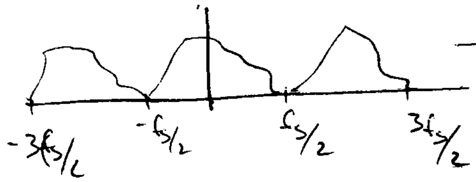
$$h(t) = \bar{\mathcal{F}}\left[H(f)\right] = \bar{\mathcal{F}}\left[H_0(f)\right] \cdot \bar{\mathcal{F}}\left[\underbrace{\delta(f-Nf_s)+\delta(f+Nf_s)}_{=2\cos(2\pi Nf_s t)}\right] \overset{\text{parte c)}}{=} \cancel{2f_s \operatorname{sinc}(f_s t)\cos(Nf_s}$$

$$\boxed{h(t) = 2 f_s \cdot \operatorname{sinc}(f_s t) \cdot \cos(2\pi N f_s t)}$$

ii) $X(f) =$

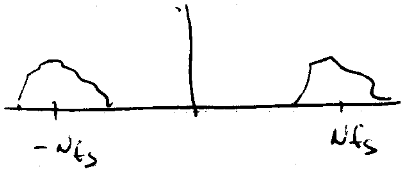


$Y(f) =$



→ EL ESPECTRO SE COPIA.
(TS CANCELA EL fS DE LA SERIE DEL PEINE)

$Z(f) =$



iii) POR PARSEVAL, LA ENERGÍA DE Z ES EL DOBLE DE X YA QUE TIENE DOS COPIAS DEL ESPECTRO.