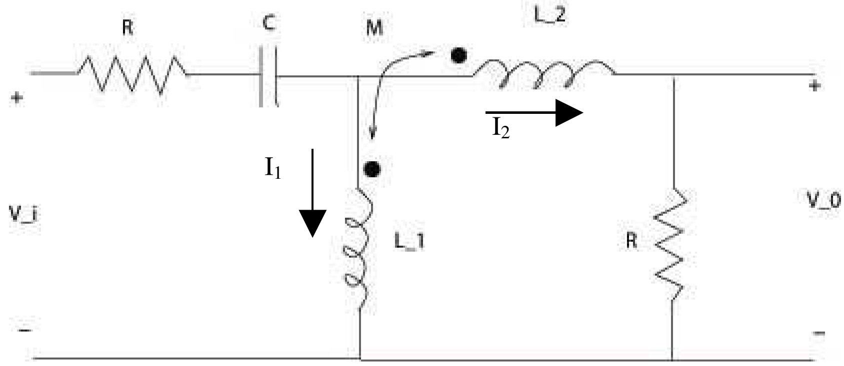
Examen de Sistemas Lineales 1

12 de diciembre del 2006

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente.

Ejercicio 1

Se considera el siguiente circuito:



a) Halle la transferencia H(jω)= Vo(jω)/Vi(jω).
(Sugerencia: plantee las ecuaciones del transformador y relacione las corrientes del mismo con la tensión de salida).

b) Demuestre que si el transformador es perfecto, la transferencia queda de la forma:

$$H(j\omega)=\frac{(L_1-M)C(j\omega)^2}{\left(2L_1+L_2-2M\right)C(j\omega)^2+\left(RC+\frac{L_1+L_2-2M}{R}\right)(j\omega)+1}$$

c) Realice los diagramas de Bode si se cumplen las siguientes relaciones:

$$L_2=4L_1 \qquad L_1C=\frac{1}{\omega_0^2} \qquad \text{y} \quad RC=\frac{1}{\omega_0}$$

d)

i) Si se introduce una entrada $v_i(t)=3\mathrm{V}\cos(2\omega_0 t)$, hallar la salida en régimen $v_0(t)$.

ii) Hallar la respuesta en régimen para $v_i(t)=1\mathrm{V}\cos(\omega_0 t)$.

iii) Mostrar que es posible trabajar a una frecuencia tal que la respuesta en régimen esté en cuadratura con respecto a la entrada.

Ejercicio 2

En el circuito de la figura, tenemos el sistema de fuentes

$$v_1 = 220.\sqrt{2}\sin(2.\pi 50\ t)$$

$$v_2 = 220.\sqrt{2}\sin(2.\pi 50\ t + \frac{\pi}{3})$$

$$v_3 = 220.\sqrt{2}\sin(2.\pi 50\ t + 2.\frac{\pi}{3})$$

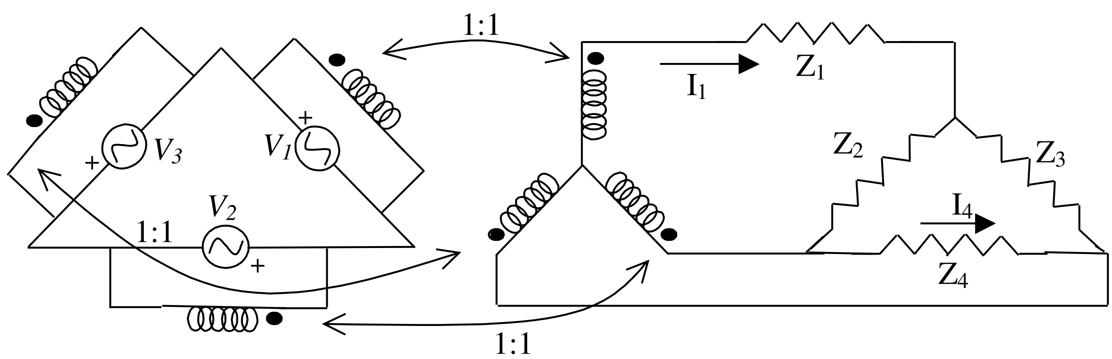
Los transformadores son ideales y tienen una relación de vueltas 1:1.

a) Si $Z_4 = j\,200\,\Omega$ y $Z_2 = 100\,\Omega$, ¿cuánto deben valer Z_1 y Z_3 para que el sistema de cargas sea equilibrado? Dibujar el equivalente monofásico.

b) Bosquejar un diagrama fasorial en el que figuren los fasores de tensión de la fuente trifásica y las corrientes I_1 e I_4.

c) Asumiendo las cargas como en la parte anterior, calcular la potencia aparente, la activa y la reactiva consumida por el conjunto de las cargas.

d) Compensar la componente reactiva de potencia. Indicar qué componentes colocaría. Calcular su valor y especificar el esquema de conexión.



Examen de Sistemas Lineales 1

12 de diciembre del 2006

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se deberá justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Asimismo se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

En el circuito de la figura, dados E, ω_1, $\omega_2 = 2\omega_1$, R, $X(\omega)$,
Se diseña Z_L para maximizar la potencia W_1 transferida a la carga a pulsación ω_1.

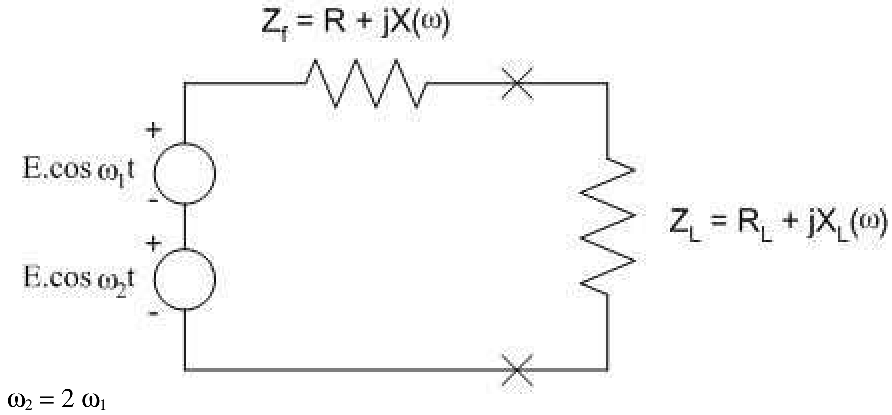
a) Hallar R_L y $X_L(\omega_1)$

b) Hallar W_1

c) Si $X = L\omega$, y $L\omega_1 = R$, hallar la potencia W_2 transferida a la carga a pulsación ω_2, en función de E y R.

d) Calcular la relación de amplitudes $A = \frac{V_1}{E}$, siendo V_1 la amplitud del voltaje de pulsación ω_1, en bornes de la carga Z_L.

e) Si Z_L introduce un pequeño efecto de distorsión no lineal, explicar cualitativamente (sin hacer cuentas) cómo cambia el numerador de la relación de A definida en **d)**.



Pregunta 2

Se considera el operador diferencial lineal normalizado de orden *n*:

$$D = \frac{\partial^n}{\partial t^n} + a_{n-1}\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{\partial}{\partial t} + a_0$$

a) Demostrar que $(D\delta)^{-1} = Y(t)\,f(t)$, siendo *f(t)* una función continua, con derivada de orden *n* continua, que verifica la ecuación diferencial *Df*=0 con condiciones iniciales adecuadas.

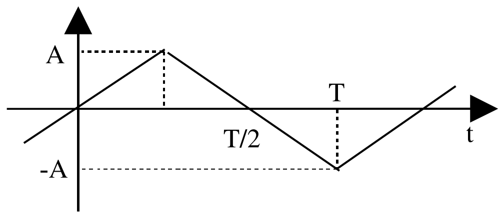
b) Aplicación: hallar la solución elemental del operador $D=3\frac{\partial^2}{\partial t^2}+1$. **Verificar**.

Pregunta 3

a) Sea U una distribución periódica de periodo T. Hallar los coeficientes de Fourier de U'', $c_n(U'')$, en función de los de U, $c_n(U)$.

b) Hallar y bosquejar la derivada segunda de la distribución asociada a la función periódica de la figura.

c) Aplicando la parte **a)**, hallar los coeficientes de Fourier de la distribución asociada a la función periódica de la figura.



Pregunta 4

a) Hallar la Transformada de Fourier (TdF) y la Transformada de Fourier Conjugada (TdFC) de la delta de Dirac, a partir de las **respectivas definiciones** para distribuciones cualesquiera.

b) A partir de la relación entre la TdF y la TdFC, hallar la TdF de la función idénticamente igual a 1.

c) Sea $G(f)$ la TdF de una función transformable $g(t)$ y sean θ y f_C reales positivos. Hallar, **de al menos dos maneras diferentes**, la TdF de $g(t).\cos(\omega_C t + \theta)$, $\omega_C=2\pi f_C$.

d) Calcuar la TdF de $Y(t).\ e^{-t}.sen(\omega_C t)$.

olución

$Z_4 = J200$

$$\begin{cases} Z_1 + \dfrac{Z_2 Z_3}{Z_2+Z_3+Z_4} = \dfrac{Z_3 Z_4}{Z_2+Z_3+Z_4} \\[2ex] \dfrac{Z_2 Z_4}{Z_2+Z_3+Z_4} = \dfrac{Z_3 Z_4}{Z_2+Z_3+Z_4} \end{cases} \Rightarrow Z_2 = \boxed{Z_3 = 100\,\Omega}$$

$$\Rightarrow Z_1 = \frac{Z_3 Z_4 - Z_2 Z_3}{Z_2+Z_3+Z_4} = \frac{200 + J600}{8} = \boxed{25 + J75}$$

$$Z_{monof} = \frac{Z_2 Z_4}{Z_2+Z_3+Z_4} = \boxed{50 + 50J}$$

$$S_{monof} = V_{eff} I_{eff}^* = \frac{220^2}{50-50J} = 684{,}5 \angle \pi/4$$

$P_{monof} = Re(S_{monof}) = 484$

$Q_{monof} = Im(S_{monof}) = 484$

$P_{total} = 3P_{mono}$

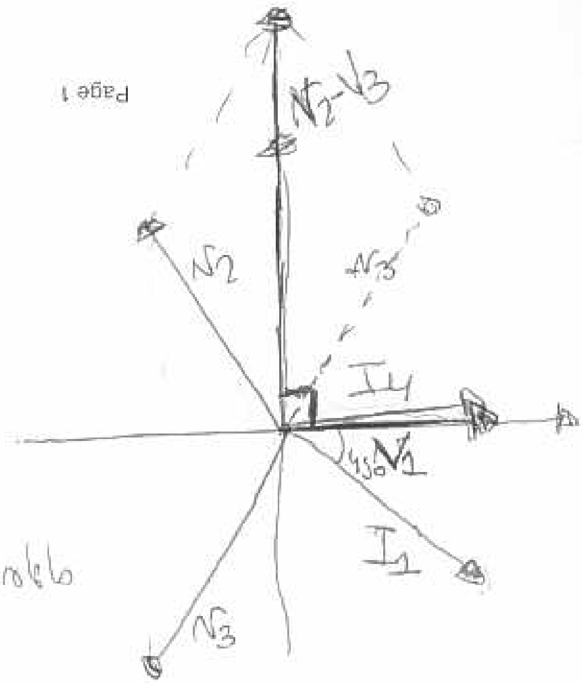
$Q_{total} = 3Q_{mono}$

$S_{total} = 3S_{mono}$

c)

$$I_1 = I_{monof} = \frac{V_{eff}}{Z_{monof}} = \frac{220}{50+j50} = 3{,}11 \angle -45 \text{ A}$$

$$I_4 = \frac{V_2 - V_3}{Z_4} = 1{,}905 \text{ A}$$



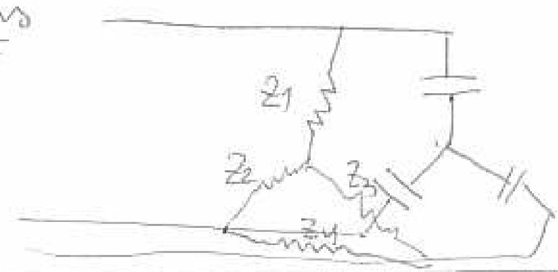
d) Coloco una impedancia en paralelo de valor JX_c

$$Q_c = Im\left(\frac{V_{eff}^2}{-JX_c}\right) \quad y \quad Q_c + Q_{mono} = 0$$

$$Q_c = -Q_{mono}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{eff}^2}{X_c} = -Q_{mono} \Rightarrow X_c = \frac{-V_{eff}^2}{Q_{mono}} = -100$$ Como X_c es negativo coloco un capacitor

$$-100 = \frac{-1}{wC} \Rightarrow C = 32\,\mu F$$ esquema



①

a) $V_1 = L_1 j\omega I_1 + Mj\omega I_2$

$V_2 = L_2 j\omega I_2 + Mj\omega I_1$

$$\boxed{I_2 = \frac{V_0}{R}}$$

$V_1 = V_2 + V_0$

$\Rightarrow V_2 = L_2 j\omega \frac{V_0}{R} + Mj\omega I_1$

$$V_1 = \left[\frac{L_2 j\omega}{R} + 1\right] V_0 + Mj\omega I_1 = L_1 j\omega I_1 + Mj\omega \frac{V_0}{R}$$

$$[L_1 - M] j\omega I_1 = \left[\frac{L_2 j\omega}{R} + 1 - \frac{Mj\omega}{R}\right] V_0$$

$$\boxed{I_1 = \frac{(L_2 - M) j\omega + R}{R[L_1 - M] j\omega} V_0}$$

$$\frac{V_i - V_1}{R + \frac{1}{Cj\omega}} = I_1 + I_2 \Rightarrow V_i = V_1 + \left(\frac{RCj\omega + 1}{Cj\omega}\right)(I_1 + I_2)$$

$$V_i = L_1 j\omega I_1 + Mj\omega I_2 + \left[\frac{RCj\omega + 1}{Cj\omega}\right](I_1 + I_2)$$

$$V_i = I_1 \left[L_1 j\omega + \frac{RCj\omega + 1}{Cj\omega}\right] + I_2 \left[Mj\omega + \frac{RCj\omega + 1}{Cj\omega}\right]$$

$$V_i = I_1 \left[\frac{L_1 C (j\omega)^2 + RCj\omega + 1}{Cj\omega}\right] + I_2 \left[\frac{MC(j\omega)^2 + RCj\omega + 1}{Cj\omega}\right]$$

$$\frac{V_i}{V_0} Cj\omega = \left[\frac{(L_2 - M) j\omega + R}{R(L_1 - M) j\omega}\right]\left[L_1 C (j\omega)^2 + RCj\omega + 1\right] + \frac{MC(j\omega)^2 + RCj\omega + 1}{R}$$

$$\frac{V_i}{V_0} Cj\omega = \frac{\left[(L_2 - M) j\omega + R\right]\left[L_1 C (j\omega)^2 + RCj\omega + 1\right] + [L_1 - M] j\omega \left[MC(j\omega)^2 + RCj\omega + 1\right]}{R(L_1 - M) j\omega}$$

$$\frac{V_i}{V_0} Cj\omega = \frac{(j\omega)^3 \left[(L_2 - M) L_1 C + [L_1 - M] MC\right] + (j\omega)^2 \left[RL_1 C + RC(L_2 - M + L_1 - M)\right]}{R(L_1 - M) j\omega}$$

$$\ldots (j\omega) \left[R^2 C + \frac{L_2 - M}{L_1 - M}\right] + [R]$$

②

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{R(L_1-M)C(j\omega)^2}{(j\omega)^3 C[L_1L_2 - \cancel{ML_1} + \cancel{L_1M} - M^2] + (j\omega)^2[2L_1+L_2-2M]RC + (j\omega)[R^2C + L_2 - 2M + L_1] + R}$$

b) Trafo perfecto $M^2 = L_1L_2$

$$\rightarrow \frac{V_o}{V_i} = \frac{R(L_1-M)C(j\omega)^2}{(j\omega)^2[2L_1+L_2-2M]RC + (j\omega)[R^2C + L_2 + L_1 - 2M] + R}$$

$$\boxed{\frac{V_o}{V_i} = \frac{(L_1-M)C(j\omega)^2}{(j\omega)^2[2L_1+L_2-2M]C + j\omega\left[RC + \frac{L_1+L_2-2M}{R}\right] + 1}}$$

c) $L_2 = 4L_1 \Rightarrow M = \sqrt{L_1L_2} = \sqrt{4L_1^2} = 2L_1$

$L_1C = \frac{1}{\omega_o^2}$, $RC = \frac{1}{\omega_o} \Rightarrow \frac{L_1}{R} = \frac{1}{\omega_o}$

$$H(j\omega) = \frac{-L_1C(j\omega)^2}{(j\omega)^2[2L_1 + \cancel{4L_1} - \cancel{4L_1}]C + (j\omega)\left[RC + \frac{L_1 + \cancel{4L_1} - \cancel{4L_1}}{R}\right] + 1}$$

$$H(j\omega) = \frac{-\frac{1}{\omega_o^2}(j\omega)^2}{(j\omega)^2\frac{2}{\omega_o^2} + (j\omega)\left[\frac{1}{\omega_o} + \frac{1}{\omega_o}\right] + 1} = \frac{-(j\omega)^2}{2(j\omega)^2 + 2\omega_o(j\omega) + \omega_o^2}$$

raíces del denominador: $2x^2 + 2x + 1 = 0$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{4}$ complejas conjugadas

$$\Rightarrow H(j\omega) = -\frac{1}{2}\frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^2 + \omega_o(j\omega) + \frac{\omega_o^2}{2}} \Rightarrow \omega_n = \frac{\omega_o}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow 2\zeta\omega_n = \omega_o = \sqrt{2}\,\omega_n$

$\Rightarrow \zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

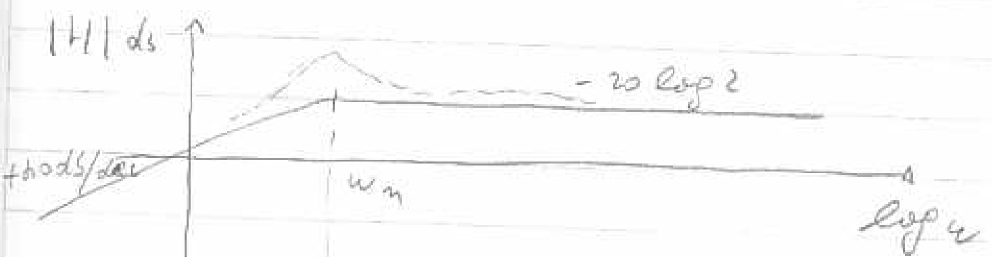
Diagramas de Bode:

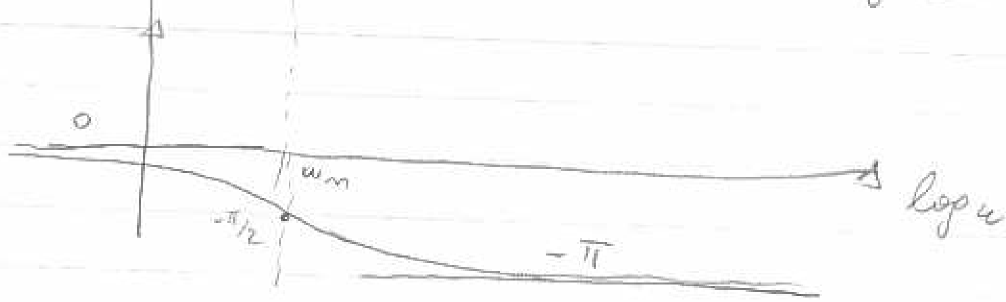
$$\omega \ll \omega_n \Rightarrow H(j\omega) \simeq -\frac{1}{2}\,\frac{(j\omega)^2}{\omega_n^2} \quad \begin{cases} |\,| = \frac{1}{2}\left|\frac{\omega}{\omega_n}\right|^2 \\ \arg = 0 \end{cases}$$

$$\omega \gg \omega_n \Rightarrow H(j\omega) \simeq -\frac{1}{2}\,\frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^2} = -\frac{1}{2} \quad \begin{cases} |\,| = \frac{1}{2} \\ \arg = \pm\pi \end{cases}$$

$$H(j\omega_n) = -\frac{1}{2}\,\frac{(+j\omega_n)^2}{\cancel{(j\omega_n)^2} + 2\zeta\omega_n(j\omega_n) + \cancel{\omega_n^2}} = \frac{\omega_n^2}{4\zeta j\omega_n^2} = -\frac{j}{4\zeta}$$

$$\arg = -\frac{\pi}{2}$$





d) i) $v_i(t) = 3V\cos(2\omega_0 t)$

$$v_0(t) = 3V\,\underbrace{|H(j2\omega_0)|}_{\simeq 0,5}\cos[2\omega_0 t + \underbrace{\arg H(j2\omega_0)}_{-150^\circ}]$$

en régimen.

$$H(j2\omega_0) = -\frac{1}{2}\,\frac{(j2\omega_0)^2}{(j2\omega_0)^2 + \omega_0(j2\omega_0) + \frac{\omega_0^2}{2}} = +\frac{1}{2}\,\frac{+4\omega_0^2}{-4\omega_0^2 + j2\omega_0^2 + \frac{\omega_0^2}{2}}$$

$$H(j2\omega_0) = \frac{1}{2}\,\frac{4}{-4 + j2 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{-8 + j4 + 1} = \frac{4}{-7 + j4}$$

$|H(j2\omega_0)| = 0,4961$

$\arg H(j2\omega_0) \simeq -150^\circ$

4

d) ii) Para obtener una salida en cuadratura, vemos desde el Bode (y desde su construcción) que tenemos que colocar a la entrada una sinusoide de frecuencia $\omega_m = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$

De esa manera, la salida en régimen presenta un retraso de fase de $\frac{\pi}{2}$ respecto de la entrada y una atenuación de:

$$\frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

d iii) Para $v_i(t) = A \cos(\omega_0 t)$

$\Rightarrow v_o(t) = A \, |H(j\omega_0)| \cos[\omega_0 t + \arg H(j\omega_0)]$

$$H(j\omega_0) = \frac{-1}{2} \frac{(+j\omega_0)^2}{(+j\omega_0)^2 + \omega_0(j\omega_0) + \frac{\omega_0^2}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{-\omega_0^2 + j\omega_0^2 + \frac{\omega_0^2}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{-\frac{1}{2} + j}$$

$$H(j\omega_0) = \frac{1}{-1 + 2j}$$

$|H(j\omega_0)| = 0{,}4472$ $\qquad \arg H(j\omega_0) \approx -116^\circ$