Examen de Sistemas Lineales 1
29 de julio del 2005

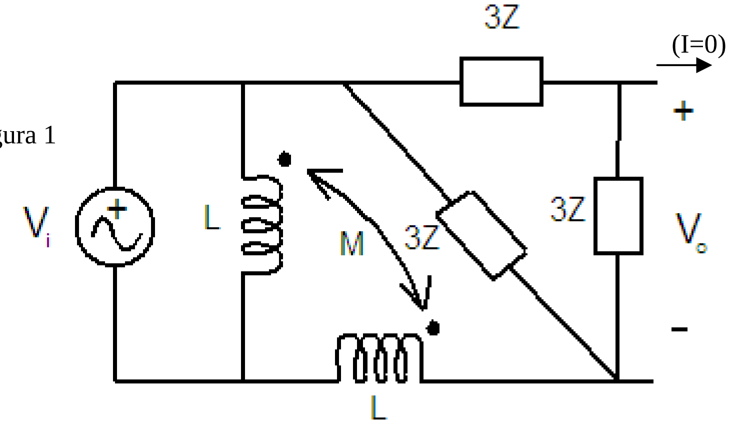
Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente.

Ejercicio 1

Sea el circuito de la figura 1:

a) Hallar la transferencia H(jw)=Vo/Vi en función de Z, sabiendo que M=1 y L=2 en unidades adecuadas. **Sugerencia**: tal vez resulte útil transfigurar las cargas.

figura 1



b) Para Z =1+1/(3jw), representar los Diagramas de Bode asintóticos de H(jw) **justificando claramente los pasos realizados para su construcción.**

c) Calcular las distancias entre el Bode de módulo real y el asintótico en las frecuencias de corte del sistema.

d) Utilizar esta información para bosquejar el diagrama real de módulo.

Sea $v_i(t)$ la señal periódica de la figura 2:

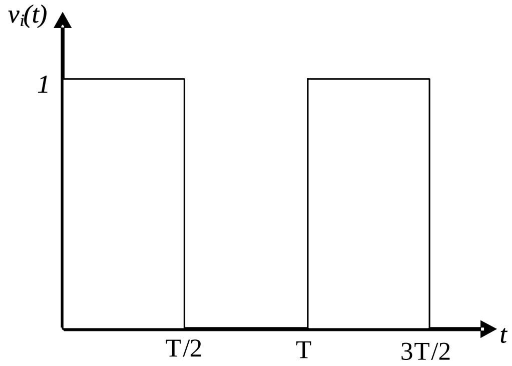


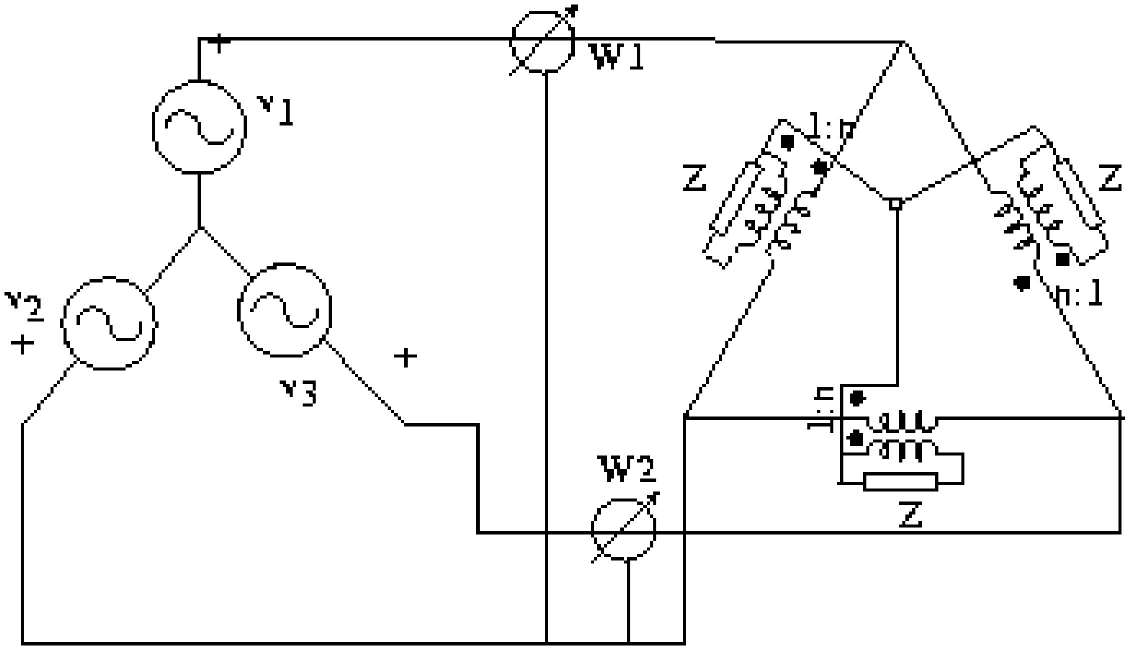
Figura 2

e) Hallar sus coeficientes de Fourier $c_n(v_i(t))$, **a partir de los de su derivada $c_n(v'_i(t))$**.

f) Si se aplica $v_i(t)$ como señal de entrada al sistema, obtener una expresión exacta para la salida $v_o(t)$ en régimen. **Suponer de aquí en más que T=1**.

g) Calcular el porcentaje de potencia media contenida en los primeros tres armónicos de $v_o(t)$, respecto al total de $v_i(t)$. ¿Le parece esto razonable? **Justifique.**

Ejercicio 2



a) Usar el teorema de Blondell para determinar las cargas, conociendo los siguientes datos (donde S_1 y S_2 son las potencias aparentes medidas por los voltamperímetros W_1 y W_2 respectivamente):

- $v_1 = 2{,}694kV\cos(314t)$
- $v_2 = 2{,}694kV\cos\left(314t + \frac{2\pi}{3}\right)$
- $v_3 = 2{,}694kV\cos\left(314t + \frac{4\pi}{3}\right)$
- $S_1 = 2kW$
- $S_2 = 1kW + j1{,}732kVar$
- n = 15

b) Se desea compensar la reactiva que entrega la fuente. ¿Qué elementos pondría y cómo los conectaría (en estrella o triángulo, en el primario o en el secundario, en serie o en paralelo) para que la potencia activa que entregue la fuente sea la misma y los elementos a colocar sean lo más pequeños posibles?

c) Hallar los fasores de las caídas de voltaje en dichos elementos.

d) Dibujar un diagrama fasorial donde estén representadas las fuentes y las caídas calculadas en la parte anterior, así como las corrientes por los elementos de compensación.

e) Ubicar en el diagrama de la parte **d)** la dirección de los fasores de corriente por las líneas y calcular su módulo.

f) Hallar y ubicar en el diagrama fasorial las corrientes por los elementos de compensación.

g) Hallar los fasores de las corrientes por las cargas, ubicarlos en el diagrama y dar su expresión temporal.

Examen de Sistemas Lineales 1
29 de julio del 2005

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

En el circuito de la figura hallar $Z_2 = R_2 + j.X_2$ de forma de maximizar la potencia consumida por Z_2, variando únicamente R_2.

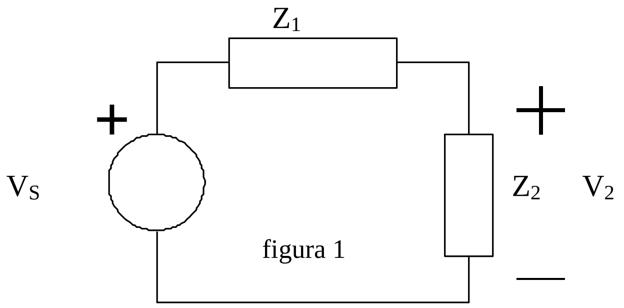


figura 1

En el circuito de la figura 2, ubicar una resistencia en serie con Z_C para maximizar la potencia consumida por la carga total resultante (Z_C y la carga añadida) donde:

$R = 1\Omega$, $v_1 = 5V\cos(314t)$, L = 3,18 mHy

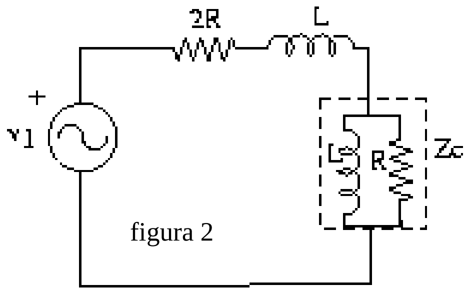


figura 2

Pregunta 2

a) Mostrar que si un sistema lineal introduce una ganancia de –6 db a una frecuencia dada, entonces la amplitud de una entrada sinusoidal con dicha frecuencia se atenúa a la salida en régimen aproximadamente al 50%.

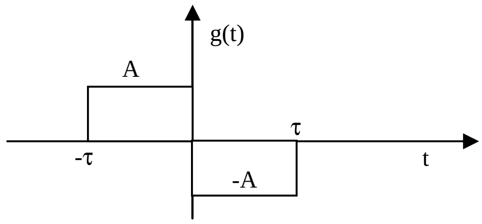
b) Se considera una transferencia en régimen $H(jw) = \dfrac{10.w_0^2}{(w_0 + jw).(10.w_0 + jw)}$. Mostrar que existe una banda de bajas frecuencias (**y hallarla**) en la cual el sistema no introduce una distorsión en amplitud mayor que 6db.

Pregunta 3

a) Demuestre dos propiedades de la Transformada de Fourier de funciones.

b) Recordando que la Transformada de Fourier de un pulso de ancho total τ y altura unitaria es $\tau\,.\mathbf{sinc}(\pi f \tau)$, mostrar, <u>sin calcular ninguna integral</u>, que:

$$F[g(t)](f) = 2j\frac{A}{\pi f}\sin^2(\pi f \tau).$$



c) Aplicando Parseval, calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{sinc}^2(\pi f \tau)\, df$.

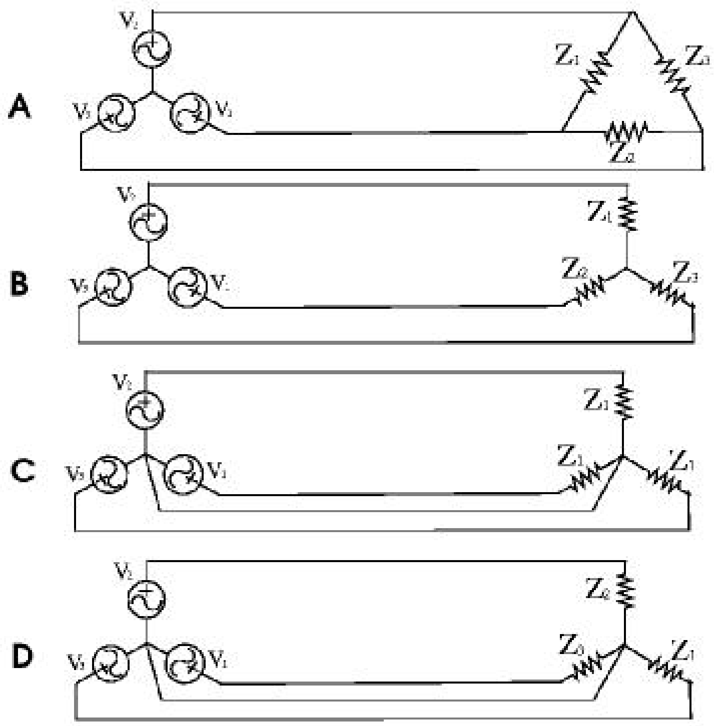
d) <u>A partir de la definición de Transformada de Fourier de distribuciones</u>, calcular la Transformada de Fourier de la δ'(t).

Pregunta 4

a) Enuncie y demuestre el Teorema de Blondell para cargas en estrella.

b) Indique en cuáles de los siguientes sistemas trifásicos valen **las hipótesis** de Blondell. <u>**Justificar**</u>.

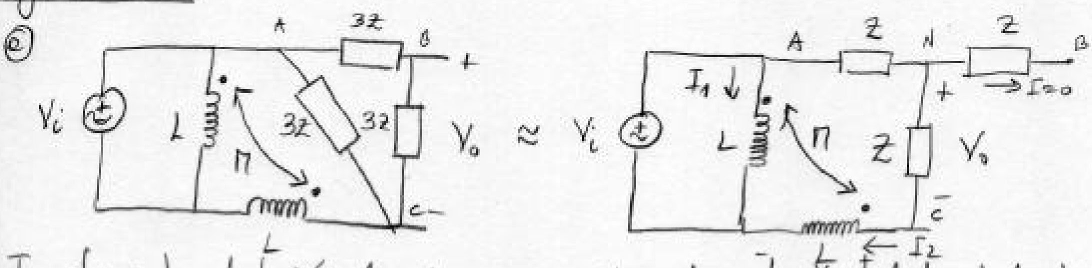
c) Indique en cuáles de los siguientes sistemas trifásicos vale **la tesis** de Blondell. <u>**Justificar**</u>.



SISTEMAS LINEALES 1: JULIO 2005 1

Ejercicio 1:

a)



Transfigurando el triángulo de cargas se obtiene el circuito equivalente de la derecha $\left(Z_\lambda = \frac{Z_\Delta}{3}\right)$

De la ley de voltajes de Kirchoff: $V_i = 2Z I_2 + V_2 = 2V_0 + V_2$

Además $I_2 = \frac{V_0}{Z}$

De las relaciones del transformador: $V_i = Lj\omega I_1 + Mj\omega \frac{V_0}{Z} \Rightarrow I_1 = \frac{V_i}{Lj\omega} - \frac{M}{L}\frac{V_0}{Z}$

$M=1,\ L=2$ $\qquad V_2 = Mj\omega I_1 + Lj\omega \frac{V_0}{Z}$

$\Rightarrow V_2 = \frac{V_i}{2} + V_0\left[\frac{2j\omega}{Z} - \frac{j\omega}{2Z}\right]$ y $\frac{V_i}{2} = V_0\left[2 + \frac{2j\omega}{Z} - \frac{j\omega}{2Z}\right] \Rightarrow V_i = V_0\left[\frac{3j\omega + 4Z}{Z}\right]$

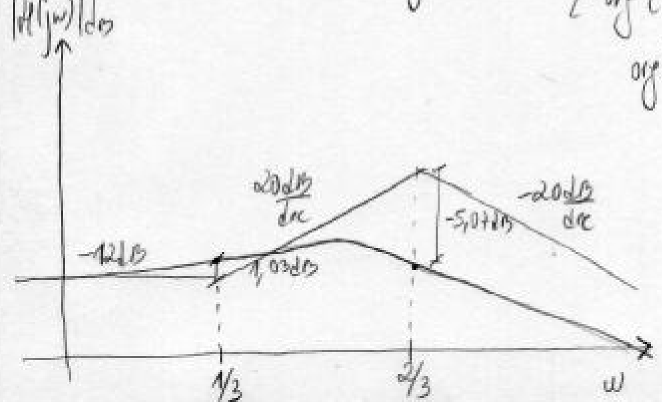
Finalmente $\boxed{H(j\omega) = \frac{Z}{4Z + 3j\omega}}$

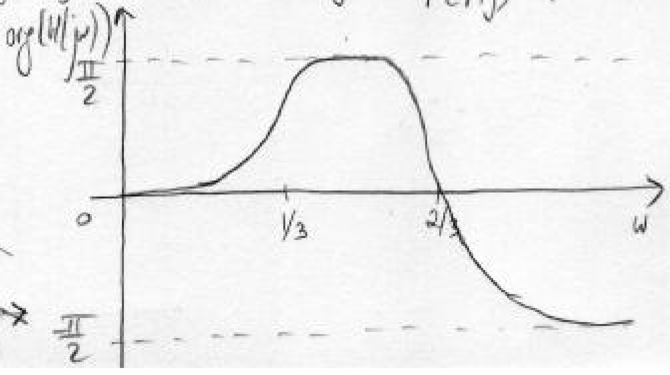
b) $Z = 1 + \frac{1}{3j\omega} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{3j\omega + 1}{9(j\omega)^2 + 12(j\omega) + 4} = \frac{1}{3}\frac{j\omega + \frac{1}{3}}{(j\omega + \frac{2}{3})^2}$ Cero: $-\frac{1}{3}$ Polos: $-\frac{2}{3}$ doble

Para $\omega \ll \frac{1}{3} \Rightarrow H(j\omega) \simeq \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq -12\,dB \\ \arg(H(j\omega)) \simeq 0 \end{cases}$

Para $\frac{1}{3} \ll \omega \ll \frac{2}{3} \Rightarrow H(j\omega) \simeq \frac{3}{4} j\omega \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq 20\log\frac{3}{4} + 20\log\omega\ dB \\ \arg(H(j\omega)) \simeq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Para $\omega \gg \frac{2}{3} \Rightarrow H(j\omega) \simeq \frac{1}{3j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq -20\log 3 - 20\log\omega\ dB \\ \arg(H(j\omega)) \simeq -\frac{\pi}{2} \end{cases} \leftarrow H(j\tfrac{2}{3}) \simeq \frac{j^2}{4(1+j)^2} = \frac{1}{4}\angle 0$





(c) Para $\omega=\frac{1}{3}$ $\quad |H(j\,1/3)|_{dB_{real}} = 20\log\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right) = -10{,}97\,dB \quad |H(j\,1/3)|_{dB_{asin}} = -12\,dB$ (2)

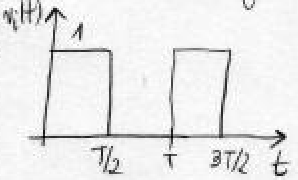
$\Rightarrow D = |H(j1/3)|_{dB_{real}} - |H(j\,1/3)|_{dB_{asin}} = 1{,}03\,dB$

Para $\omega = \frac{2}{3}$ $\quad |H(j\frac{2}{3})|_{dB_{real}} = 20\log\left(\frac{\sqrt{5}}{8}\right) = -11{,}07\,dB \quad |H(j\,2/3)|_{dB_{asín}} = -6\,dB$

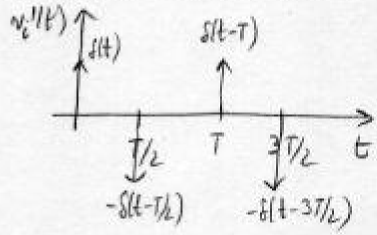
$\Rightarrow D = |H(j2/3)|_{dB_{real}} - |H(j2/3)|_{dB_{asín}} = -5{,}07\,dB$

Notar que la distorsión es grande pues las frecuencias de corte son cercanas

(e)



Derivando como distribución se obtiene:



$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} dt = \frac{1}{2}$$

$$c_n(v_i'(t)) = \frac{1}{T}\left\langle \delta(s) - \delta(s-T/2),\ e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}\right\rangle = \frac{1}{T}\left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{2}{T} & n \text{ impar}\end{cases}$$

Recordando la propiedad $c_n(v_i'(t)) = j\frac{2\pi}{T}n\, c_n(v_i(t)) \Rightarrow \boxed{c_n(v_i(t)) = \begin{cases} \frac{1}{2} & n=0 \\ 0 & n \text{ par} \neq 0 \\ \frac{1}{j\pi n} & n \text{ impar}\end{cases}}$

(f) $v_i(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(v_i(t))\, e^{j2\pi nt} \qquad (T=1)$

La correspondiente respuesta en régimen del sistema $H(j\omega)$ es: $\boxed{v_o(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} H(j2\pi n)\, c_n(v_i(t))\, e^{j2\pi nt}}$

(g) Por Parseval, la potencia media en los tres primeros armónicos de la salida $v_o(t)$ es: $P_{m_{v_o}} = |H(j0)c_0(v_i)|^2 + 2\left[|H(j2\pi)c_1(v_i)|^2 + |H(j6\pi)c_3(v_i)|^2\right]$

$\Rightarrow P_{m v_o} = 0{,}0162$

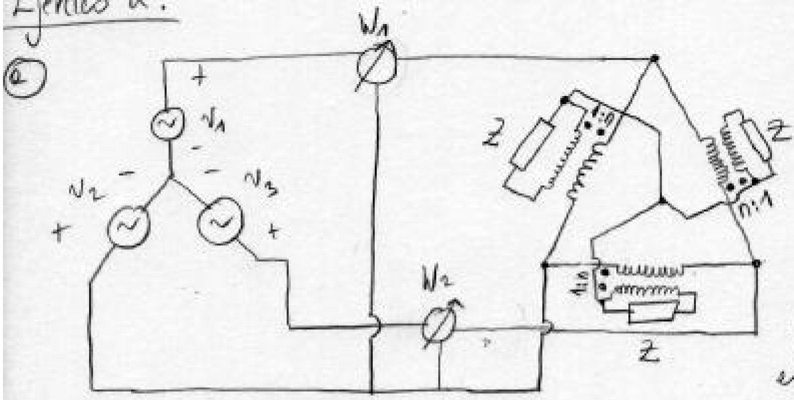
Por otro lado, $P_{m\,v_i} = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} dt = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{P_m(v_o)}{P_m(v_i)} \times 100\% = 3{,}23\%$.

Es razonable la baja potencia a la salida, ya que a frecuencias del orden de la fundamental de v_i ($\omega_0 = 2\pi$) el filtro introduce una atenuación importante. Además, en la "banda pasante" ya introduce una atenuación de $-12\,dB$

Ejercicio 2:

3

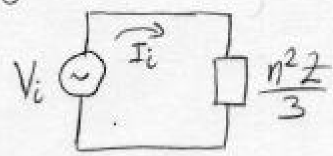
(a)



Por Blondell y su aplicación directa del método de los dos Vatímetros, la potencia total aparente S es $S_1 + S_2$

Además las impedancias vistas desde el primario en cada una de las fases es $Z_Y = n^2 Z$

Transfigurando las cargas a estrella $\left(Z_\lambda = \frac{Z_\Delta}{3}\right)$, se obtiene el equivalente monofásico de la instalación.



$i = 1,2,3$. $\Rightarrow S = 3 V_i \bar{I}_i = \frac{3|V_i|^2}{n^2 \frac{\bar{Z}}{3}}$

$$\Rightarrow \bar{Z} = \frac{9|V_i|^2}{n^2 S} = \frac{9|V_i|^2 \bar{S}}{n^2 |S|^2}$$

De la letra $S = S_1 + S_2 = (3 + j\sqrt{3})$ KVA $\Rightarrow \bar{S} = (3 - j\sqrt{3})$ KVA y $|S|^2 = 12$ KVA^2

$n^2 = 225$

Evaluando se obtiene: $\boxed{Z = (36{,}29 + j20{,}95)\,\Omega}$. Las cargas son inductivas

(b) Para no modificar la potencia activa entregada a las cargas, el voltaje en bornes de las mismas impuesto por el sistema de fuentes no deberá modificarse

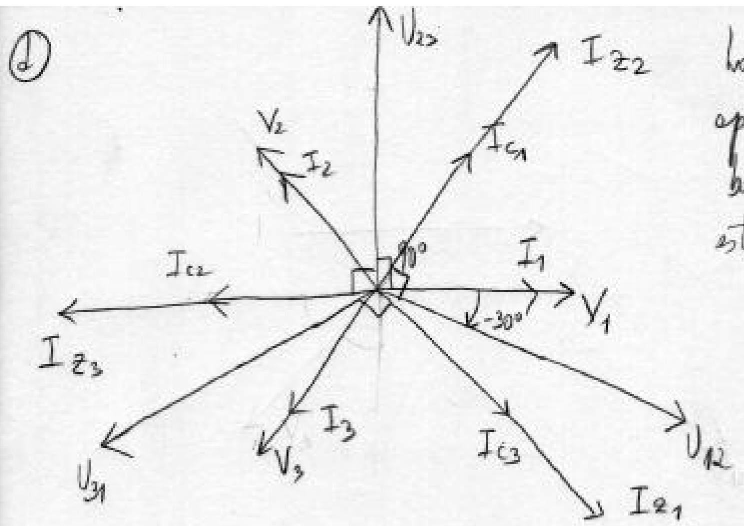
$\Rightarrow$ conecto condensadores en paralelo.

$Z_c = \frac{1}{Cj\omega}$ y como $Z_\Delta = 3Z_\lambda$ la capacidad será tres veces menor si lo conectamos en triángulo. Finalmente, como $Z_{PRIMARIO} = n^2 Z_{SECUNDARIO}$ el mismo razonamiento indica que de conectar los condensadores del lado del primario, la capacidad será n^2 veces menor. $(n = 15 > 1)$

(c) Las caídas de voltajes en dichos elementos serán iguales a las tensiones impuestas

$$\boxed{\begin{cases} U_{12} = \sqrt{3} \,.\, 1911 \text{ V} \angle -30^\circ \\ U_{23} = \sqrt{3} \,.\, 1911 \text{ V} \angle 90^\circ \\ U_{31} = \sqrt{3} \,.\, 1911 \text{ V} \angle -150^\circ \end{cases}}$$

(d)



4

Los condensadores de compensación, tiene aplicados las tensiones compuestas en bornes. Las corrientes a través de ellos estarán 90° en adelanto.

(e) En estas condiciones de compensación, el sistema de fuentes ve cargas puramente resistivas. Las corrientes de línea I_i $i=1,2,3$ deberán ser colineales a los fasores de las fuentes.

Como la potencia activa se mantiene, $S_{FUENTES} = P = 3KW$

$\Rightarrow S_{FUENTES} = 3|V_i||I_i| \Rightarrow |I_i| = \frac{P}{3|V_i|} \Rightarrow \boxed{|I_i| = 524,9mA}$ $i=1,2,3$.

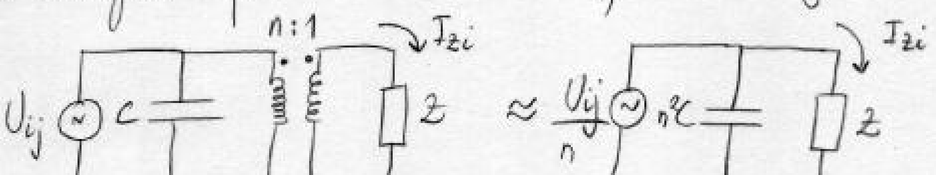
(f) En primer lugar, debemos calcular el valor de los condensadores de compensación.

Por fase, la reactiva consumida es $Q_{FASE} = \frac{Im(S)}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} KVAr$

$\Rightarrow Q_{FASE} = C\omega|U_{ij}|^2 \Rightarrow C = \frac{Q_{FASE}}{\omega|U_{ij}|^2} \Rightarrow C = 168,8nF$

$I_{C_i} = Cj\omega U_{ij} \Rightarrow |I_{Ci}| = C\omega|U_{ij}| \Rightarrow \boxed{|I_{Ci}| = 174,8mA}$

(g) Analizando el problema mediante el equivalente monofásico.



Paso la fuente del lado del secundario

$\Rightarrow I_{Zi} = \frac{U_{ij}}{nZ}$

$$\boxed{\begin{aligned} I_{Z1} &= 5,25A \angle -60° \\ I_{Z2} &= 5,25A \angle 60° \\ I_{Z3} &= 5,25A \angle 180° \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} i_{Z1}(t) &= \sqrt{2} \cdot 5,25A \cos(314t - 60°) \\ i_{Z2}(t) &= \sqrt{2} \cdot 5,25A \cos(314t + 60°) \\ i_{Z3}(t) &= \sqrt{2} \cdot 5,25A \cos(314t + 180°) \end{aligned}}$$