Sistemas Lineales 1
Primer parcial, junio 2001

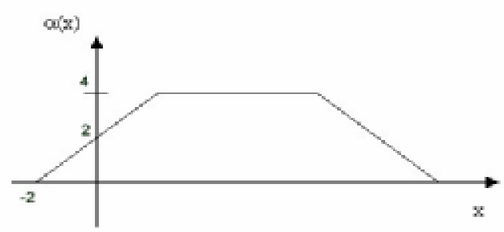
Recomendaciones generales:
Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.
En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar de problema y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.
Hacer problemas distintos en hojas separadas.
Usar las hojas de un solo lado
Se recuerda que la prueba es **individual**.

Problema 1 **(5 puntos)**

a) Hallar una fórmula para: $\alpha(x)\delta'(x)$, con $\alpha(x) \in C^{\infty}$

b) Probar que es posible extender esa fórmula para $\alpha(x)$ continua en 0 con derivada continua en 0.

c) Si $\alpha(x)$ es la función representada en la figura, calcular $<\alpha(x)\ \delta'(x), \alpha(x)>$



Problema 2 **(5 puntos)**

a) Definir potencia instantánea y potencia media en régimen sinusoidal.

b) Probar que $P = Re\left(\frac{\bar{V}I}{2}\right)$

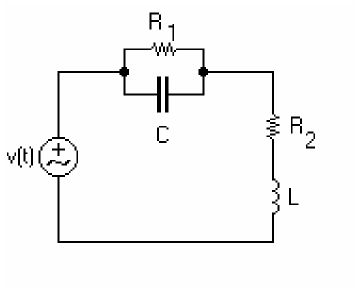
Problema 3 **(4 puntos)**

Sea $f(t) = \sum_{n \in Z} c_n(f).e^{jnwt}$ una función periódica. Hallar los coeficientes de Fourier de la función g en función de los de f para los siguientes casos:

a) $g(t) = f(t) + a$, con a real.
b) $g(t) = f(t-t_D)$ con t_D positivo
c) en el caso anterior calcular la potencia media de g en función de la de f.

<u>Problema 4</u> **(10 puntos)**

Para el circuito de la figura se pide:



$v(t) = 220.\sqrt{2}.cos(wt)$
$w = 100p$
$R_1 = 60\,\Omega$
$R_2 = 5\,\Omega$
$C = 330\ mf$
$L = 60\ mHy$

a)

i) Calcular la Zeq

ii) Si V es el fasor voltaje de la fuente, calcular los fasores I (corriente entregada por la fuente), Vm (caída sobre R_2 en serie con L), V-Vm, I_1 (corriente por R_1).

iii) Realizar un diagrama en donde se involucren los fasores V, I, V-Vm e I_1.

iv) Utilizando el diagrama fasorial, calcular el módulo de Ic (corriente por el condensador).

b)

i) Calcular la potencia activa y reactiva consumida a la fuente

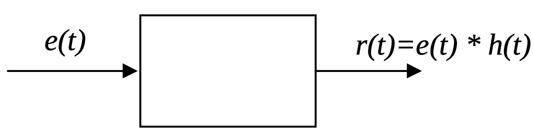
ii) Compensar la potencia reactiva, mediante un condensador en paralelo a la fuente, calculando el valor de dicho condensador.

c) Calcular i(t) (expresión **temporal**).

Sugerencia: Expresarla primero en función de los parámetros (sin sustituir por los valores numéricos) y luego sí expresar el resultado final en forma numérica.

<u>Problema 5</u> **(6 puntos)**

a) Se considera un sistema lineal cuya respuesta al impulso es $h(t)=Y(t)e^{-at}$, con a positivo. Hallar la respuesta del sistema $r(t)$ para la entrada $e(t)=Y(t)$.

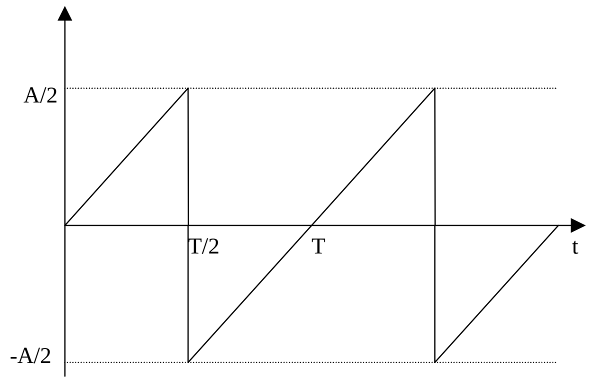


b) Sea el operador diferencial lineal $D = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 5\frac{\partial}{\partial t} + 4$.

Sabiendo que $(Dd)^{-1} = Y(t).(e^{-2t} - e^{-3t})$, hallar la solución en D_+' de la ecuación diferencial $DX = d'$.

<u>Problema 6</u> **(10 puntos)**

a) Hallar la serie de Fourier de la señal de la figura.



b) Sea un canal de comunicaciones que solo deja pasar componentes armónicas (señales sinusoidales) de frecuencia menor que ω_0. Calcular el mínimo ω_0 para que si a la entrada inyectamos la señal de la parte 1, a la salida se obtenga una señal con el 75% de la potencia media.

c) Escribir en términos de funciones reales la señal de salida del canal.

SISTEMAS LINEALES 1: PRIMER PARCIAL 2001

1

Problema 1:

a) $\langle \alpha\delta', \varphi\rangle = \langle \delta'(x), \alpha(x)\varphi(x)\rangle = -\langle \delta(x), (\alpha(x)\varphi(x))'\rangle$

$= -\langle \delta(x), \alpha'(x)\varphi(x) + \alpha(x)\varphi'(x)\rangle = -\alpha'(0)\varphi(0) - \alpha(0)\varphi'(0)$

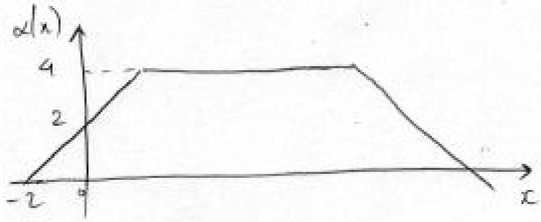
Por otro lado sea $\langle -\alpha'(0)\delta + \alpha(0)\delta', \varphi\rangle = -\alpha'(0)\langle\delta(x),\varphi(x)\rangle + \alpha(0)\langle\delta'(x),\varphi(x)\rangle$

$= -\alpha'(0)\varphi(0) - \alpha(0)\varphi'(0)$

Siendo $\varphi(x)$ arbitraria, se tiene la identidad en distribuciones: $\boxed{\alpha\delta' = \alpha(0)\delta' - \alpha'(0)\delta}$

b) Como se observa de la fórmula anterior, siendo la δ y δ' de soporte puntual y dado que solo necesitamos que α y α' estén bien definidos en el origen, observamos que la fórmula puede extenderse para cualquier α, siempre y cuando sea continua en el origen y tenga derivada continua en el origen.

c)



$\langle \alpha(x)\delta'(x), \alpha(x)\rangle = \langle \alpha(0)\delta'(x) - \alpha'(0)\delta(x), \alpha(x)\rangle$

$= \alpha(0)\langle\delta'(x),\alpha(x)\rangle - \alpha'(0)\langle\delta(x),\alpha(x)\rangle = -\alpha(0)\alpha'(0) - \alpha'(0)\alpha(0)$

$\Rightarrow \langle \alpha(x)\delta'(x), \alpha(x)\rangle = -2\alpha(0)\alpha'(0)$ y siendo $\alpha(0)=2, \alpha'(0)=1$

$\Rightarrow \boxed{\langle \alpha(x)\delta'(x), \alpha(x)\rangle = -4}$

2

Problema 2:

a) Para una componente eléctrica cuya tensión en bornes es la señal $v(t)$ y la corriente a través es $i(t)$, se define la potencia instantánea como:

$p(t) = v(t)\, i(t)$

En régimen sinusoidal si $v(t) = V_o \cos(\omega t)$ e $i(t) = I_o \cos(\omega t + \varphi)$

$\Rightarrow \boxed{p(t) = V_o I_o \cos(\omega t)\cos(\omega t + \varphi)}$

Se define la potencia media P, como el promedio de la potencia instantánea en un período: $\boxed{P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$

La definición tiene sentido para señales $v(t)$ e $i(t)$ periódicas de período T, lo cual es válido en régimen sinusoidal.

b) $p(t) = V_o I_o \cos(\omega t)\cos(\omega t + \varphi)$ y utilizando identidades trigonométricas se tiene que $p(t) = \frac{V_o I_o}{2}\cos(\varphi) + \frac{V_o I_o}{2}\cos(2\omega t + \varphi)$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{V_o I_o}{2}\left[\cos\varphi + \cos(2\omega t + \varphi)\right]dt = \frac{V_o I_o}{2}\cos\varphi$$

pues la integral de la sinusoidal se anula.

$\Rightarrow P = \frac{V_o I_o}{2}\cos\varphi$

Asociándoles fasores a $v(t)$ e $i(t)$, tenemos $V = V_o \angle 0°$, $I = I_o \angle \varphi$

$$\Rightarrow P = \mathrm{Re}\left[\frac{\bar{V} I}{2}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{V_o e^{j(0)} I_o e^{j\varphi}}{2}\right] = \frac{V_o I_o}{2}\cos\varphi$$

Por lo tanto, obtenemos que $\boxed{P = \mathrm{Re}\left[\frac{\bar{V} I}{2}\right]}$

3

Problema 3:

$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{jn\omega t}$, periódica y descrita por su Serie de Fourier.

a) $g(t) = f(t) + a$, $a \in \mathbb{R}$

$$c_n(g) = \frac{1}{T}\int_0^T (f(t)+a) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt = \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt}_{c_n(f)} + a \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt}_{=0}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_n(g) = c_n(f)}$$

b) $g(t) = f(t-t_0)$, $t_0 > 0$

$$c_n(g) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t-t_0) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt \underset{\substack{t-t_0=s \\ dt=ds}}{=} \frac{1}{T}\int_{-t_d}^{T-t_d} f(s) e^{-j\frac{2\pi}{T}n(t_0+s)} ds$$

$$\Rightarrow c_n(g) = e^{-jn\omega t_0} \cdot \underbrace{\frac{1}{T}\int_{-t_d}^{T-t_d} f(s) e^{-j\frac{2\pi}{T}ns} ds}_{c_n(f)} \quad \Rightarrow \boxed{c_n(g) = e^{-jn\omega t_0} c_n(f)}$$

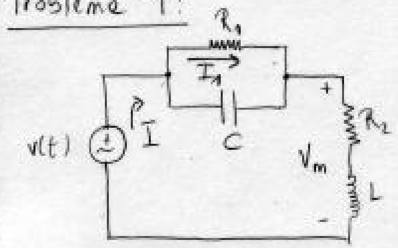
c) De la identidad de Parseval sabemos que $P_m = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$

$$P_m(g) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(g)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{|e^{-jn\omega t_0}|^2}_{=1} |c_n(f)|^2 \Rightarrow \boxed{P_m(g) = P_m(f)}$$

Este resultado es razonable, pues g es simplemente f retardada t_0, con lo cual no cambia la potencia de la señal.

4

Problema 4:



$v(t) = 220\sqrt{2}\cos(\omega t)$
$\omega = 100\pi$
$R_1 = 60\Omega$
$R_2 = 5\Omega$
$C = 330\,\mu f$
$L = 60\,m\,Hy$

a) (i) $Z_{eq} = R_1 // \frac{1}{Cj\omega} + R_2 + Lj\omega$

$= \frac{R_1}{R_1Cj\omega + 1} + R_2 + Lj\omega \Rightarrow Z_{eq} = \frac{R_1 + (R_1Cj\omega+1)(R_2+Lj\omega)}{R_1Cj\omega+1}$

$\Rightarrow \boxed{Z_{eq} = (6{,}5 + j\,9{,}4)\,\Omega = 11{,}5\,\Omega\angle 55^\circ}$

(ii) Trabajando con valores eficaces, $V = 220V\angle 0^\circ$

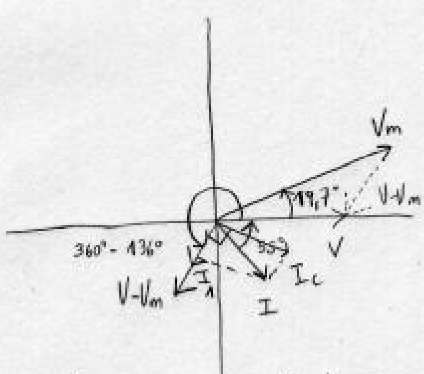
$\Rightarrow I = \frac{V}{Z_{eq}} \Rightarrow \boxed{I = (10{,}88 - j15{,}79)A = 19{,}17A\angle -55^\circ}$

$V_m = I(R_2 + Lj\omega) \Rightarrow \boxed{V_m = (352 + j126)V = 374V\angle 19{,}7^\circ}$

$\boxed{V - V_m = (-132 - j126)V = 183V\angle -136^\circ}$

$I_1 = \frac{V - V_m}{R_1} \Rightarrow \boxed{I_1 = (-2{,}19 - j2{,}10)A = 3{,}04A\angle -136^\circ}$

(iii)



(iv) Sabemos que el fasor I_c adelanta 90° a la tensión en bornes $V - V_m$.

Además $I = I_1 + I_c \Rightarrow |I_c| = \sqrt{|I|^2 - |I_1|^2} \Rightarrow \boxed{|I_c| = 18{,}97A}$

5

b) (i) $P = Re[V I^*] \Rightarrow \boxed{P = 2{,}39 \text{ KW}}$

$Q = Im[V I^*] \Rightarrow \boxed{Q = 3{,}47 \text{ KVar}}$

(ii) Coloco un condensador en paralelo de forma que aporte la reactiva consumida a la fuente.

$Q + Q_c = 0$ y $Q_c = -C\omega|V|^2 \Rightarrow C = \dfrac{Q}{\omega|V|^2}$, $\boxed{C = 228\,\mu\text{F}}$

c) $\boxed{i(t) = \sqrt{2} \cdot 19{,}17 \cos(\omega t - 0{,}967)\,\text{A}}$

6

Problema 5 :

a) $h(t) = Y(t)e^{-at}$, $a>0$

$e(t) = Y(t)$

$e(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow r(t) = e(t) * h(t)$

$$\Rightarrow r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(s)\, e^{-as}\, Y(t-s)\, ds = \int_0^t e^{-as}\, ds = -\frac{e^{-as}}{a}\Big|_0^t \Rightarrow \boxed{r(t) = \frac{Y(t)}{a}\left[1 - e^{-at}\right]}$$

b) $D = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \dfrac{5\partial}{\partial t} + 4$ y $(D\delta)^{-1} = Y(t)\left[e^{-2t} - e^{-3t}\right]$

Buscamos hallar la solución en D'_+ de $DX = \delta'$

$DX = \delta' \Rightarrow D(\delta * X) = \delta' \Rightarrow (D\delta) * X = \delta' \Rightarrow X = (D\delta)^{-1} * \delta'$

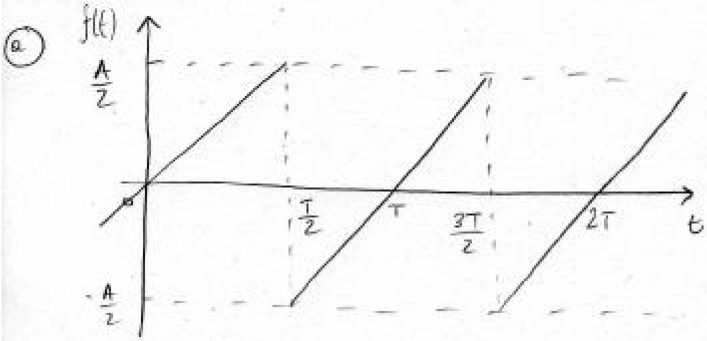
Por lo tanto X es la derivada como distribución de $(D\delta)^{-1}$

$$\Rightarrow \boxed{X = T_f \text{ con } f(t) = Y(t)\left[3e^{-3t} - 2e^{-2t}\right]}$$

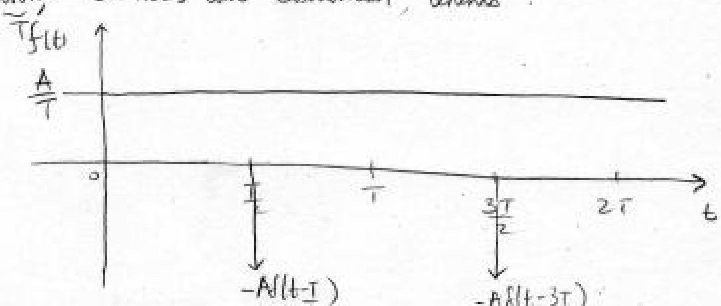
7

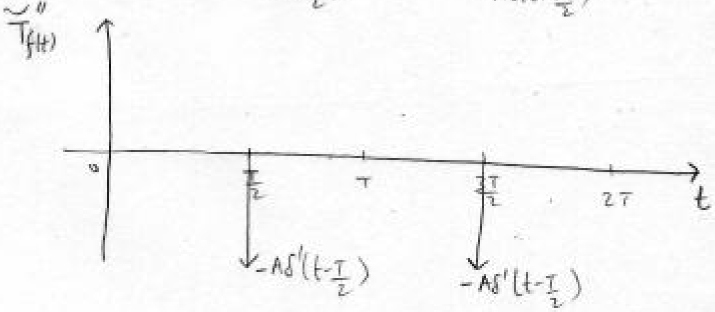
Problema 6:

ⓐ



Derivando dos veces como distribución, tenemos





$$\Rightarrow \tilde{T}''_f(s) = -A\delta'(s-\tfrac{T}{2})$$

$$c_n(T''_f) = \frac{1}{T}\left\langle -A\delta'(s-\tfrac{T}{2}), e^{-j\frac{2\pi}{T}ns}\right\rangle = \frac{A}{T}\left\langle \delta(s-\tfrac{T}{2}), -j\tfrac{2\pi}{T}n e^{-j\frac{2\pi}{T}ns}\right\rangle$$

$$c_n(T''f) = \frac{-A}{T^2}\, j2\pi n\,(-1)^n$$

$$\Rightarrow c_n(T_f) = \frac{c_n(T''_f)}{(j\frac{2\pi}{T}n)^2} \Rightarrow \boxed{c_n(T_f) = \begin{cases} 0 & n=0 \\ \frac{-A}{j2\pi n}(-1)^n & n\neq 0 \end{cases}}$$

ⓑ Por un lado tenemos que la potencia media de f(t) es: $P_m = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)^2\,dt$

$$\Rightarrow P_m = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(\frac{A}{T}t\right)^2 dt = \frac{A^2}{T^3}\,\frac{t^3}{3}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Rightarrow P_m = \frac{A^2}{12}$$

8

Por otro lado, de la identidad de Parseval tenemos que:

$$P_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \underbrace{|c_0|^2}_{0} + 2\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

Por lo tanto, me fijo la mínima cantidad de primeros armónicos que aportan el 75% de la potencia de $f(t)$.

$$2|c_1|^2 = \frac{A^2}{2\pi^2} \Rightarrow \frac{2|c_1|^2}{P_m} \times 100\% = 60{,}8\%$$

$$2(|c_1|^2 + |c_2|^2) = \frac{A^2}{2\pi^2} + \frac{A^2}{8\pi^2} \Rightarrow \frac{2(|c_1|^2+|c_2|^2)}{P_m} \times 100\% = 75{,}99\%$$

Por lo tanto si $\boxed{\omega_0 = 2\left(\frac{2\pi}{T}\right)}$, es decir si dejo pasar la fundamental y el segundo armónico, preservo un 76% de la señal $f(t)$.

c) Si $p(t)$ es la señal de salida del canal, se tiene que:

$$p(t) = \sum_{n=-2}^{2} c_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt} \underset{c_{-n}=\bar{c}_n}{=} 2\sum_{n=1}^{2} \mathrm{Re}\left[c_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}\right] = 2\sum_{n=1}^{2} \mathrm{Re}\left[\frac{jA(-1)^n}{2\pi n} e^{j\frac{2\pi}{T}nt}\right]$$

$$\Rightarrow p(t) = 2\left(\mathrm{Re}\left[\frac{A}{2\pi} e^{j\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2}\right)}\right] + \mathrm{Re}\left[\frac{A}{4\pi} e^{j\left(\frac{4\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right)}\right]\right)$$

$$\Rightarrow p(t) = \frac{A}{\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{A}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right)$$ y escribiendo en función de señales sinusoidales se tiene finalmente que:

$$\boxed{p(t) = \frac{A}{\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - \frac{A}{2\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right)}$$