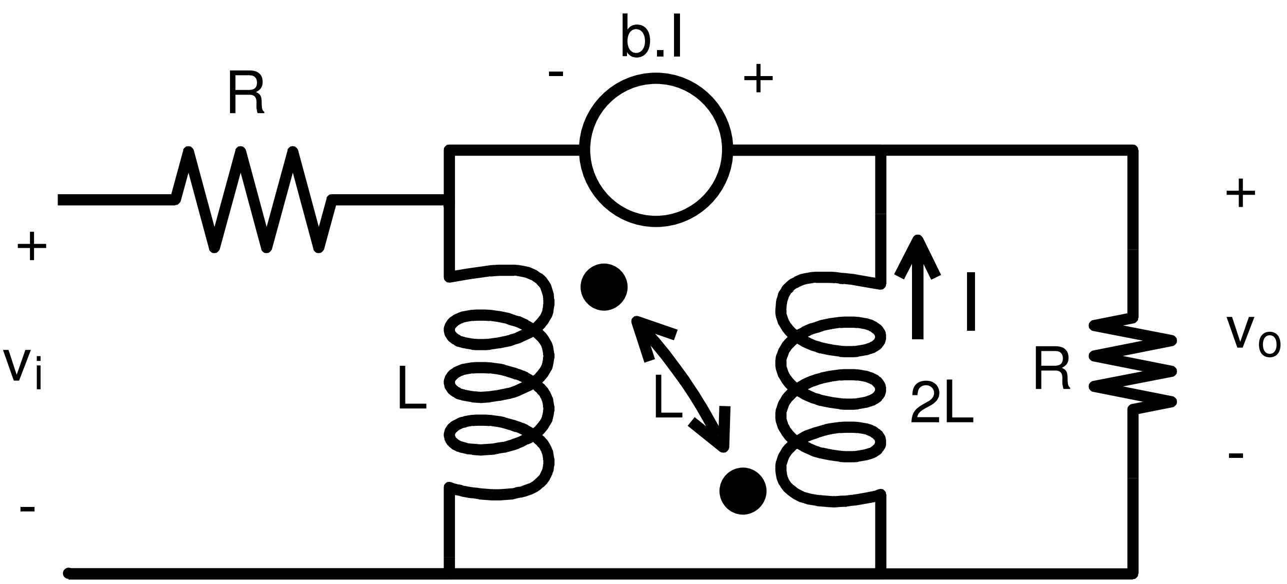
Examen de Sistemas Lineales 1
6 de febrero del 2007

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente.

Ejercicio 1

a) En el circuito de la figura, hallar la transferencia $H(j\omega)=\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$.



b) Realizar los diagramas de Bode de H(jω) sabiendo que b= 5000R.

c) **En esta parte se sugiere tener mucho cuidado con los redondeos al plantear ecuaciones de segundo grado; recordar que en la raíz cuadrada los números se restan.**

i) Hallar la frecuencia angular a la cual se da la ganancia máxima y hallar el respectivo valor de ganancia.

ii) Hallar la selectividad del sistema, definida como $\frac{|f_2 - f_1|}{f_0}$ donde f_0 es la frecuencia en Hz correspondiente a la frecuencia angular de la parte i) y f_2 y f_1 son las frecuencias a las cuales la ganancia del sistema cae a 3 db del valor máximo.

iii) Hallar la frecuencia mínima ω_c para la cual la distorsión en amplitud es menor que 3db entre ω_c e infinito.

Justifique claramente cualquier aproximación realizada.

Ejercicio 2

Sea el circuito en régimen sinusoidal de la figura, trabajando a frecuencia ω. La fuente ideal Vs y la impedancia Zs conforman el modelo de una fuente real.

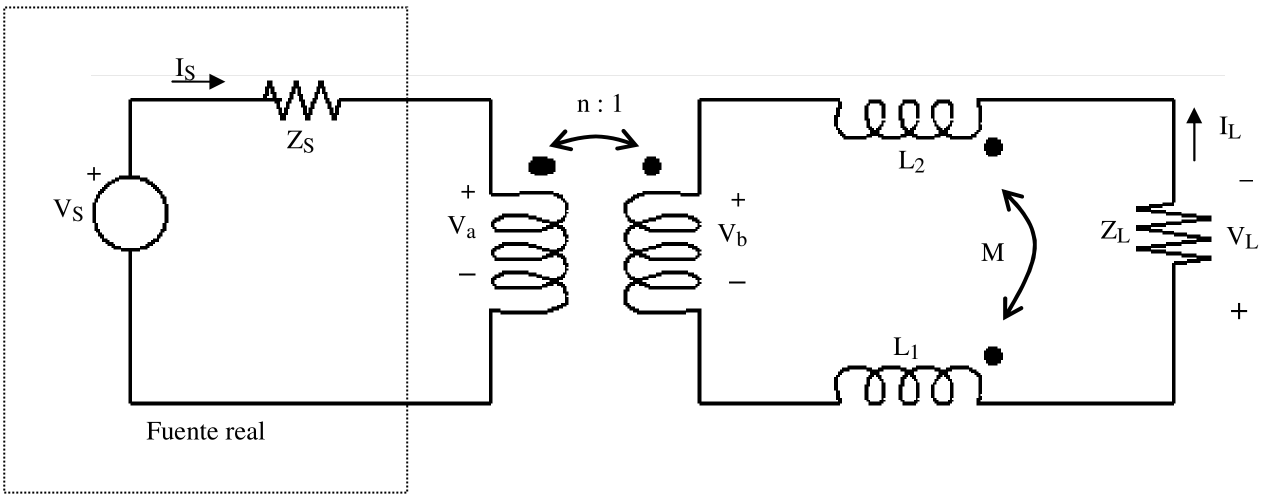
a) Indicar la relación de fase entre I_S, fasor de corriente entregada por la fuente, e I_L, fasor de corriente por la impedancia Z_L con el sentido indicado en la figura.

b) Hallar la impedancia vista desde el lado "a" del transformador ideal.

c) Si Z_L tiene **resistencia nula y reactancia positiva**, bosquejar un diagrama fasorial donde aparezcan representados los fasores V_S. I_S, I_L y V_L, discutiendo según el signo de la reactancia total que ve la fuente V_S.

d) Para $Z_S=R_S+jX_S$ y $Z_L=R_L+jX_L$, hallar R_L y X_L en función de los parámetros del circuito para que la potencia activa entregada por la fuente real sea máxima.

e) Para $L_1\omega = L_2\omega = 100\Omega$, $M\omega = 50\Omega$, $Z_L = (100+j50)\Omega$ y $Z_S = (1+j0)\Omega$, compensar la potencia reactiva consumida por el circuito a la fuente real, colocando una componente adecuada –que se diseñará- en bornes del primario del transformador ideal.



Examen de Sistemas Lineales 1
7 de febrero del 2006

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

a) Mostrar que $V(t) = Y(t) * Y(t) = Y(t).t$, siendo *Y(t)* el escalón de Heaviside.

b) Hallar $S(t) = V'''(t)$.

c) Sea $U(t) = V(-t)$. Hallar $U'(t)$.

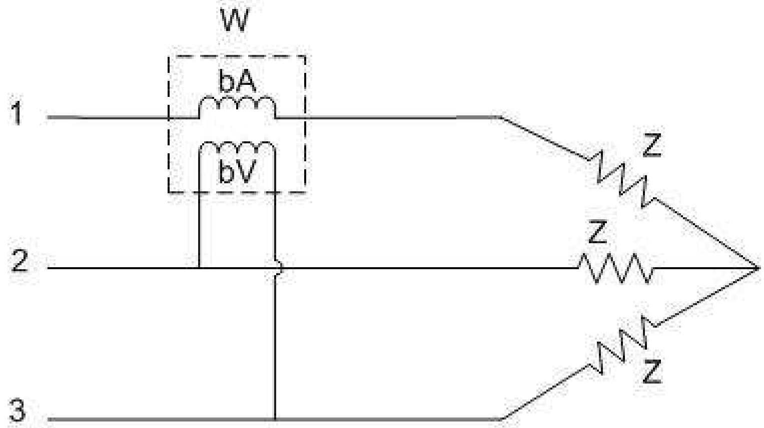
d) Sea $T(t) = V(t) + V(-t)$. **Hallar** $T(t) * S(t)$ **de dos maneras diferentes**.

Pregunta 2

Sea un sistema de fuentes de voltaje sinusoidal perfecto, que alimenta cargas idénticas Z en estrella.
Se tiene un vatímetro, que consta de una bobina amperimétrica bA (de impedancia despreciable) y una bobina voltimétrica bV (de impedancia infinita).
Se sabe que la lectura del vatímetro es W = V.I.cos φ, en que:

- V es el voltaje eficaz en bornes de la bobina voltimétrica,
- I es la corriente eficaz que circula por la bobina amperimétrica,
- φ es el ángulo entre los fasores V e I.

Se conecta el vatímetro según indica la Figura



a) Construir un diagrama fasorial para voltajes en las fases, voltajes compuestos y corrientes en las fases.

b) Probar que la lectura del vatímetro W da una **medida** de la **potencia** **reactiva** en la carga.

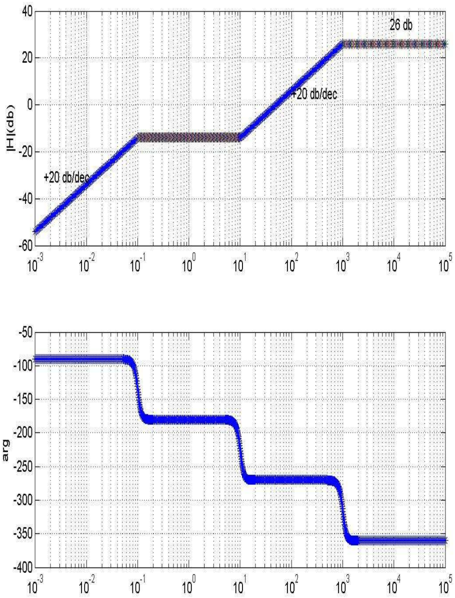
c) Calcular **exactamente** la potencia reactiva en el sistema de cargas en función de la lectura W del vatímetro.

Pregunta 3

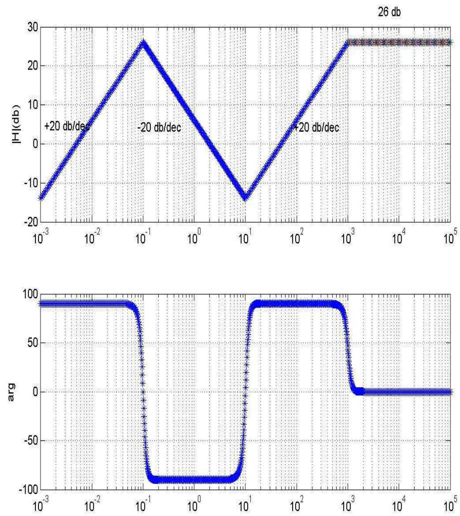
Sea $H(j\omega)$ la transferencia en régimen de un sistema lineal. Se sabe que:

- $H(j0) = 0$
- $\lim_{|\omega| \to +\infty} |H(j\omega)| = 20$
- $H(j\omega)$ es real racional de segundo orden.
- $H(j\omega)$ no tiene ninguna singularidad con parte real estrictamente positiva.

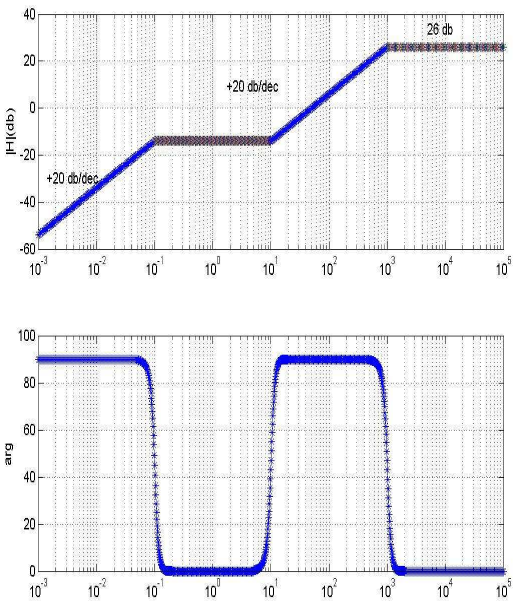
Indicar, justificando clara y detalladamente, cuáles de los siguientes son los Diagramas de Bode asintóticos de $H(j\omega)$.



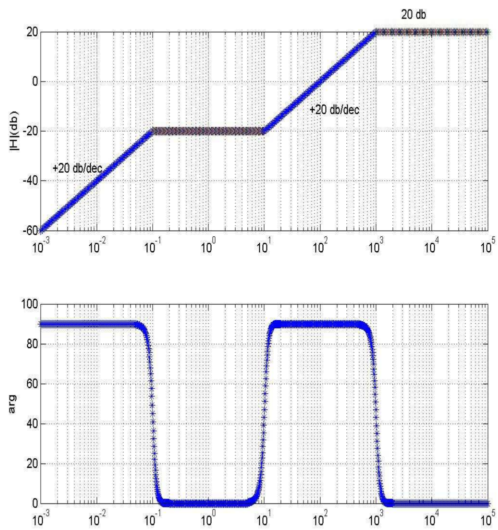
Bode 1



Bode 2



Bode 3



Bode 4

Pregunta 4

Sea $g(t)$ una función de L_1, y $G(f)$ su Transformada de Fourier: $G(f) = A(f) + jB(f)$

a) Indicar cuál es la T. de Fourier de $g(-t)$. Justificar.

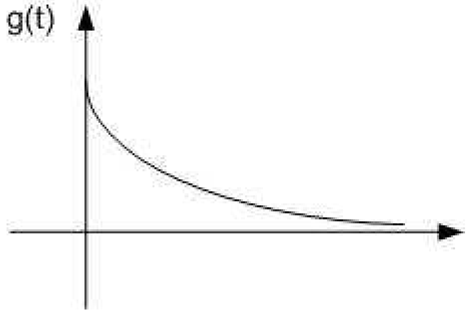
b) Si g(t) es real, probar que $\overline{G(f)} = G(-f)$
Mostrar que en ese caso, $A(f)$ es par y $B(f)$ es impar.

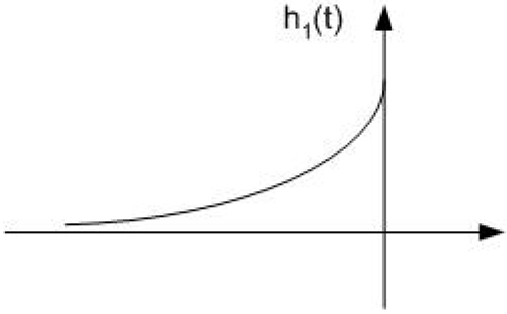
Aplicación: Sea $g(t) = Y(t)e^{-at}$, con $a > 0$

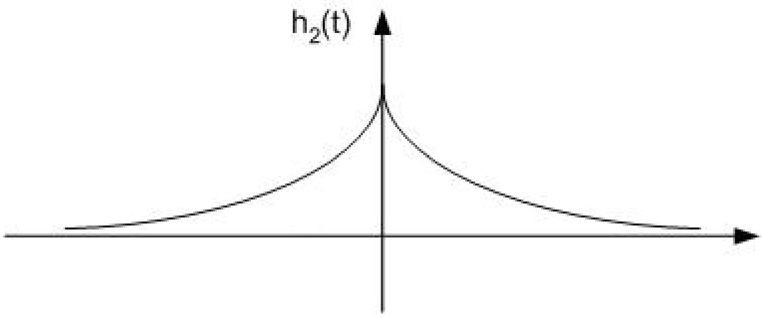
c) Hallar $A(f)$ y $B(f)$

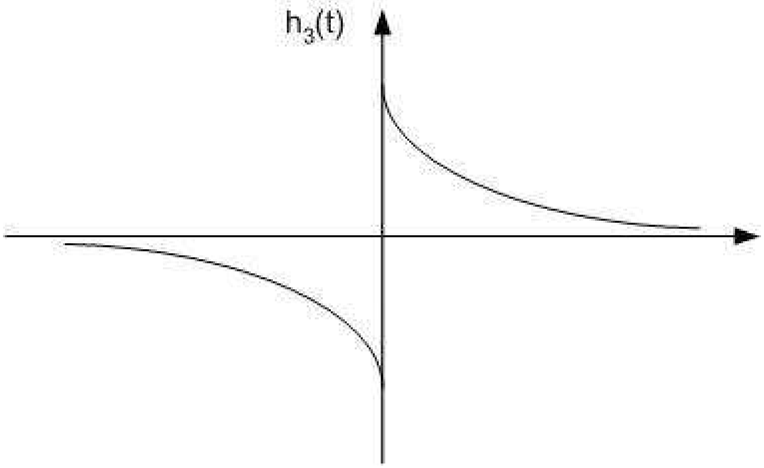
d) Verificar que $A(f)$ es par y $B(f)$ es impar

e) Calcular las T. de Fourier de $h_1(t)$, $h_2(t)$, $h_3(t)$.









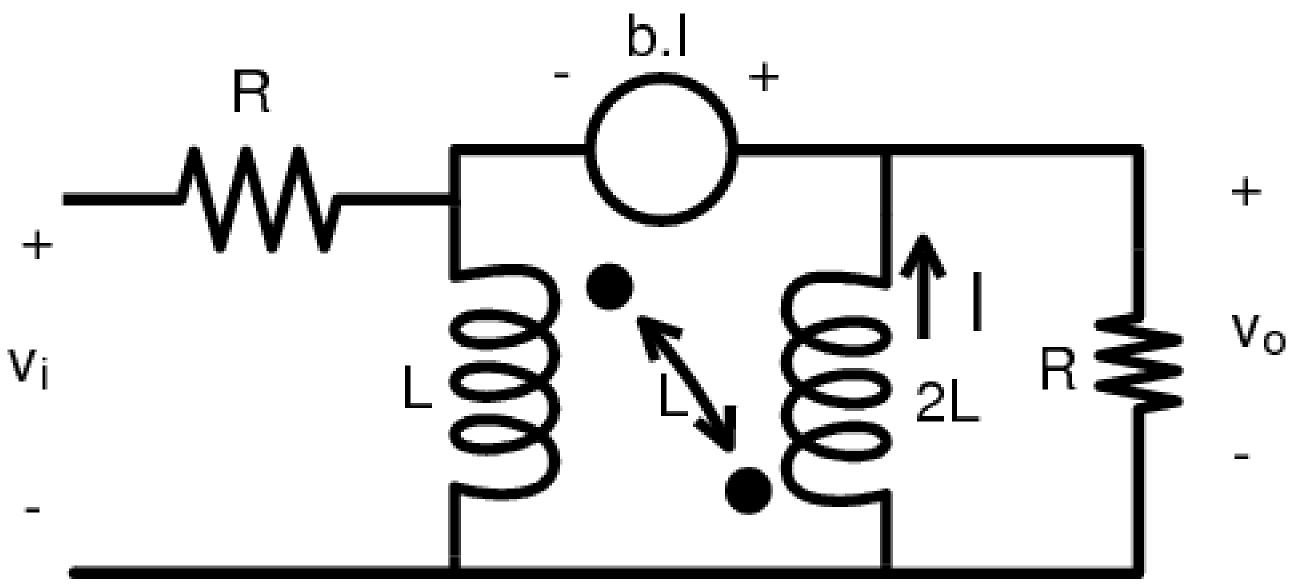
Examen de Sistemas Lineales 1

6 de febrero del 2007

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente.

Ejercicio 1

a) En el circuito de la figura, hallar la transferencia $H(j\omega)=\dfrac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$.



b) Realizar los diagramas de Bode de H(jω) sabiendo que b= 5000R.

c) **En esta parte se sugiere tener mucho cuidado con los redondeos al plantear ecuaciones de segundo grado; recordar que en la raíz cuadrada los números se restan.**

- **i)** Hallar la frecuencia angular a la cual se da la ganancia máxima y hallar el respectivo valor de ganancia.
- **ii)** Hallar la selectividad del sistema, definida como $\dfrac{|f_2 - f_1|}{f_0}$ donde f_0 es la frecuencia en Hz correspondiente a la frecuencia angular de la parte i) y f_2 y f_1 son las frecuencias a las cuales la ganancia del sistema cae a 3 db del valor máximo.
- **iii)** Hallar la frecuencia mínima ω_c para la cual la distorsión en amplitud es menor que 3db entre ω_c e infinito.

Justifique claramente cualquier aproximación realizada.

Ejercicio 2

Sea el circuito en régimen sinusoidal de la figura, trabajando a frecuencia ω. La fuente ideal Vs y la impedancia Zs conforman el modelo de una fuente real.

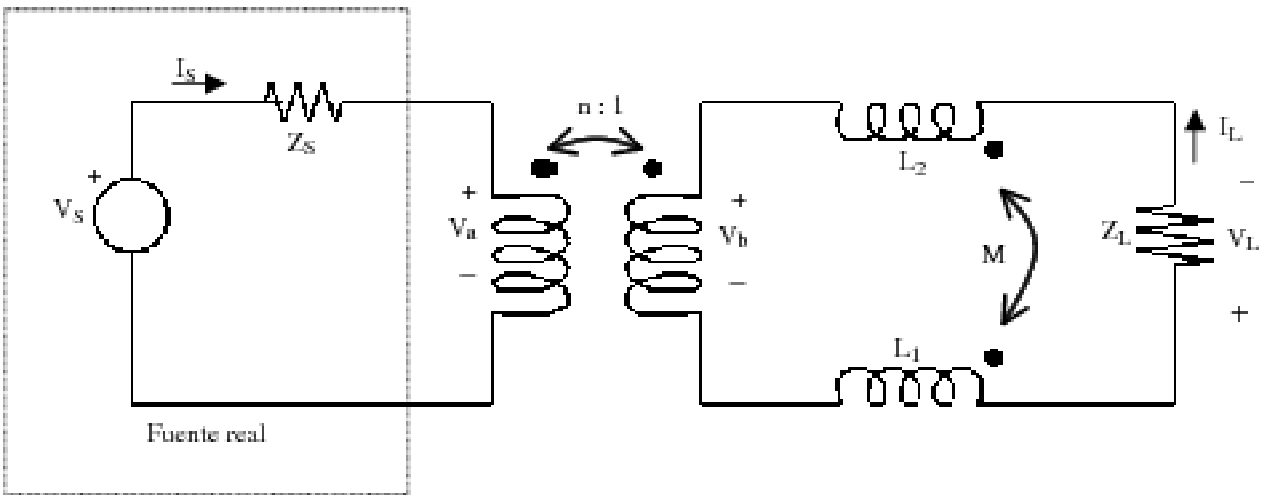
a) Indicar la relación de fase entre I_S, fasor de corriente entregada por la fuente, e I_L, fasor de corriente por la impedancia Z_L con el sentido indicado en la figura.

b) Hallar la impedancia vista desde el lado "a" del transformador ideal.

c) Si Z_L tiene **resistencia nula y reactancia positiva**, bosquejar un diagrama fasorial donde aparezcan representados los fasores V_S. I_S, I_L y V_L, discutiendo según el signo de la reactancia total que ve la fuente V_S.

d) Para $Z_S=R_S+jX_S$ y $Z_L=R_L+jX_L$, hallar R_L y X_L en función de los parámetros del circuito para que la potencia activa entregada por la fuente real sea máxima.

e) Para $L_1\omega = L_2\omega = 100\Omega$, $M\omega = 50\Omega$, $Z_L = (100+j50)\Omega$ y $Z_S = (1+j0)\Omega$, compensar la potencia reactiva consumida por el circuito a la fuente real, colocando una componente adecuada –que se diseñará- en bornes del primario del transformador ideal.



Solución segundo parcial de Sistemas Lineales 2 2006

PSfrag replacements

Andrés Alcarraz

2 de febrero de 2007

1. Ejercicio 2

1.1. a

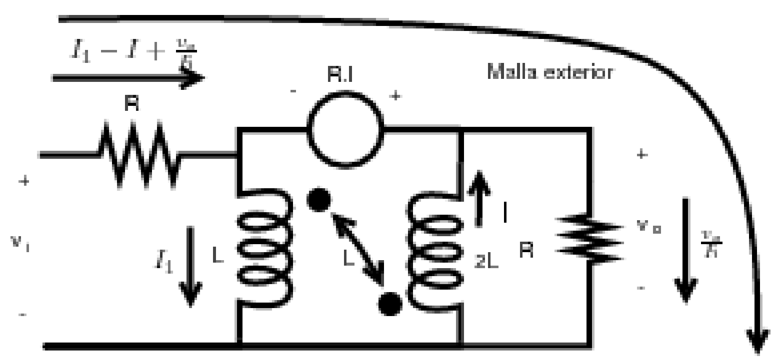


Figura 1: Circuito del ejercicio con definición de las variables usadas en la solución

Por la malla exterior de la figura 1.1 obtenemos la ecuación:

$$V_o = V_i - R\left(I_1 - I + \frac{v_o}{R}\right) + b.I \Rightarrow 2V_o = V_i + I\,(R+b) - RI_1 \tag{1}$$

De las ecuaciones del transformador obtenemos:

$$V_o - b.I = Lj\omega\,(I_1 + I) \tag{2}$$

$$-V_o = Lj\omega\,(I_1 + 2I) \tag{3}$$

Restando las ecuaciones 2 y 3 obtenemos:

$$2V_o - bI = -Lj\omega I \Rightarrow I = \frac{2V_o}{b - Lj\omega} \tag{4}$$

Ahora despejando I_1 de la ecuación 3 y sustituyendo 4 obtenemos:

$$I_1 = \frac{-V_o}{Lj\omega} - \frac{4V_o}{b - Lj\omega} = V_o\frac{Lj\omega - b - 4Lj\omega}{Lj\omega(b - Lj\omega)} = -V_o\frac{3Lj\omega + b}{Lj\omega\,(b - Lj\omega)} \tag{5}$$

Sustituyendo 4 y 5 en 1 obtenemos:

$$2V_o = V_i + (R+b)\frac{2V_o}{b - Lj\omega} + RV_o\frac{3Lj\omega + b}{Lj\omega\,(b - Lj\omega)} \Rightarrow V_o\left(2 - (R+b)\frac{2}{b - Lj\omega} - R\frac{3Lj\omega + b}{Lj\omega\,(b - Lj\omega)}\right) = V_i \tag{6}$$

$$H(j\omega) = \frac{v_0}{v_i} = \frac{Lj\omega(b - Lj\omega)}{2Lj\omega(b - Lj\omega) - 2(R+b)Lj\omega - 3LRj\omega - b.R} = \frac{Lj\omega(b - Lj\omega)}{-2(Lj\omega)^2 + (2b - 2R - 2b - 3R)\,Lj\omega - b.R}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{j\omega(\frac{b}{L} - j\omega)}{(j\omega)^2 + \frac{5R}{2L}) + \frac{b.R}{2L^2}} eqn:H) \tag{7}$$

1.2. b

Sustituyendo $b = 5000R$ en 7 obtenemos:

$$H(j\omega) = -\frac{1}{2}\frac{j\omega(5000\frac{R}{L} - j\omega)}{(j\omega)^2 + \frac{5R}{2L}j\omega + \frac{5000R^2}{2L^2}} \tag{8}$$

Llamémosle $\omega_0 = 5000\frac{R}{L}$ a la raíz del numerador y veamos las raíces del denominador:

$$j\omega_{1,2} = \frac{-\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 10000}}{2}\frac{R}{L} \simeq (-2{,}5 \pm 100j)\frac{R}{L} \tag{9}$$

O sea que las raíces del denominador son complejas conjugadas de módulo $\omega_1 = \sqrt{2500\frac{R^2}{L^2}} = 50\frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{100}$. Veamos el parámetro ζ:

$$2\zeta\omega_1 = \frac{5R}{2L} \Rightarrow \zeta = \frac{5R}{2L}\frac{1}{2\omega_1} = \frac{5}{2}\frac{50}{\omega_0}\frac{R}{L} = \frac{5}{2}\frac{50}{\omega_0}\frac{\omega_0}{5000} = \frac{5}{200} = \frac{1}{40} = 0{,}025 \tag{10}$$

Reescribiendo H en función de estos parámetros:

$$H(j\omega) = -\frac{1}{2}\frac{j\omega(\omega_0 - j\omega)}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_1 j\omega + \omega_1^2} \tag{11}$$

Estudiemos $H(j\omega)$ de a tramos:

$$\omega << \omega_1 \Rightarrow H(j\omega) \simeq -\frac{1}{2}\frac{j\omega\omega_0}{\omega_1^2} = -50\frac{j\omega}{\omega_1} \qquad \text{arg: } -\tfrac{\pi}{2}\text{, mod: } 20db/dec \tag{12}$$

$$\omega_1 << \omega << \omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \simeq \frac{1}{2}\frac{j\omega\omega_0}{\omega^2} = \frac{j\omega_0}{2\omega} \qquad \text{arg: } \tfrac{\pi}{2} \text{ o } -3\tfrac{pi}{2}\text{ , mod: } 20db/dec \tag{13}$$

Para determinar el argumento correcto en 13 evaluamos en ω_1:

$$H(j\omega_1) \simeq -\frac{1}{2}\frac{j\omega_1\omega_0}{2\zeta j\omega_1^2} = -25/\zeta = -1000 \Rightarrow \text{ el argumento es } -3\tfrac{\pi}{2} \tag{14}$$

$$\omega_0 << \omega \Rightarrow H(j\omega) \simeq -\frac{1}{2}\frac{(j\omega)^2}{\omega^2} = 0{,}5 \qquad \text{arg: } -2\pi\text{ , mod: } -6db \tag{15}$$

Con esta información construimos los diagramas de Bode que se muestran en la figura 1.2

1.3. c

1.3.1. i

Debido a la distancia entre el cero y el polo podemos despreciar el efecto del cero en las cercanías del polo. Claramente el máximo se da para $\omega = \omega_1$ y el valor de $|H(j\omega_1)$ es 1000 como ya lo calculamos en 14.

1.3.2. ii

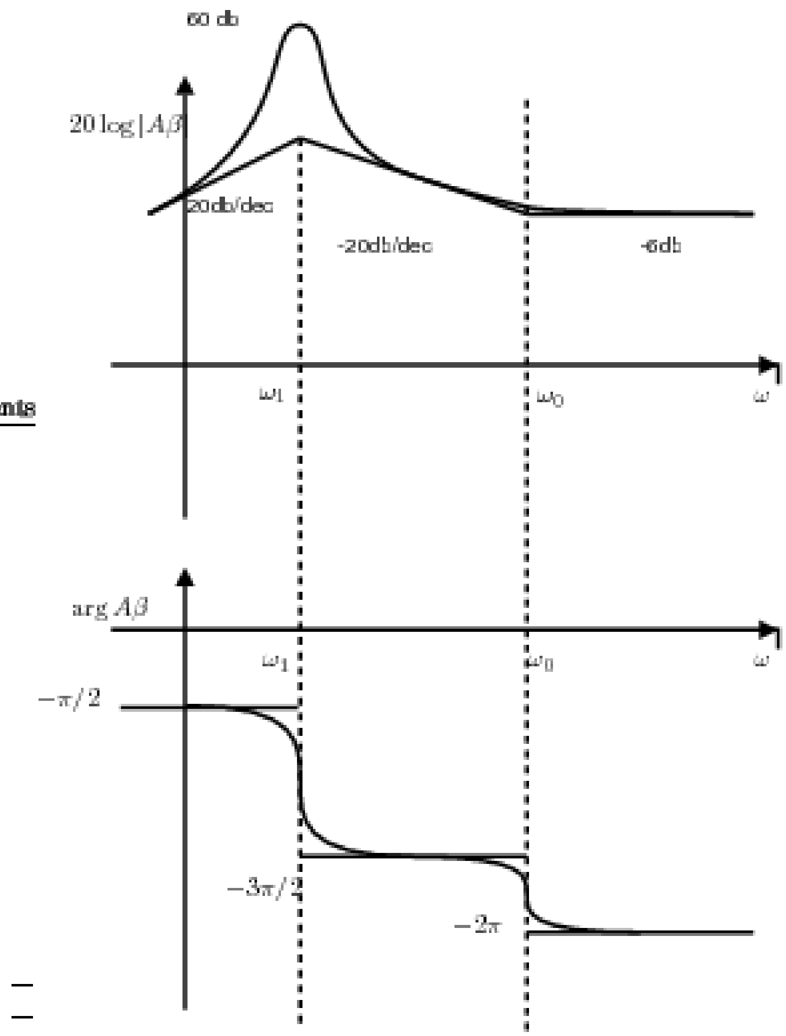
Para calcular la selectividad tenemos que encontrar los puntos donde $|H(j\omega)|^2 = \frac{1000^2}{2} = 5 \times 10^5$, sabiendo que sigue valiendo la aproximación de despreciar ω respecto a ω_0, como las frecuencias de trabajo estarán rondando ω_1 escribimos las frecuencias en función de ω_1

$$|H(j\omega)|^2 = 5 \times 10^5 \Rightarrow \omega^2\omega_0 = 10^4\omega^2\omega_1^2 = 2 \times 10^6\left(\left(\omega^2 - \omega_1^2\right)^2 + 4\zeta^2\omega_1^2\omega^2\right) = 2 \times 10^6\left(\omega^4 + \omega_1^2 - 2\omega_1^2\omega^2 + 4\zeta^2\omega_1^2\omega^2\right)$$

$$\Rightarrow \omega^2\omega_1^2 = 200\left(\omega^4 + \omega_1^4 - 2\omega_1^2\omega^2 + \frac{1}{400}\omega_1^2\omega^2\right) \Rightarrow 200\omega^4 - (400 + 1 - 0{,}5)\omega_1^2\omega^2 + 200\omega_1^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_{2,3}^2 = \frac{400{,}5 \pm \sqrt{400{,}5^2 - 4 \times 200 \times 200}}{400}\omega_1^2 \simeq \frac{400{,}5 \pm 20}{400}\omega_1^2 = \{1{,}05\omega_1^2, 0{,}95\omega_1^2\}$$

$$\Rightarrow \omega_2 = 1{,}025\omega_1, \omega_3 = 0{,}975\omega_1 \Rightarrow \frac{f_2 - f_3}{f_1} = \frac{\omega_2 - \omega_3}{\omega_1} = 0{,}05 \tag{16}$$



PSfrag replacements

Figura 2: Circuito del ejercicio con definición de las variables usadas en la solución

1.3.3. iii

Nuevamente como el cero está alejado del polo, se puede despreciar el efecto del segundo en el primero, y como ya sabemos que la frecuencia a la cual el bode real está a $3db$ del asintótico en un cero o polo simple, podemos decir que en ω_0 el módulo está a $3db$ por encima del valor en infinito, o sea $\omega_c = \omega_0$

Ejercicio 2

a) I_L está en contrafase con I_s, debido al vínculo que impone el trasformador ideal.

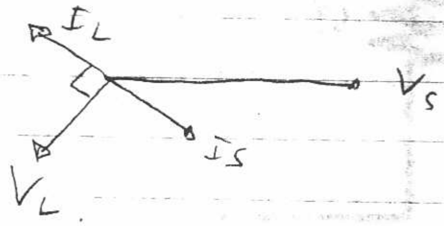
b) $Z_v = n^2\left[Z_L + (L_1+L_2-2M)j\omega\right]$

c) $Z_L = jX_L$, $X_L > 0 \Rightarrow Z_v = jn^2\left[X_L + (L_1+L_2-2M)\omega\right]$

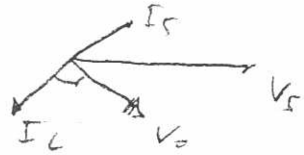
$$\Rightarrow I_s = \frac{V_s}{Z_s+Z_v} = \frac{V_s}{R_s + j\left[\underbrace{X_s + n^2\left[X_L+(L_1+L_2-2M)j\omega\right]}_{X}\right]}$$

$V_L = jX_L I_L$

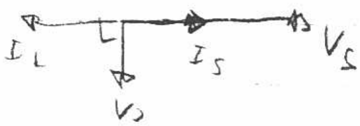
Si $X > 0$, Z_s+Z_v es inductiva



Si $X < 0$, Z_s+Z_v es capacitiva



Si $X = 0$, Z_s+Z_v es resistiva



d) Máxima potencia: $Z_v = \bar{Z_s} = R_s - jX_s \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} n^2 R_L = R_s \\ n^2\left[X_L+(L_1+L_2-2M)j\omega\right] = -X_s \end{array}}$

e) Z_s resistiva $\Rightarrow$ colocamos una reactancia en el primario del Trafo ideal que anule la reactancia total vista por V_s. $\Rightarrow jX_L + (L_1+L_2-2M)j\omega = j\left[50+100+100-50\right] = j200\Omega$
$\Rightarrow Z_v$ inductiva $\Rightarrow$

Podemos despreciar R_s y diseñar un condensador C tal que

$$\frac{1}{C\omega} = n^2 200\Omega \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{n^2 200\Omega\,\omega}}$$