Sistemas Lineales 1
Primer parcial, 12 de mayo 2005

Recomendaciones generales:

- **Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.**
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.**
- **Justificar claramente los pasos realizados para resolver los problemas.**
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- **Se recuerda que la prueba es individual.**
- **Al finalizar, colocar las hojas dentro del sobre amarillo y entregarlo al docente del salón.**

Problema 1 **(11 puntos)**

Se considera el diente de sierra que se muestra en la figura 1. Se pide:

a) Hallar el valor medio de f(t).
b) Hallar T'', la derivada segunda de la distribución asociada al diente de sierra (se sugiere graficarla).
c) Hallar $c_n(T'')$, los coeficientes de Fourier de T''.
d) Usando b), hallar los coeficientes de Fourier $c_n(T)$ del diente de sierra.
e) Verificar el resultado calculando $c_n(T)$ mediante integración directa.
f) Calcular la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

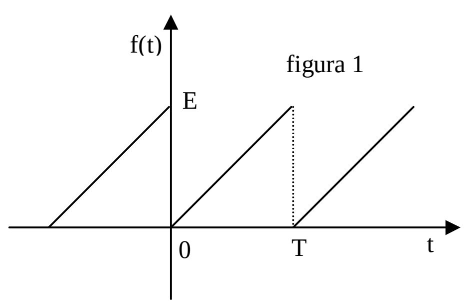


figura 1

Nota: Se recuerda la fórmula de integración por partes

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = f(t)g(t)\Big|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

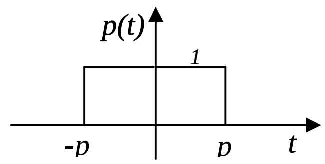
Problema 2 **(6 puntos)**

a) Usando las definiciones de derivada de una distribución, del producto convolución y del producto tensorial de dos distribuciones, mostrar la identidad: $(T * S)' = T * S'$.

b) **i)** Mostrar que $\langle T(t-a), j\,(t)\rangle = \langle T(t), j\,(t+a)\rangle$

ii) Probar que $T(t) * d\,(t-a) = T(t-a)$

c) Se consideran las siguientes tres distribuciones: $T(t) = T_f(t)$, $S(t) = T_g(t)$, $R(t) = d\,'(t)$, siendo *f(t)=sin(t)* y *g(t)=p(t)* .



i) Calcular *T * (R*S), (T*R)*S*

ii) ¿Se cumple la asociativa?

Problema 3 **(9 puntos)**

Se considera el circuito de la figura 1 en régimen sinusoidal donde un generador alimenta una carga **variable** Z=R+jX. En cierto punto de trabajo, $Z=R_o+jX_o$, se tiene un diagrama fasorial V-I como en la figura 2 y la carga consume potencias $\mathbf{P_o}$ y $\mathbf{Q_o}$.

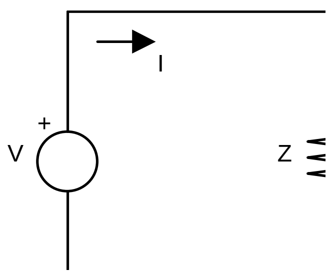


figura 1

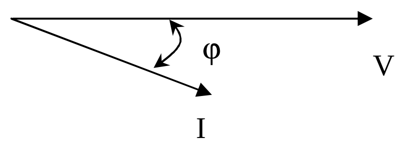


figura 2

a) **i)** Teniendo en cuenta la posible variación de Z, hallar el lugar geométrico del extremo del fasor I cuando la potencia activa es constante igual a $\mathbf{P_o}$. **Justificar claramente los argumentos utilizados para su construcción.**

ii) Repetir la parte anterior cuando la potencia reactiva es constante igual a $\mathbf{Q_o}$.

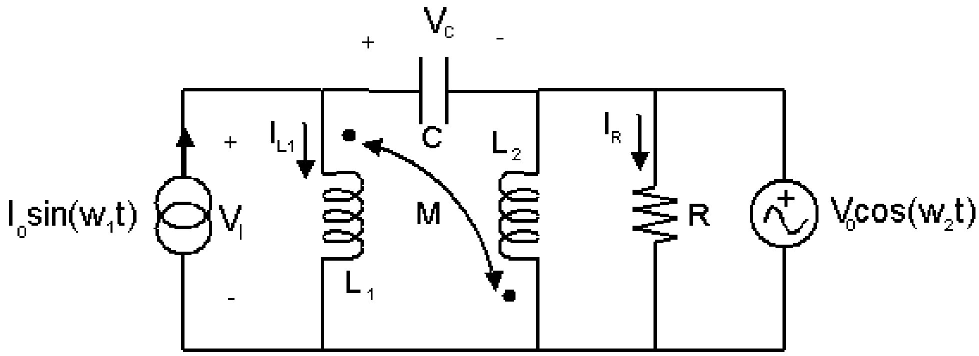
b) **i)** Calcular el valor de la impedancia Z_1 en función de R_o y X_o, a conectar **en paralelo** con el generador y que cumpla:

- que **la potencia activa suministrada por la fuente siga siendo Po**.
- que **la corriente suministrada por la fuente sea mínima**.

ii) ¿La impedancia Z_1 deberá ser sélfica o capacitiva?

Problema 4 **(14 puntos)**

Se considera el circuito de la figura en régimen sinusoidal donde las fuentes son de **diferente** frecuencia ω_1 y ω_2. Sean V_I el voltaje en bornes de la fuente de corriente, I_{L1} la corriente por la bobina L_1, V_C el voltaje en bornes del condensador e I_R la corriente por la resistencia. **Se cumple que $L_1 = L_2 = L$ y el transformador es perfecto.**



$$w_1 = 314\, rad/s \quad , \quad w_2 = 377\, rad/s$$
$$I_0 = 2A \quad , \quad V_0 = 311V$$
$$L = 20mHy \qquad \text{Transformador perfecto}$$
$$R = 50\Omega \quad , \quad C = 10mF$$

a) Aplicando el principio de superposición, dibujar dos circuitos en fasores que superpuestos sean equivalentes (**en el tiempo**) al circuito de la figura.

b) Calcular los fasores V_I, I_{L1} e I_R debidos a la fuente de frecuencia ω_1 y ubicarlos en un diagrama fasorial junto al fasor de la fuente.

c) **i)** Hallar los fasores V_I , I_{L1} e I_R debidos a la fuente de frecuencia ω_2.
ii) Representarlos en un nuevo diagrama fasorial junto al fasor de la fuente.
iii) Obtener gráficamente y agregar el fasor V_C al diagrama.

d) Hallar la expresión temporal para la corriente I_{L1}.

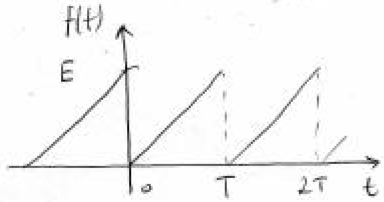
e) Hallar la potencia instantánea consumida por R y mostrar que por más que existan fuentes de diferente frecuencia, se puede definir una potencia media (activa) y calcularla.

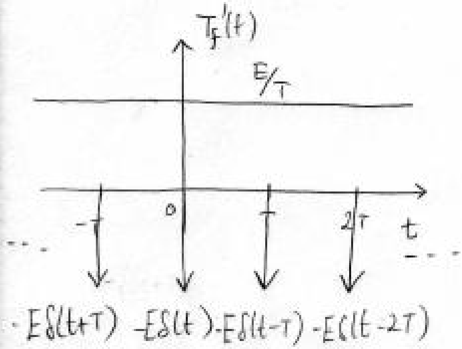
SISTEMAS LINEALES 1: PRIMER PARCIAL 2005

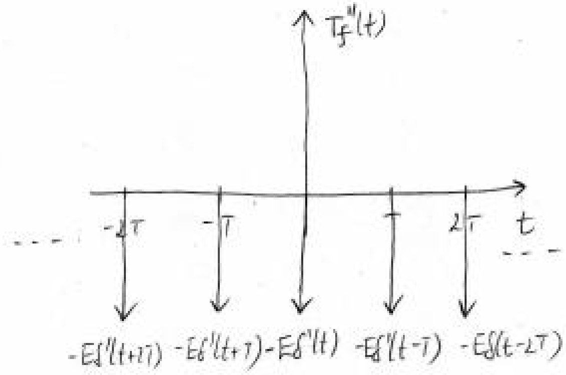
(1)

Problema 1:

(b)







$$\Rightarrow T_f'(t) = \frac{E}{T} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} -E\delta(t-nT)$$

$$\Rightarrow \boxed{T_f''(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} -E\delta'(t-nT)}$$

(c) $$c_n(T_f'') = \frac{1}{T}\left\langle T_f''(s), e^{-j\frac{2\pi n}{T}s}\right\rangle = \frac{1}{T}\left\langle -E\delta'(s), e^{-j\frac{2\pi n}{T}s}\right\rangle$$

$$= -\frac{E}{T}\left\langle \delta(s), j\frac{2\pi n}{T}e^{-j\frac{2\pi n}{T}s}\right\rangle = -j\frac{E2\pi n}{T^2} \Rightarrow \boxed{c_n(T_f'') = \frac{E2\pi n}{jT^2}}$$

(a) $$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{E}{2}$$

(d) $$c_n(T_f'') = \left(j\frac{2\pi n}{T}\right)^2 c_n(T_f) = -\left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2 c_n(T_f)$$

$$\Rightarrow c_n(T_f) = \frac{-\cancel{T^2}}{n^2\cancel{4}\pi^2}\cdot -j\frac{E\cancel{2}\cancel{\pi}\cancel{n}}{\cancel{T^2}} = j\frac{E}{2\pi n} \Rightarrow \boxed{c_n(T_f) = \begin{cases}\frac{E}{2} & \text{si } n=0\\ j\frac{E}{2\pi n} & \text{si } n\neq 0\end{cases}}$$

(f) Planteando Parseval: (2)

$$P_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2 dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = |c_0|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{E^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E^2}{2\pi^2 n^2}$$

$|c_n| = |c_{-n}|$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2\pi^2}{E^2}\left[P_n - \frac{E^2}{4}\right]$$

$$P_n = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{E^2}{T^2} dt = \frac{E^2}{T^3}\frac{t^3}{3}\Big|_0^T = \frac{E^2}{3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2\pi^2\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] = \frac{\pi^2}{6} \quad \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

(e) Cálculo directo de $c_n(T_F)$ por integración:

$$c_n(T_F) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-j\frac{2\pi n t}{T}} dt = \frac{1}{T}\int_0^T \underbrace{\frac{E}{T}t}_{u}\, \underbrace{e^{-j\frac{2\pi n t}{T}}}_{\frac{dv}{dt}} dt \quad \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{E}{T} \quad v = -\frac{T}{j2\pi n} e^{-j\frac{2\pi n t}{T}}$$

Aplicando integración por partes:

$$c_n(T_F) = \frac{-Ete^{-j\frac{2\pi n t}{T}}}{Tj2\pi n}\Bigg|_0^T + \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{E}{j2\pi n} e^{-j\frac{2\pi n t}{T}} dt}_{0} = -\frac{E}{j2\pi n}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_n(T_F) = j\frac{E}{2\pi n} \quad \text{si } n \neq 0}$$ al igual que antes.

3

Problema 2:

ⓐ $T*S = U(t) \implies \langle U'(t), \varphi(t)\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def de derivada}}}{=} -\langle U(t), \varphi'(t)\rangle =$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{def del producto} \\ \text{convolución}}}{=} -\langle T(x)\otimes S(y), \frac{d}{d(x+y)}\varphi(x+y)\rangle = -\langle T(x)\otimes S(y), \frac{d}{dy}\varphi(x+y)\rangle =$$

$$\frac{d}{dy} = \underbrace{\frac{d(x+y)}{dy}}_{=1}\cdot\frac{d}{d(x+y)}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{def del producto} \\ \text{tensorial}}}{=} \langle T(x), -\langle S(y), \frac{d}{dy}\varphi(x+y)\rangle\rangle = \langle T(x), \langle S'(y), \varphi(x+y)\rangle\rangle =$$

$$= \langle T(x)\otimes S'(y), \varphi(x+y)\rangle = \langle T(t)*S'(t), \varphi(t)\rangle$$

$$\implies \boxed{(T*S)' = T*S'}$$

ⓑ (i) $\langle T(t-a), \varphi(t)\rangle \underset{\substack{C.V. \\ x=t-a=g(t) \\ \implies g'(t)=1}}{=} \langle T(g(t)), \varphi(g(t)+a)\cdot|g'(t)|\rangle = \langle T(x), \varphi(x+a)\rangle$

$$\implies \boxed{\langle T(t-a), \varphi(t)\rangle = \langle T(t), \varphi(t+a)\rangle}$$

(ii) $\langle T(x)\otimes \delta(y-a), \varphi(x+y)\rangle = \langle T(x), \langle \delta(y-a), \varphi(x+y)\rangle\rangle$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{parte} \\ \text{anterior}}}{=} \langle T(x), \langle \delta(y), \varphi(x+y+a)\rangle\rangle = \langle T(x), \varphi(x+a)\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{parte} \\ \text{anterior}}}{=} \langle T(x-a), \varphi(x)\rangle$$

$$\implies \boxed{T*\delta(t-a) = T(t-a)}$$

ⓒ (i) $T*(R*S)$

$$R*S = \delta' * T_g(t) = T_g'(t) = T_{g'(t)} = \delta(t+\pi) - \delta(t-\pi)$$

$$\implies T*(R*S) = \sin(t+\pi) - \sin(t-\pi) = -\sin(t) - (-\sin(t)) = 0$$

$$\implies \boxed{T*(R*S) = 0}$$

4

$(T * R) * S \qquad T * R = T_f * \delta' = T'_f = T_{f'} = T_{\cos(t)}$

$\Rightarrow (T * R) * S = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\tau - t)\,d\tau \doteq \sin(\tau - t)\Big|_{-\pi}^{\pi}$

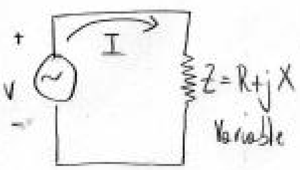
$= \sin(\pi - t) - \sin(-(\pi + t)) = \sin(t+\pi) - \sin(t - \pi) = 0$

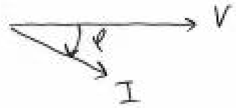
$\Rightarrow \boxed{(T * R) * S = 0}$

(ii) Si, y era de esperar que se cumpla pues dos de los tres distribuciones son de soporte acotado.

Problema 3: ⑤

Para $Z = R_0 + jX_0$ se tiene el siguiente diagrama fasorial



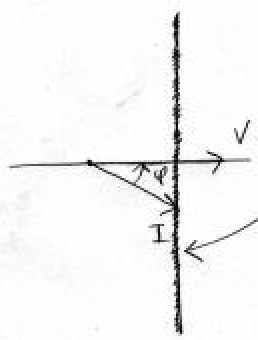


La carga consume P_0 y Q_0 en estas condiciones

ⓐ (i) Busco el lugar geométrico del extremo del fasor I cuando la potencia activa es constante e igual a P_0.

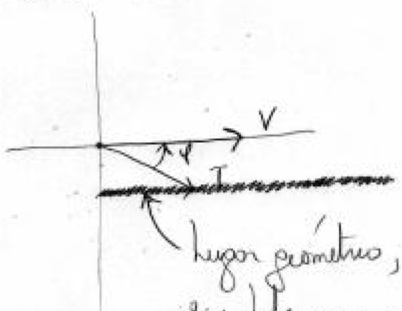
$\Rightarrow P_0 = |V_{ef}||I_{ef}|\cos\varphi \Rightarrow \dfrac{P_0}{|V_{ef}|} = |I_{ef}|\cos\varphi = cte.$

El lugar geométrico corresponde a los fasores cuya proyección según la dirección del fasor de la fuente es constante.



Lugar geométrico, para todos los puntos $|I_{ef}|\cos\varphi$ es constante. Además sabemos que debe pasar por el punto de trabajo donde la potencia era P_0.

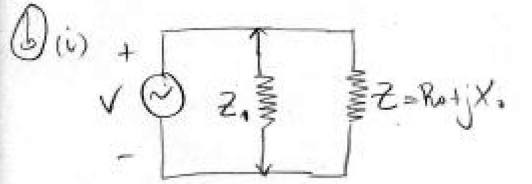
(ii) De forma similar $Q_0 = |V_{ef}||I_{ef}|\sin\varphi \Rightarrow \dfrac{Q_0}{|V_{ef}|} = |I_{ef}|\sin\varphi = cte.$



Lugar geométrico, para todos los puntos $|I_{ef}|\sin\varphi$ es constante. Sabemos que debe pasar por el punto de trabajo donde la reactiva era Q_0 y además es una semirecta ya que $Re\{Z\} \geq 0$ (I sólo puede estar en el 1^er^ y 4^o^ cuadrante).

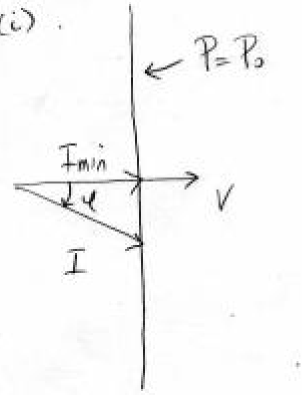
6

(b) (i)



Si quiero que la potencia activa siga siendo P_0 $\Rightarrow$ $\boxed{Z_1 = jX_1}$ puramente reactiva.

Por otro lado, debo buscar la corriente mínima sobre el lugar geométrico trazado en (a)(i).



Es fácil ver que la corriente es mínima cuando está en fase con V. $\Rightarrow$ la impedancia vista por la fuente debe ser puramente resistiva.

$\Rightarrow Z_V = Z_1 \parallel Z$ debe ser real.

$$Z_V = \frac{jX_1(R_0 + jX_0)}{R_0 + j(X_1 + X_0)} = \frac{-X_0X_1 + jR_0X_1}{R_0 + j(X_1 + X_0)}$$

Si es real $\Rightarrow -\frac{R_0\cancel{X_1}}{X_0\cancel{X_1}} = \frac{X_1 + X_0}{R_0} \Rightarrow -R_0^2 = X_0X_1 + X_0^2$

$$\Rightarrow \boxed{X_1 = -\frac{R_0^2 + X_0^2}{X_0}}$$

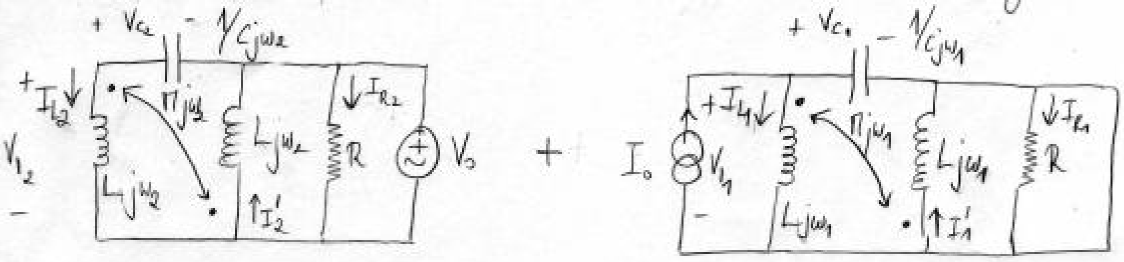
(ii) Del diagrama fasorial en el punto de trabajo se observa que la corriente atrasa el voltaje $\Rightarrow$ Z es inductiva, $X_0 > 0$

$\Rightarrow X_1 < 0$ y por lo tanto $\boxed{Z_1 \text{ será puramente capacitiva.}}$

Problema 4: 7

a) Aplico superposición y obtengo dos estados que superpuestos son equivalentes (en el tiempo) al circuito original.

Anulo la fuente de corriente Anulo la fuente de voltaje.



b) Trabajo con el circuito que tiene la fuente de voltaje (frecuencia ω_2) anulada.

El transformador es perfecto $\Rightarrow M = \sqrt{L.L} = L$

La resistencia queda cortocircuitada $\Rightarrow \boxed{I_{R1} = 0}$

Las ecuaciones del transformador son:

$$V_{I1} = Lj\omega_1 I_{L1} + Lj\omega_1 I'_1$$
$$0 = Lj\omega_1 I'_1 + Lj\omega_1 I_{L1}$$

$\Rightarrow \boxed{V_{I1} = 0}$ y además $V_{C1} = 0$

Planteando el nudo en el primario: $I_0 = I_{L_1} + \underbrace{V_{C_1} Cj\omega_1}_{0} \Rightarrow \boxed{I_{L_1} = I_0}$

$$V_{I_1}, I_{R1} \longrightarrow I_0, I_{L_1}$$

c) Trabajo con el circuito que tiene la fuente de corriente (frecuencia ω_1) anulada.

$\Rightarrow I_{R_2} = \dfrac{V_0}{R} \Rightarrow \boxed{I_{R2} = 4{,}4A}$ donde $V_0 = 220V\angle 0°$

Las ecuaciones del transformador son:

$$V_{I2} = Lj\omega_2 I_{L_2} + Lj\omega_2 I'_2$$
$$-V_0 = Lj\omega_2 I'_2 + Lj\omega_2 I_{L2}$$

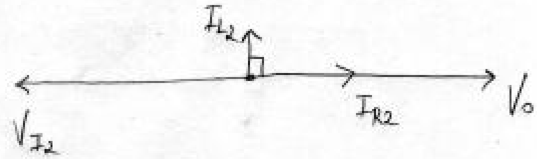
$\Rightarrow V_{I2} = -V_0 \Rightarrow \boxed{V_{I2} = -220V}$

(8)

Planteando el nudo en el primario: $I_{L_2} = (V_0 - V_{I2}) C j\omega_2 = 2 C j\omega_2 V_0$

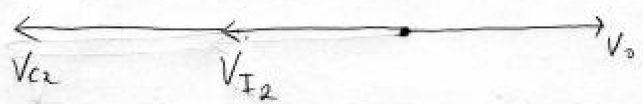
$\Rightarrow \boxed{I_{L2} = 1,66 \angle 90°}$

(ii)



(iii) $V_{C2} = V_{I2} - V_0$. Los fasores son colineales y la resta se obtiene directamente

$\boxed{V_{C2} = -2V_0}$



(d) $i_L(t) = Im\left\{\sqrt{2}\, I_{L1} e^{j\omega_1 t}\right\} + Re\left\{\sqrt{2}\, I_{L2} e^{j\omega_2 t}\right\}$

$\Rightarrow \boxed{i_L(t) = 2\sin(\omega_1 t) + 2{,}35\cos\left(\omega_2 t + \frac{\pi}{2}\right) A}$

(e) $p(t) = v_0(t) \cdot i_R(t) = \sqrt{2} V_0 \cos(\omega_2 t) \cdot Re\left\{\sqrt{2} I_{R2} e^{j\omega_2 t}\right\}$ No hay términos de frecuencia ω_1

$\Rightarrow \boxed{p(t) = 1935 \cos^2(\omega_2 t)}$

La variación es sinusoidal a frecuencia ω_2 únicamente, con lo cual tiene sentido definir la potencia activa $P = \frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} p(t)\,dt$ con $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$

Para el cálculo se puede hacer la integral o directamente en fasores.

$P = R|I_{R2}|^2 \Rightarrow \boxed{P = 968 W}$