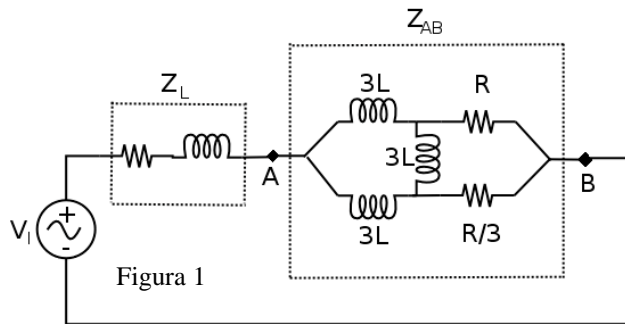


## Examen de Sistemas Lineales 1

### 29 de julio del 2006

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente.

### Ejercicio 1



- a) Sea el circuito de la figura 1 trabajando en régimen sinusoidal.
- i) Hallar la impedancia equivalente entre A y B ( $Z_{AB}$ ). Si  $R=100\ \Omega$ ,  $L=50\text{ mHy}$  y  $\omega=100\pi\text{ rad/s}$ , verificar que  $Z_{AB}=(25.4+j25.4)\ \Omega$ .
  - ii) Sabiendo además que  $V_i=500e^{j0}\text{ V}$  (fasor eficaz),  $Z_L=(1+j2)\ \Omega$ , calcular los fasores  $I$  (corriente entregada por la fuente),  $V_{Z_L}$  (caída en bornes de  $Z_L$ ) y  $V_{Z_{AB}}$  (caída en bornes de  $Z_{AB}$ ). Ubicarlos en un diagrama fasorial junto al fasor de la fuente.
  - iii) Calcular las potencias activas consumidas por  $Z_L$  y por  $Z_{AB}$ . También calcular la potencia activa suministrada por la fuente y verificar explícitamente el balance de potencias.

- b) Se considera el sistema de distribución de energía eléctrica de la figura 2, cuyos elementos constitutivos allí se indican. El objetivo de este tipo de instalaciones es suministrar potencia a un sistema de cargas de manera eficiente, minimizando las pérdidas en las líneas de transmisión.

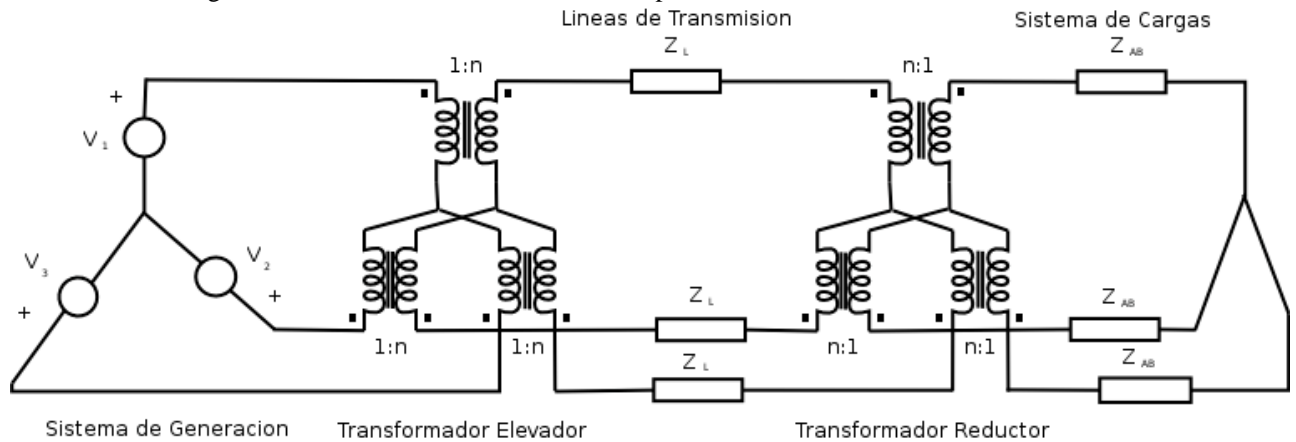


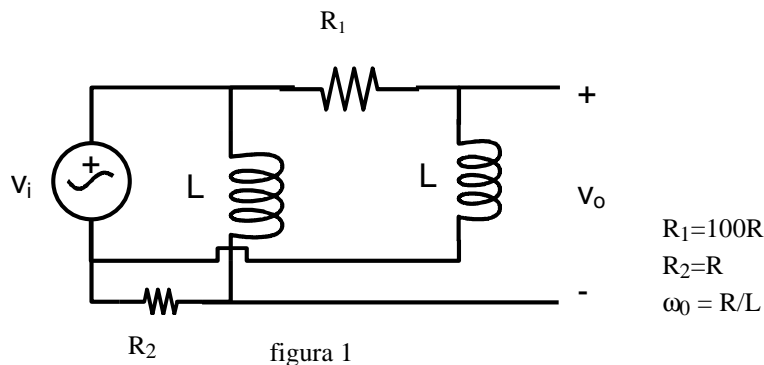
Figura 2

$V_1 = 500e^{j0}$  V,  $V_2 = 500e^{j2\pi/3}$  V y  $V_3 = 500e^{j4\pi/3}$  V fasores eficaces. Transformadores ideales con  $n=10$

- Hallar el equivalente monofásico de la instalación, visto desde el primario del transformador elevador, **explicando claramente**.
- Calcular las respectivas potencias trifásicas consumidas por las líneas ( $P_L$ ) y el sistema de cargas ( $P_{ZAB}$ ).
- Observando que  $P_L$  permite modelar las pérdidas Joule en las líneas de transmisión, comparar la performance de este sistema de distribución frente a uno idéntico pero sin transformadores.
- ¿Piensa que una compensación local de potencia reactiva (a nivel del sistema de cargas) en el sistemas de la figura 2 mejoraría la eficiencia del sistema? **Justificar**.

**Ejercicio 2**

- a) En el circuito de la figura 1 hallar la transferencia  $H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$ .



- b) Realizar los diagramas asintóticos de Bode de  $H(j\omega)$ .

- i) Explicar detalladamente la construcción.
- ii) A partir del Diagrama asintótico, hallar gráficamente la frecuencia a la cual el sistema atenúa lo máximo posible (**justificar**).
- iii) De forma analítica, hallar la máxima atenuación **real** en decibeles (justificar las aproximaciones razonables realizadas).

- c) Calcular la frecuencia a la cual  $v_i(t)$  y  $v_o(t)$  están en cuadratura.

d)

- i) Para la frecuencia de la parte c) realizar un diagrama fasorial en el que aparezcan  $V_i$  y la caída de voltaje en la resistencia  $R_2$ .
- ii) Ubicar gráficamente en dicho diagrama el fasor  $V_o$  (lo más a escala posible).
- iii) Hallar gráficamente en dicho diagrama las caídas de voltaje en los restantes elementos del circuito.

**Nota: justificar la ubicación de cada fasor, verificar que los ángulos sean coherentes.**

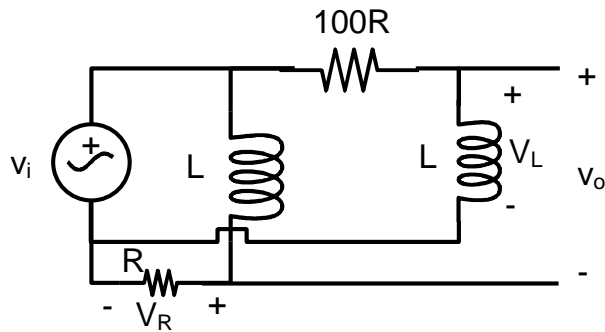
e)

- i) Hallar aproximadamente el rango de frecuencias en el cual el sistema distorsiona en amplitud más de 1 db.
- ii) Exprese el ancho del rango calculado en octavas.
- iii) Sean  $f_1$  y  $f_2$  los extremos del rango calculado en e)i) hallar  $v_o(t)$  para las entradas  $v_1(t) = 1V \cos(2\pi f_1 t)$  y  $v_2(t) = 1V \cos(2\pi f_2 t)$ .

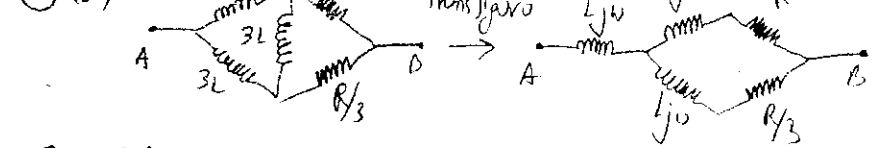
## Soluciones

### Ejercicio 2

$$\text{a) } V_0 = V_L - V_R = \left( \frac{Lj\omega}{Lj\omega + 100R} - \frac{R}{Lj\omega + R} \right) V_i \Rightarrow H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 - 100\omega_0^2}{(j\omega + 100\omega_0)(j\omega + \omega_0)}$$



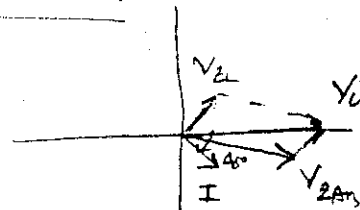
$$\text{b) } H(j\omega) = \frac{(j\omega - 10\omega_0)(j\omega - 10\omega_0)}{(j\omega + 100\omega_0)(j\omega + \omega_0)}$$

① (i)   $\rightarrow Z_{AB} = Lj\omega + (R+Lj\omega) \parallel (R/3+Lj\omega)$   
 $\Rightarrow Z_{AB} = \frac{9(Lj\omega)^2 + 8RLj\omega + R^2}{4R + 6Lj\omega}$   
 $R = 100\Omega, L = 50mH, \omega = 100\pi \text{ rad/s}$

(ii)  $V_i = 500V \angle 0^\circ, Z_L = (1+j2)\Omega$

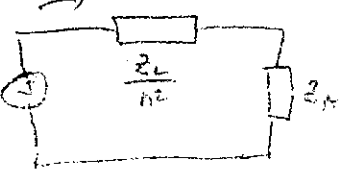
$\Rightarrow I = \frac{V_i}{Z_L + Z_{AB}} \Rightarrow I = (9,11 - j9,44)A, V_Z = Z_L I \Rightarrow V_Z = (28,01 + j8,77)V$

$V_{ZAB} = Z_{AB} \cdot I \Rightarrow V_{ZAB} = (471,95 - j8,77)V$



(iii)  $P_{Z_L} = \text{Re}\{Z_L\} |I|^2 \Rightarrow P_{Z_L} = 172,3W, P_{Z_{AB}} = \text{Re}\{Z_{AB}\} |I|^2 \Rightarrow P_{Z_{AB}} = 4383,1W$

$P_i = \text{Re}\{V_i I^*\} \Rightarrow P_{vi} = 4555,3W$   
 $P_{vi} = P_{Z_L} + P_{Z_{AB}}$   
suministrada consumo

② (i) Pasan las impedancias a los primarios de los transformadores ( $Z_{AB}$  pasa dos veces).  $\eta =$   
 $(Z_L \text{ una sola})$   
  
 Es el equivalente monofásico de la instalación vista desde el primario del transformador reductor.

(ii)  $P_{Z_{L_{TRI}}} = 3 \cdot \text{Re}\left\{\frac{Z_L}{n^2}\right\} |I|^2 \Rightarrow P_{Z_{L_{TRI}}} = 5,71W$

$P_{Z_{AB_{TRI}}} = 3 \cdot \text{Re}\{Z_{AB}\} |I|^2 \Rightarrow P_{Z_{AB_{TRI}}} = 14,73KW$

(iii) Indicador de eficiencia del sistema de distribución puede ser:  $\eta = \frac{P_{Z_{AB_{TRI}}}}{P_{Z_{L_{TRI}}} + P_{Z_{AB_{TRI}}}} \times 100$   
 Con transformadores resulta:  $\eta_1 = 99,9\%$

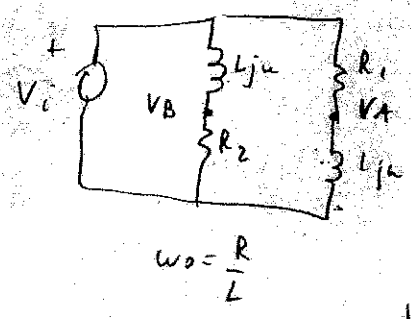
Sin transformadores:  $\eta_2 = 96\%$

iv) Seguramente a medida que se omita el factor de potencia de la carga implique menor coste a igual potencia media. Por lo tanto los pérdidas en las líneas que dependen de  $|I|^2$  disminuirán.

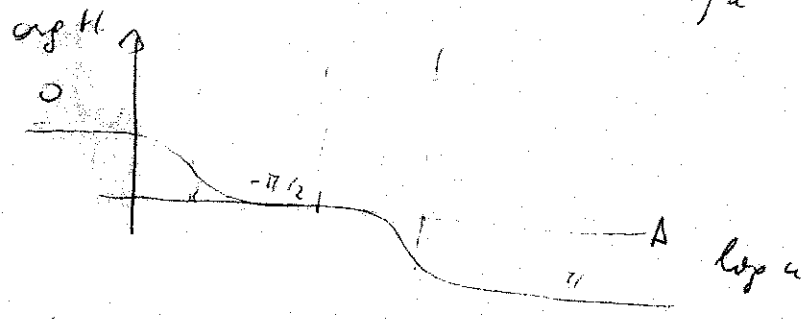
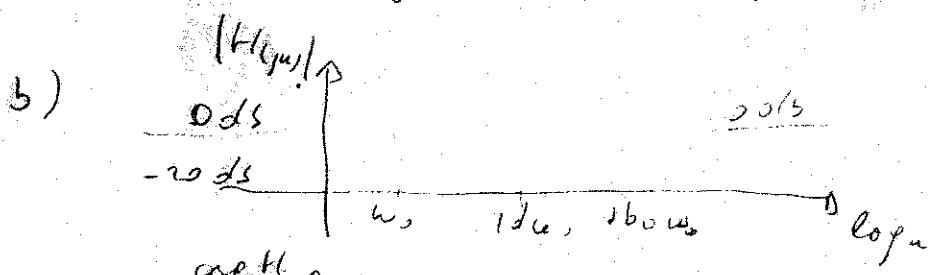


6/6/1

a)  $H(j\omega) = \frac{100\omega^2 - (j\omega)^2}{(j\omega + 10)(j\omega + 20)}$



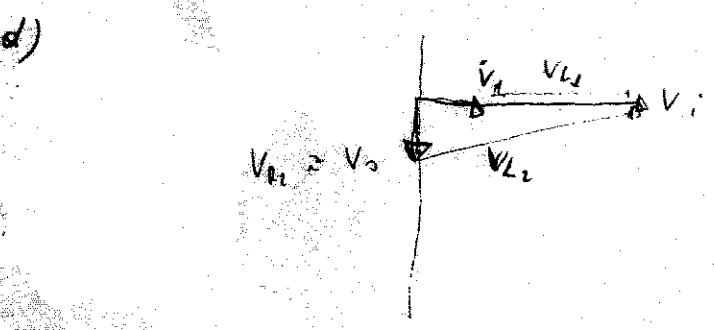
$V_0 = V_A - V_L$   
 $V_A = V_i \frac{R_1}{R_1 + Lj\omega}$   
 $V_B = \frac{R_2}{R_1 + Lj\omega} V_i$



Máxima atenuación:  $-20 \text{ dB}$  (del diagrama asintótico)  
 $\approx 10 \omega_0, -18 \text{ dB}$  (cálculo analítico)

Obs: Las singularidades están separadas al menos 1 década, por lo que la aproximación asintótica es un valor razonable para la frecuencia de máxima atenuación.

c)  $\omega^* / H(j\omega^*) = j\alpha$  ( $\alpha$  real)  $\Rightarrow V_0$  y  $V_i$  en cuadratura  
 Solución:  $\omega^* = 10\omega_0, \alpha = \frac{1}{10} \Rightarrow V_0 = \frac{V_i}{j10} = -j \frac{V_i}{10}$



$V_{R1} = V_B = \frac{V_i R}{R + Lj\omega} = V_0 \frac{R}{R + Lj10\omega_0}$   
 $V_{R2} = \frac{V_i}{1 + j10} \approx \frac{V_i}{10j} \approx V_0$   
 $V_A \approx \frac{jV_i}{j10} \approx \frac{V_i}{10}$

e) Rango aproximado  $\left[ \frac{\omega_0}{2}, 200\omega_0 \right]$

en octavas: 8,6 octavas

1 octava antes de  $\omega_0$   
 1 octava después, pues allí el asintótico dista del real casi 1 dB

$v_{01} = 0,89 V \cos\left(\frac{\omega_0}{2} t - 27^\circ\right)$   
 $v_{02} = 0,89 V \cos(200\omega_0 t - 153^\circ)$