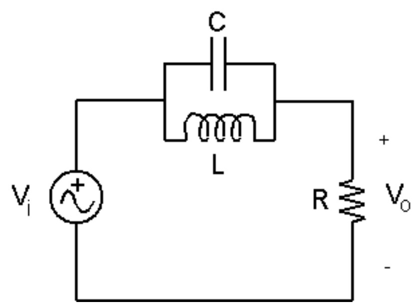
Examen de Sistemas Lineales 1
29 de julio del 2004

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente.

Ejercicio 1

a) Se considera el circuito de la Figura 1. Hallar la transferencia $H(jw) = \frac{V_o(jw)}{V_i(jw)}$.



b) i) Sabiendo que se cumplen las relaciones $w_o = \frac{1}{RC} = \frac{R}{L}$, realizar los Diagramas asintóticos de Bode de $H(jw)$. **Justificar los pasos realizados para su construcción.**

ii) Calcular los límites laterales de $\arg[H(jw)]$ cuando $w \to w_o^{\pm}$ e **<u>incluir esta información en los Diagramas asintóticos, bosquejando los Diagramas reales</u>**.

c) Hallar el intervalo exacto de frecuencias $[w_1, w_2]$ donde la distorsión de amplitud es en módulo mayor o igual a 3dB respecto al valor para $w = \infty$.

d) Se desea procesar una señal de banda acotada $v_i(t)$. Por problemas del sistema, a la señal se le adiciona un tono interferente, obteniéndose una señal ruidosa de la forma $v_i^*(t) = v_i(t) + A\cos(w_{\text{int}}t)$. Supondremos que el soporte de $V_i(f) = F[v_i(t)]$ se encuentra sobre una banda de frecuencias mucho mayores a w_{int}.

i) Mostrar que el circuito de la Figura 1 puede utilizarse como una etapa de acondicionamiento de la señal $v_i^*(t)$, pudiendo eliminar completamente la interferencia si se elige un valor adecuado para w_o.

ii) Para dicho valor de w_o, calcular la salida en régimen ante una entrada de la forma

$$v_i^*(t) = 1V\left[\cos(w_2 t) + \cos\left(100 w_2 t - \frac{p}{4}\right)\right] + 0.5V\cos(w_{\text{int}}t).$$

Ejercicio 2

a)

i) En el circuito de la figura 1 hallar la impedancia equivalente Z_{eq}.

ii) Simplificar la expresión para el caso en que el transformador sea perfecto.

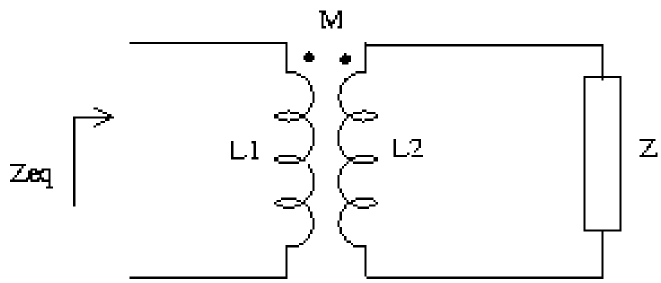


figura 1

DE AQUÍ EN MÁS SE TRABAJARÁ CON TRANSFORMADORES PERFECTOS (L_1, L_2 y M)

b)

i) En el circuito de la figura 2 calcular el condensador C en función de la frecuencia angular de trabajo y los parámetros del transformador, para que la impedancia equivalente Z_{eq} sea colineal con Z.

ii) Demostrar que en este caso el transformador junto con el condensador se comporta como un transformador ideal, a la frecuencia de trabajo; calcular el equivalente a la relación de vueltas.

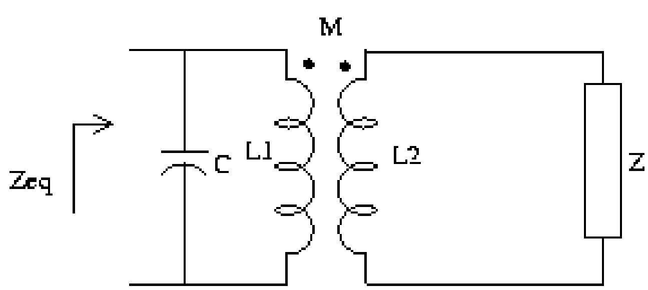


figura 2

c) En el circuito de la figura 3

i) compensar la potencia reactiva entregada por la fuente mediante elementos Z_r en paralelo con los primarios de los transformadores; decir qué elementos ubicaría; justificar por qué y calcular su valor.

Para los siguientes valores:

$R = 70\,\Omega$, $L_1 = 516\,Hy$, $L_2 = 1\,Hy$, $w = 100.p\ rad/s$

$v_1(t) = 7070\,V\ \cos(wt)$, $v_2(t) = 7070\,V\ \cos(wt + 2p/3)$, $v_3(t) = 7070\,V\ \cos(wt + 4p/3)$

ii) Dibujar un diagrama fasorial en el que aparezcan las tensiones de las fuentes, las corrientes de fase I_1, I_2 e I_3 y las corrientes por los elementos de compensación I_{r1}, I_{r2} e I_{r3}.

iii) Ubicar cualitativamente a las corrientes por el primario de los transformadores en dicho diagrama fasorial, justifique.

iv) Hallar la expresión temporal de $i_{r1}(t)$, $i_{r2}(t)$ e $i_{r3}(t)$.

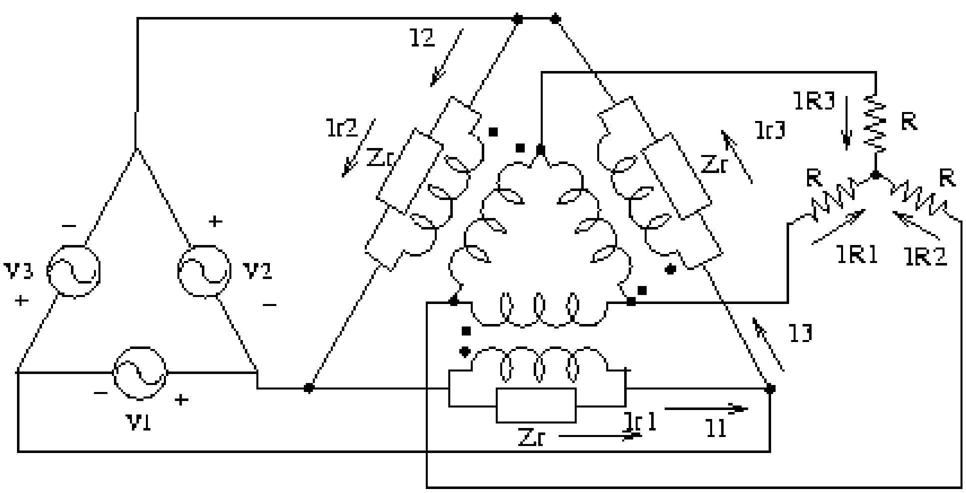


Figura 3

Examen de Sistemas Lineales 1
29 de julio del 2004

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

a) ¿Cuándo se dice que un sistema no presenta distorsión?

b) **Deducir** la condición en frecuencia de no distorsión para un sistema lineal de transferencia *H(f)*.

c) Se considera un sistema de propagación de señales en el cual existe un canal principal, que introduce una ganancia K1 y un retardo t_1, y un canal secundario, debida a la reflexión, de ganancia K2 y retardo t_2. Para $\frac{K_1}{K_2} << 1$, la transferencia total del sistema resulta ser aproximadamente:

$$H(f) \approx K_1 . e^{-j2p\, f t_1} . \left[1 + \frac{K_1}{K_2} . \cos\left[2p\ f \left(t_2 - t_1 \right) \right] \right].$$

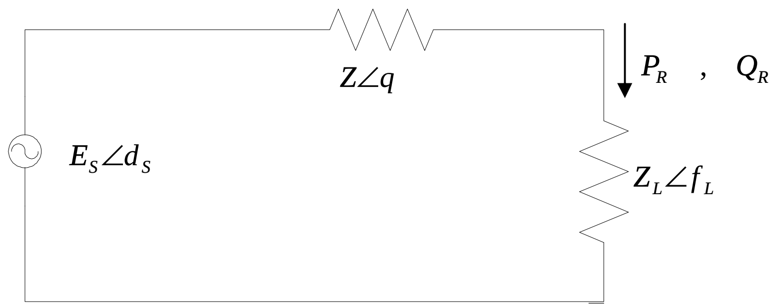
i) Indicar si el sistema distorsiona en amplitud y/o fase.

ii) Es razonable esperar el fenómeno de intermodulación. <u>**JUSTIFICAR**</u>.

Pregunta 2

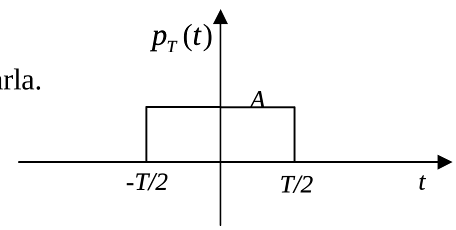
a) Se considera un elemento lineal funcionando en régimen sinusoidal. A su tensión en bornes y la corriente que la atraviesa las llamaremos respectivamente *v(t)* e *i(t)*. **A partir de la definición de potencia media en régimen sinusoidal** P_m, deducir las fórmulas $P_m = \mathrm{Re}\left(V.\bar{I}\right) = |V|.|I|.\cos(j)$, siendo V e I los fasores asociados a la tensión ***v(t)*** y a la corriente ***i(t)*** en valores eficaces y j el argumento de la impedancia asociada al elemento lineal.

b) Consideremos el circuito de la figura en el que se muestra una fuente sinusoidal conectada con una carga a través de una línea. Hallar la expresión de la potencia media en la carga P_R en función de E_S, $Z_L\angle f_L = R_L + jX_L$ y $Z\angle q = R + jX$. Si sólo se considera que varía el módulo de la carga, manteniendo constante su fase, encontrar Z_L que maximiza P_R (relacionar la respuesta con el módulo de la impedancia de línea).



Pregunta 3

Se considera un pulso de ancho T y altura A centrado en el origen, como muestra la figura.



a) Deducir la convolución $p_T(t) * p_T(t)$ y graficarla.

b) Hallar G(f), la TdF del pulso $p_T(t)$.

c) Calcular la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} G(f)df$.

d) Calcular, **de al menos dos maneras diferentes**, la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} G^2(f)df$.

Pregunta 4

a) Deducir la expresión general de la derivada de la distribución asociada a una función localmente integrable que presenta un salto en el origen.

b) Definir el cambio de variable en distribuciones, explicando por qué se define de esa manera.

c) Sea $T(t)$ la distribución asociada a la función localmente integrable $Y(-t)$, siendo $Y(t)$ la función escalón. Probar que $T'(t) = -d(t)$. (Sugerencia: observar que $Y(t) + Y(-t) = 1$).

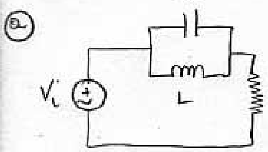
d) Sean $g_1(t)$ y $g_2(t)$ dos funciones de clase C^1 que cumplen que $g_1(0) = g_2(0)$ y satisfacen la ecuación diferencial $g_i''(t) + w^2.g_i(t) = 0$, con $w > 0$. Mostrar que la distribución $S(t)$ asociada a la función $Y(t).g_1(t) + Y(-t).g_2(-t)$ verifica la identidad $S''(t) + w^2.S(t) = c.d(t)$, hallando el valor adecuado de c.

SISTEMAS LINEALES 1: JULIO 2004

(1)

Ejercicio 1:

a)



Del divisor de tensiones : $V_o = \dfrac{R}{R + \dfrac{\frac{L}{C}}{Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega}}} V_i = \dfrac{R(LC(j\omega)^2+1)}{R(LC(j\omega)^2+1) + Lj\omega} V_i$

$$\Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + \frac{1}{LC}}{(j\omega)^2 + \frac{j\omega}{RC} + \frac{1}{LC}}}$$

b) $\omega_o = \dfrac{1}{RC} = \dfrac{R}{L} \Rightarrow \omega_o^2 = \dfrac{1}{LC}$, $H(j\omega) = \dfrac{(j\omega)^2 + \omega_o^2}{(j\omega)^2 + \omega_o(j\omega) + \omega_o^2}$

Ceros complejos conjugados con $\zeta = 0$, $\omega_n = \omega_o$ $(\pm j\omega_o)$

Polos complejos conjugados con $\zeta = \frac{1}{2}$, $\omega_n = \omega_o$

Para $\omega \ll \omega_o \Rightarrow H(j\omega) \simeq 1 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq 0\ dB \\ \arg(H(j\omega)) \simeq 0 \end{cases}$

Para $\omega \gg \omega_o \Rightarrow H(j\omega) \simeq 1 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq 0\ dB \\ \arg(H(j\omega)) \simeq 0 \end{cases}$

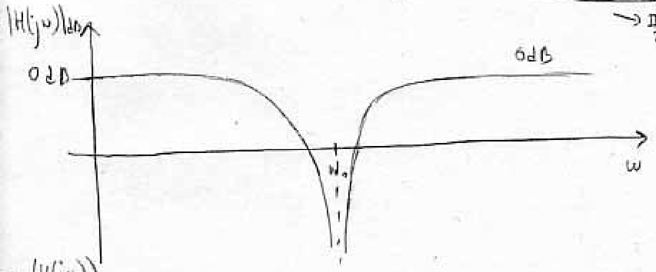
$H(j\omega_o) = 0 \Rightarrow |H(j\omega_o)|_{dB} = -\infty$

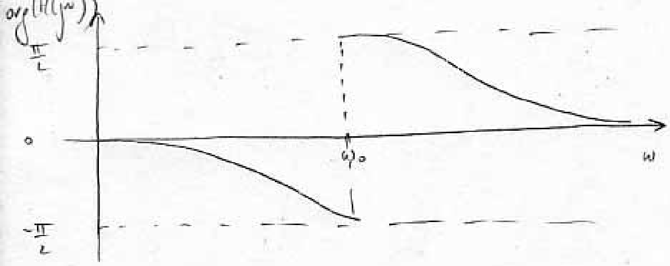
y el argumento presenta una discontinuidad

Para estudiar dicha discontinuidad en el Bode de fase, podemos estudiar los límites laterales $\lim\limits_{\omega \to \omega_o^{\pm}} \arg(H(j\omega))$

$$\Rightarrow \lim_{\omega \to \omega_o^+} \arg(H(j\omega)) = \lim_{\omega \to \omega_o^+} \Big[\underbrace{\arg(\underbrace{\omega_o^2 - \omega^2}_{\to 0^-})}_{\to \pi} - \underbrace{\arg\big(\underbrace{(j\omega)^2 + \omega_o(j\omega) + \omega_o^2}_{\to \omega_o(j\omega)}\big)}_{\to \frac{\pi}{2}} \Big] = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\omega \to \omega_o^-} \arg(H(j\omega)) = \lim_{\omega \to \omega_o^-} \Big[\underbrace{\arg(\underbrace{\omega_o^2 - \omega^2}_{\to 0^+})}_{\to 0} - \underbrace{\arg\big(\underbrace{(j\omega)^2 + \omega_o(j\omega) + \omega_o^2}_{\to \omega_o(j\omega)}\big)}_{\to \frac{\pi}{2}} \Big] = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$





(c) Observamos que $|H(j\omega)|_{dB} \to 0\,dB$ cuando $\omega \to \infty$ y corresponde al máximo. Debo hallar la banda de frecuencias $[\omega_1, \omega_2]$ tal que $|H(j\omega_1)|_{dB} = |H(j\omega_2)|_{dB} = -3\,dB$ (2)

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = |H(j\omega^*)| \Rightarrow \frac{1}{2} = |H(j\omega^*)|^2 = \frac{(\omega_0^2 - \omega^{*2})^2}{(\omega_0^2 - \omega^{*2})^2 + \omega_0^2\omega^{*2}} \Rightarrow (\omega_0^2 - \omega^{*2})^2 = \omega_0^2\omega^{*2}$$

$$\Rightarrow \omega^{*4} - 3\omega_0^2\omega^{*2} + \omega_0^4 = 0 \qquad u = \omega^{*2} \Rightarrow u^2 - 3\omega_0^2 u + \omega_0^4 = 0 \qquad u = \frac{3\omega_0^2 \pm \sqrt{9\omega_0^4 - 4\omega_0^4}}{2} \left\langle \begin{matrix} \omega_0^2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \\ \omega_0^2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \end{matrix} \right.$$

$$\Rightarrow \omega^* = \left\langle \begin{matrix} \omega_0\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \\ \omega_0\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{2}} \end{matrix} \right. \qquad \Rightarrow \boxed{\omega_1 = \omega_0\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}} \qquad \boxed{\omega_2 = \omega_0\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}}$$

(d)(i) Sabemos que el sistema lineal en régimen responderá ante la entrada $v_i^*(t) = v_i(t) + A\cos(\omega_{int} t)$ como: $v_o(t) = \bar{\mathcal{F}}[H(j\omega)V_i(j\omega)] + A|H(j\omega_{int})|\cos(\omega_{int} t + \arg(H(j\omega_{int})))$

Sabemos que $H(j\omega_0) = 0$ por lo que si elegimos $\omega_0 = \omega_{int}$ se anula el segundo término a la salida, eliminando la interferencia. Por otro lado, como $V_i(j\omega)$ tiene su soporte en altas frecuencias donde $H(j\omega) \approx 1$ tenemos que $v_o(t) = \bar{\mathcal{F}}[V_i(j\omega)] \Rightarrow v_o(t) \approx v_i(t)$ y se acondiciona la entrada como se quería.

(ii) $\omega_0 = \omega_{int}$ $\quad v_i^*(t) = 1V\left[\cos(\omega_2 t) + \cos(100\omega_2 t - \frac{\pi}{4})\right] + 0{,}5V\cos(\omega_{int} t)$

Tengo una superposición de tonos, y cada uno responde en régimen como:

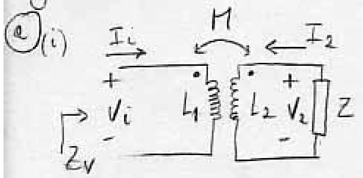
$v_o(t) = A|H(j\omega)|\cos(\omega t + \varphi + \arg(H(j\omega)))$

$H(j\omega_{int}) = 0$, $H(j\omega_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\angle\frac{\pi}{4}$, $H(j100\omega_2) \simeq 1\angle 0$

$$\Rightarrow \boxed{v_o(t) = 1V\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\omega_2 t + \frac{\pi}{4}) + \cos(100\omega_2 t - \frac{\pi}{4})\right]}$$

Ejercicio 2: (3)

(a) (i)



Las ecuaciones para el transformador son:

$V_i = L_1 j\omega I_i + M j\omega I_2$

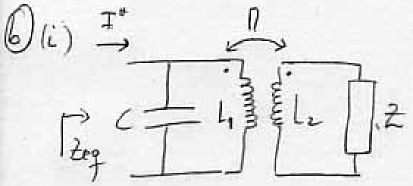
$V_2 = L_2 j\omega I_2 + M j\omega I_i$

En el secundario se cumple: $V_2 = -Z I_2$ y despejando $I_2 = \dfrac{-M j\omega I_i}{Z + L_2 j\omega}$

$\Rightarrow V_i = \left[L_1 j\omega - \dfrac{(M j\omega)^2}{Z + L_2 j\omega} \right] I_i \Rightarrow \boxed{Z_V = \dfrac{L_1 j\omega Z + (L_1 L_2 - M^2)(j\omega)^2}{Z + L_2 j\omega}}$

(ii) Si es perfecto se cumple $L_1 L_2 = M^2 \Rightarrow \boxed{Z_V = \dfrac{L_1 j\omega Z}{Z + L_1 j\omega}}$

(b) (i)



$Z_{eq} = \frac{1}{Cj\omega} // Z_V \Rightarrow Y_{eq} = Cj\omega + \dfrac{Z + L_2 j\omega}{L_1 j\omega Z}$

$\Rightarrow Z_{eq} = \dfrac{L_1 j\omega Z}{Z(L_1 C (j\omega)^2 + 1) + L_2 j\omega}$ y si $L_1 C (j\omega)^2 + 1 = 0$

$\Rightarrow Z_{eq} = \left(\dfrac{L_1}{L_2}\right) Z$ colineal a Z como se quería $\Rightarrow \boxed{C = \dfrac{1}{L_1 \omega^2}}$

(ii) Manteniendo la notación de la parte (a), el nudo en el primario resulta:

$I^* = V_i C j\omega + I_i \Rightarrow I_i = I^* - V_i C j\omega$

Las ecuaciones para el transformador son:

$V_i = L_1 j\omega (I^* - V_i C j\omega) + M j\omega I_2$

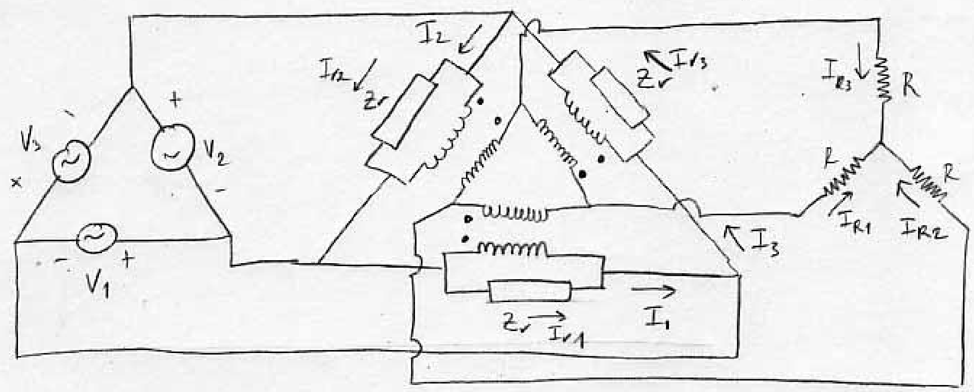
$V_2 = L_2 j\omega I_2 + M j\omega (I^* - V_i C j\omega)$

Recordando que $M = \sqrt{L_1 L_2}$ y $Cj\omega = -\dfrac{1}{L_1 j\omega} \Rightarrow \boxed{I_1^* = -\sqrt{\dfrac{L_2}{L_1}}\, I_2}$

$\Rightarrow \boxed{V_1 \sqrt{\dfrac{L_2}{L_1}} = V_2}$ por lo cual se comporta como un transformador ideal a la frecuencia de trabajo con relación de vueltas equivalente

$\boxed{n = \sqrt{\dfrac{L_1}{L_2}}}$

(c) (4)

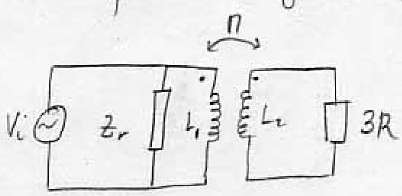


$v_1(t) = \sqrt{2}\,5000 \cos(\omega t)\,V$ $\qquad R = 70\,\Omega$

$v_2(t) = \sqrt{2}\,5000 \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3})\,V$ $\qquad L_1 = 516\,Hy\ ,\ L_2 = 1\,Hy$

$v_3(t) = \sqrt{2}\,5000 \cos(\omega t + \frac{4\pi}{3})\,V$ $\qquad \omega = 100\pi\ rad/s$

(i) Transfigurando la carga de estrella a triángulo de resistencias de valor 3R, el circuito que ve la fuente por fase es:



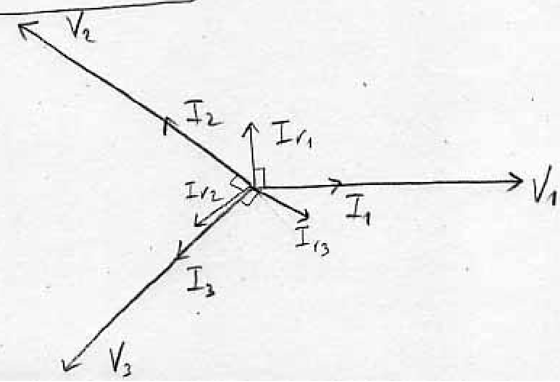
Si elijo Z_r como un condensador de valor $C^* = \frac{1}{L_1\omega^2}$ la impedancia vista por la fuente será $Z_v = \left(\frac{L_1}{L_2}\right) 3R$ con lo cual no hay potencia reactiva entregada por la fuente. $\Rightarrow$ $\boxed{C^* = 19\,nF}$

(ii) $I_i = \dfrac{V_i}{Z_v}$ $\quad i = 1,2,3$ $\quad \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 &= 46\,mA \angle 0 \\ I_2 &= 46\,mA \angle 120^\circ \\ I_3 &= 46\,mA \angle 240^\circ \end{aligned}}$$

$I_{r_i} = V_i\, C^* j\omega \quad i = 1,2,3$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} I_{r1} &= 31\,mA \angle 90^\circ \\ I_{r2} &= 31\,mA \angle 210^\circ \\ I_{r3} &= 31\,mA \angle 330^\circ \end{aligned}}$$



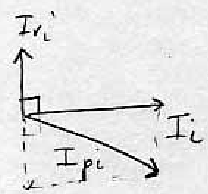
(5)

(iii) En cada fase planteando el nudo en el primario del transformador:

$I_i = I_{ri} + I_{pi}$ donde I_{pi} es la corriente por el primario del transformador.

$\Rightarrow I_{pi} = I_i - I_{ri}$

En cada caso $I_i \perp I_{ri}$ $\Rightarrow$



(iv)

$$\boxed{\begin{aligned} i_{r1}(t) &= \sqrt{2}\ 31\,mA \cos(\omega t + 90^\circ) \\ i_{r2}(t) &= \sqrt{2}\ 31\,mA \cos(\omega t + 210^\circ) \\ i_{r3}(t) &= \sqrt{2}\ 31\,mA \cos(\omega t + 330^\circ) \end{aligned}}$$