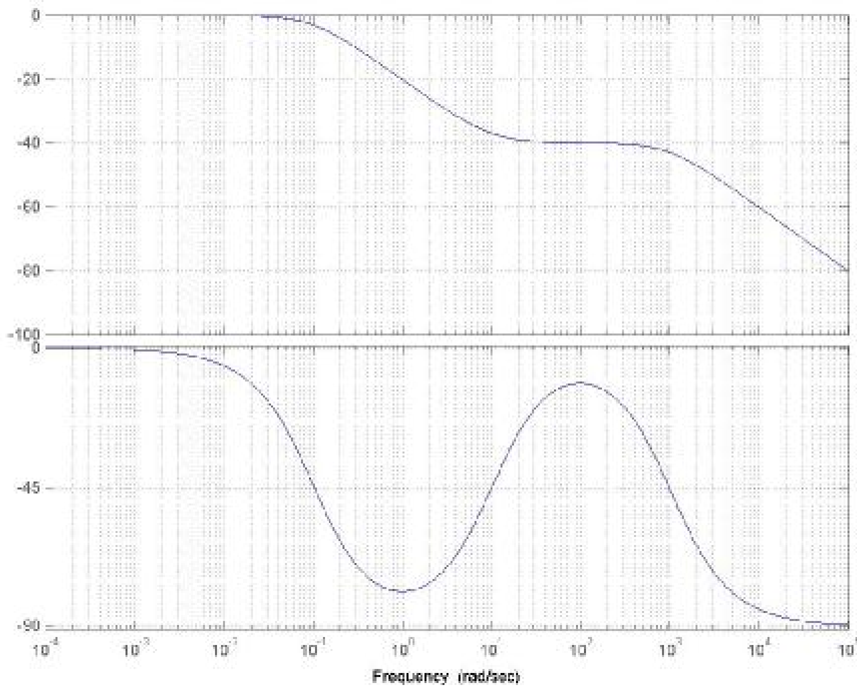
Examen de Sistemas Lineales 1
12 de diciembre del 2005

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente.

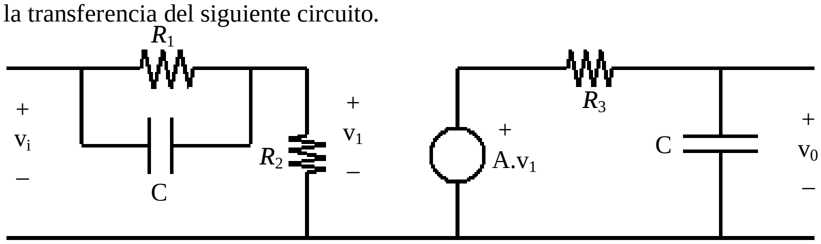
Ejercicio 1

En la figura se muestran los Diagramas de Bode reales de una transferencia $H(j\omega)$.

a) Se sabe que $H(j\omega)$ es de la forma $H(jw) = \dfrac{w_0.(jw+a)}{(jw+b).(jw+c)}$, con ω_0, a, b y c reales y positivos. A partir de los Diagramas, asignar valores razonables a ω_0, a, b y c. **Justificar**.



b) Hallar la transferencia del siguiente circuito.



c) Se sabe que $R_1 = \dfrac{R_3}{100}$ y que $w_3 = \dfrac{1}{R_3 C} = 0{,}1\ rad/s$. Hallar R_2 (en función de R_1) y A tales que la transferencia del circuito sea $H(j\omega)$.

d) Hallar exactamente la frecuencia ω_C a la cual el circuito introduce en régimen una atenuación a la salida de 2 db.

Ejercicio 2

Sea el circuito de la figura 1, en régimen sinusoidal y con el **transformador perfecto**.

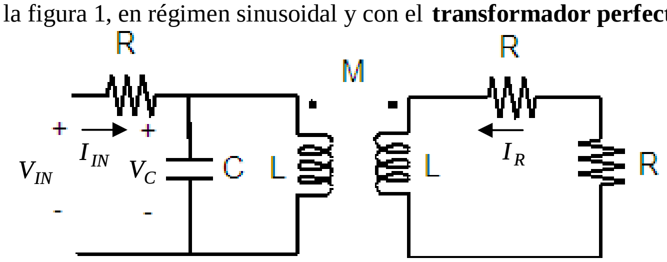
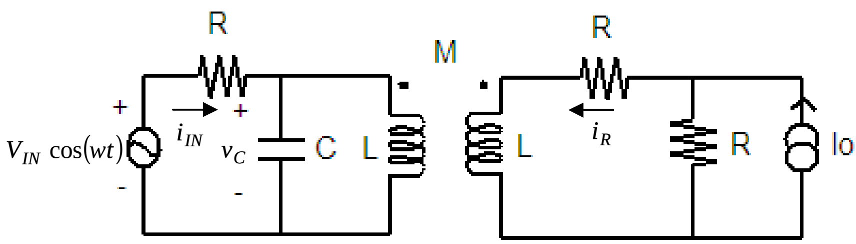


Figura 1

a) Calcular la transferencia $H(jw) = \dfrac{V_C(jw)}{V_{IN}(jw)}$

b) Deducir las expresiones para las transferencias $G_1(jw) = \dfrac{I_R(jw)}{V_{IN}(jw)}$ y $G_2(jw) = \dfrac{I_{IN}(jw)}{V_{IN}(jw)}$

Sea el circuito de la figura 2, con fuente de **tensión alterna**, fuente de **corriente continua** y con el **transformador perfecto**.



Datos:

$V_{IN} = \sqrt{2}.220V$ $I_O = 10A$

$R = 1\Omega$ $L = 10mHy$ $C = 1mF$

$w = 100p\,\dfrac{rad}{s}$

Figura 2

c) Calcular las expresiones temporales en régimen para $v_c(t)$, $i_{IN}(t)$ e $i_R(t)$. **Justificar claramente como trabaja con las fuentes y el circuito resultante en cada caso.**

d) i) Representar en un diagrama, los fasores asociados a los términos sinusoidales de $v_c(t)$, $i_{IN}(t)$ e $i_R(t)$. Incluir también el fasor asociado a la fuente de tensión.
ii) Ubicar a grandes rasgos (darle importancia al sentido) ,el fasor asociado al término sinusoidal de $i_C(t)$ (corriente por el condensador C).
iii) Hallar gráficamente el fasor asociado al término sinusoidal de la corriente por el primario del transformador. **Justificar**

e) i) Calcular la potencia activa consumida a la fuente de tensión.
ii) Calcular la potencia consumida a la fuente de corriente.

Examen de Sistemas Lineales 1
29 de julio del 2005

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

Son conocidas las propiedades de la distribución impulso:

$$\begin{cases} t\delta = 0 \\ t\delta' = -\delta \end{cases}$$

a) Calcular $t\delta''$ en función de δ'

b) Calcular $t^2\delta''$ en función de δ

c) Calcular en general $\alpha(t)\delta''(t)$, si $\alpha(t)$ es una función continua en 0 y verificar los resultados hallados en 1) y 2).

d) Aplicación: Calcular $< (t^2 - t)\,\delta'', \cos t - \operatorname{sen} t >$, justificando que se aplique la distribución a una función de soporte no acotado.

Pregunta 2

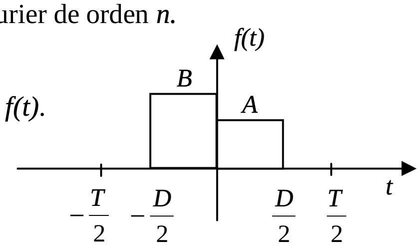
Se considera la función periódica *f(t)* de periodo T que se muestra en la figura.

a) Calcular el valor medio de la señal.

b) Calcular la potencia media.

c) Si $D = \frac{T}{4}$, hallar en función de *A* y *B*, **justificando claramente y sin usar la parte d)**, la suma $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$, siendo *n* el coeficiente de Fourier de orden *n.*

d) Si $D = \frac{T}{4}$, hallar los coeficientes de Fourier de *f(t).*



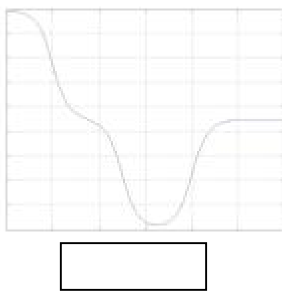
Pregunta 3

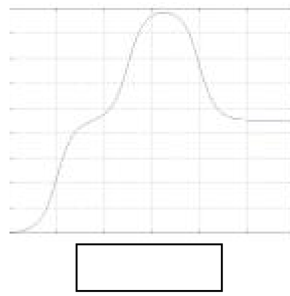
Sean $0<a<b<c$. Se consideran las siguientes transferencias:

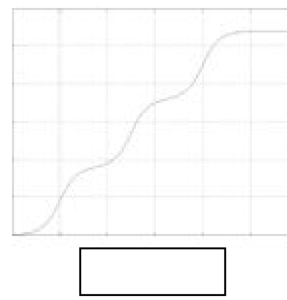
$$H_1(jw)=\frac{(jw-b)}{(jw+a)(jw-c)} \quad ; \quad H_2(jw)=\frac{(jw+b)}{(jw-a)(jw+c)} \quad ; \quad H_3(jw)=\frac{(jw+b)}{(jw-a)(jw-c)} \quad ;$$

a) Mostrar analíticamente que tienen todas el mismo Diagrama de Bode real de módulo.

b) Indicar cuál de los siguientes Diagramas de Bode de fase corresponde a cada transferencia. **Justificar detalladamente**.







Pregunta 4

a) Enunciar y demostrar el Teorema de Blondell, para cargas en estrella o en triángulo, explicando claramente cómo usa las hipótesis.

b) Describir claramente el Método de los dos vatímetros para medir potencia en un sistemas trifásico, incluyendo contexto de aplicación, esquema de conexionado y fundamentación teórica.

SISTEMAS LINEALES 1: DICIEMBRE 2005 ①

Ejercicio 1:

$$H(j\omega) = \frac{\omega_0 (j\omega + a)}{(j\omega+b)(j\omega+c)} \qquad \omega_0, a, b, c \in \mathbb{R}^+$$

En primer lugar se observa que $\lim_{\omega\to 0} H(j\omega) = 1$ ya que $\begin{cases} \lim_{\omega\to 0} |H(j\omega)|_{dB} = 0 \\ \lim_{\omega\to 0} \arg(H(j\omega)) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 1 = \dfrac{\omega_0 a}{bc} \Rightarrow \omega_0 = \dfrac{bc}{a}$.

Del Bode de fase se obtiene que $H(j\frac{1}{10}) \approx -\frac{\pi}{4}$, $H(j10) \approx -\frac{\pi}{4}$, $H(j1000) \approx -\frac{\pi}{4}$

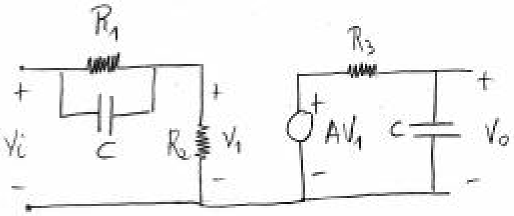
Del Bode de módulo se obtiene que $|H(j\frac{1}{10})|_{dB} \approx -3dB$, $|H(j1)|_{dB} \approx -20dB$, $|H(j10)|_{dB} \approx -37dB$
$|H(j100)|_{dB} \approx -40dB$, $|H(j1000)|_{dB} \approx -43dB$, $|H(j10^4)|_{dB} \approx -60dB$

Se puede deducir de estos datos, el efecto de un polo con parte real negativa en $\frac{1}{10}$ rad/s
Este introduce una caída en módulo a $-20\frac{dB}{dec}$ y un retardo de fase de $\frac{\pi}{2}$
luego se observa que el módulo se torna constante ($-40dB$) y la fase sufre un adelanto de $\frac{\pi}{2}$. De esto se deduce la presencia de un cero con parte real negativa en $10\frac{rad}{s}$. Observo que el cero y el polo se encuentran a dos décadas, y por eso el comportamiento, por ejemplo, en torno al polo en $\frac{1}{10}$ es similar a un sistema con transferencia $\dfrac{\frac{1}{10}}{j\omega + \frac{1}{10}}$

Finalmente se observa el efecto de un nuevo polo con parte real negativa en $1000\frac{rad}{s}$ ya que el módulo cae nuevamente a $-20\frac{dB}{dec}$ y hay un retardo de fase de $\frac{\pi}{2}$

Es razonable suponer:
$$\boxed{\begin{aligned} a &= 10\tfrac{rad}{s} \\ b &= \tfrac{1}{10}\tfrac{rad}{s} \\ c &= 1000\tfrac{rad}{s} \\ \omega_0 &= 10\, rad/s \end{aligned}} \qquad H(j\omega) = \frac{10\,(j\omega+10)}{(j\omega+1/10)(j\omega+1000)}$$

b) 2



Del divisor a la entrada:

$$V_1 = \frac{R_2}{R_2 + R_1 // \frac{1}{Cj\omega}} V_i \Rightarrow V_1 = \frac{R_2(R_1Cj\omega+1)}{R_2(R_1Cj\omega+1)+R_1} V_i$$

Del divisor a la salida:

$$V_0 = \frac{AV_1}{R_3Cj\omega+1} \Rightarrow V_0 = \frac{AR_2(R_1Cj\omega+1)}{(R_2R_1Cj\omega+R_1+R_2)(R_3Cj\omega+1)} V_i$$

$$\Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{AR_2(R_1Cj\omega+1)}{(R_2R_1Cj\omega+R_1+R_2)(R_3Cj\omega+1)}}$$

c) $R_1 = \frac{R_3}{100}$, $\omega_3 = \frac{1}{R_3C} = \frac{1}{10}\ rad/s \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{R_1C} = 10\ rad/s$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{A}{R_3C} \frac{\left(j\omega + \frac{1}{R_1C}\right)}{\left(j\omega + \frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}\right)\left(j\omega + \frac{1}{R_3C}\right)} \Rightarrow \text{Para que coincidan} \begin{cases} \frac{A}{R_3C} = \frac{A}{10} = \omega_0 = 10\ rad/s \\ \frac{R_1+R_2}{R_1R_2C} = \frac{10(R_1+R_2)}{R_2} = 1000\ rad/s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 100}, \quad \boxed{R_2 = \frac{R_1}{99}}$$

d) Busco la frecuencia ω_c a la cual $-2\,dB = 20 \log\left[\frac{10\sqrt{\omega_c^2+100}}{\sqrt{\omega_c^2+\frac{1}{100}}\sqrt{\omega_c^2+10^6}}\right]$

$$\Rightarrow -22 = 10 \log\left[\frac{\omega_c^2+10^2}{(\omega_c^2+10^{-2})(\omega_c^2+10^6)}\right] \Rightarrow 10^{-2,2} = \frac{\omega_c^2 + 10^2}{(\omega_c^2+10^{-2})(\omega_c^2+10^6)} \Rightarrow \omega_c^4 + (10^6+10^{-2})\omega_c^2 + 10^4 = 10^{2,2}\omega_c^2 + 10^{4,2}$$

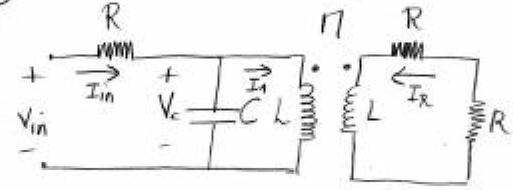
$$\Rightarrow \omega_c^4 + (10^6 - 10^{2,2} + 10^{-2})\omega_c^2 + 10^4 - 10^{4,2} = 0$$

$$z = \omega_c^2 \Rightarrow z = \begin{cases} \to 0,00585 \\ \to -999842\ \times \end{cases} \Rightarrow \boxed{\omega_c = 0,0764\ rad/s}$$

Ejercicio 2:

(3)

a)



Transformador perfecto: $M=\sqrt{L.L}=L$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} V_1 = Lj\omega(I_1+I_R) \\ V_2 = Lj\omega(I_1+I_R) \end{array}\right\} V_1=V_2=V_c$$

$$V_c=-2RI_R \Rightarrow I_R=-\frac{V_c}{2R}$$

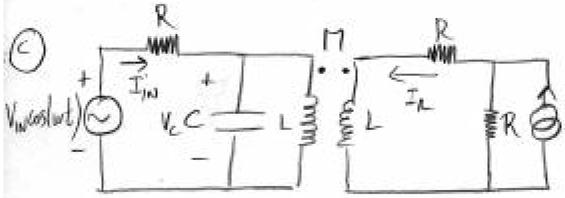
Planteando el nudo a la entrada: $\frac{V_{in}-V_c}{R}=V_cCj\omega+I_1$, $I_1=\frac{V_c}{Lj\omega}-I_R=V_c\left(\frac{1}{Lj\omega}+\frac{1}{2R}\right)$

$$\Rightarrow V_{in}=V_c\left[\frac{3Lj\omega+2RLC_1(j\omega)^2+2R}{2Lj\omega}\right] \Rightarrow \boxed{H(j\omega)=\frac{2Lj\omega}{2RLC(j\omega)^2+3Lj\omega+2R}}$$

b) $G_1(j\omega)=\frac{I_R}{V_{in}}=\frac{-V_c}{2RV_{in}}=-\frac{1}{2R}H(j\omega) \Rightarrow \boxed{G_1(j\omega)=\frac{-\frac{L}{R}j\omega}{2RLC(j\omega)^2+3Lj\omega+2R}}$

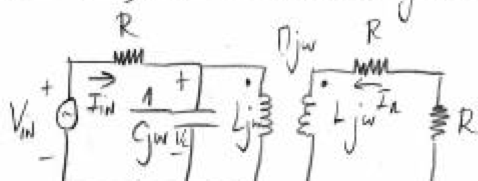
$$I_{in}=\frac{V_{in}-V_c}{R}=V_{in}\left(\frac{1-H(j\omega)}{R}\right) \Rightarrow G_2(j\omega)=\frac{1-H(j\omega)}{R} \quad , \boxed{G_2(j\omega)=\frac{1}{R}\cdot\frac{2RLC(j\omega)^2+Lj\omega+2R}{2RLC(j\omega)^2+3Lj\omega+2R}}$$

c)



Debo estudiar el circuito por superposición ya que tengo dos fuentes independientes de distinta frecuencia.

Anulo la fuente de corriente y estudio en regimen sinusoidal (frecuencia ω).



Tengo el circuito de la parte a) con fasor de entrada $V_{in}=220V\angle 0°$ (valores eficaces)
Uso las transferencias para calcular los fasores pedidos

$V_c=H(j\omega)V_{in}=147{,}7V\angle 0{,}16°$

$I_{in}=G_1(j\omega)V_{in}=73{,}3A\angle -0{,}32°$

$I_R=G_2(j\omega)V_{in}=73{,}9A\angle -179{,}84°$

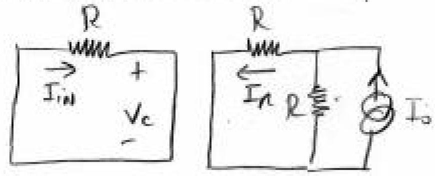
Por otro lado, anulando la fuente de tensión y analizando en régimen de continua:

$$v_1(t)=L\left(\underbrace{\frac{di_1(t)}{dt}}_{0}+\underbrace{\frac{di_2(t)}{dt}}_{0}\right)=0 \Leftarrow \text{El transformador se comporta como un cortocircuito.}$$

(4)

El condensador se comporta como un circuito abierto.

El circuito equivalente es:

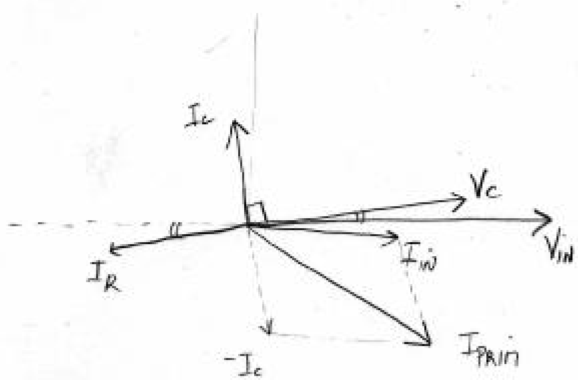


$\Rightarrow I_{IN} = 0$, $V_C = 0$, $I_R = \frac{I_0}{2} = 5A$

Por lo tanto, superponiendo las expresiones temporales en régimen resultan:

$$\boxed{\begin{array}{l} v_C(t) = \sqrt{2}\,.\,147{,}7V \cos(\omega t + 0{,}16^\circ) \\ i_{IN}(t) = \sqrt{2}\ 73{,}3A \cos(\omega t - 0{,}32^\circ) \\ i_R(t) = 5A + \sqrt{2}\ 73{,}9A \cos(\omega t - 179{,}84^\circ) \end{array}}$$

(d)



$I_C = V C j\omega \Rightarrow$ se encuentra 90° en adelanto al voltaje V_C

$I_{PRIM} = I_{IN} - I_C$ de la ecuación de nudos. Lo puedo ubicar sumando vectores mediante la regla del paralelogramo.

(e) (i) $P_{ACTIVA} = R\,|I_{IN}|^2 + 2R\,|I_R|^2 \Rightarrow \boxed{P_{ACTIVA} = 16{,}3KW}$

(ii) $P_{I_0} = (R//R)\, I_0^2 = \frac{R}{2} I_0^2 \Rightarrow \boxed{P_{I_0} = 50W}$