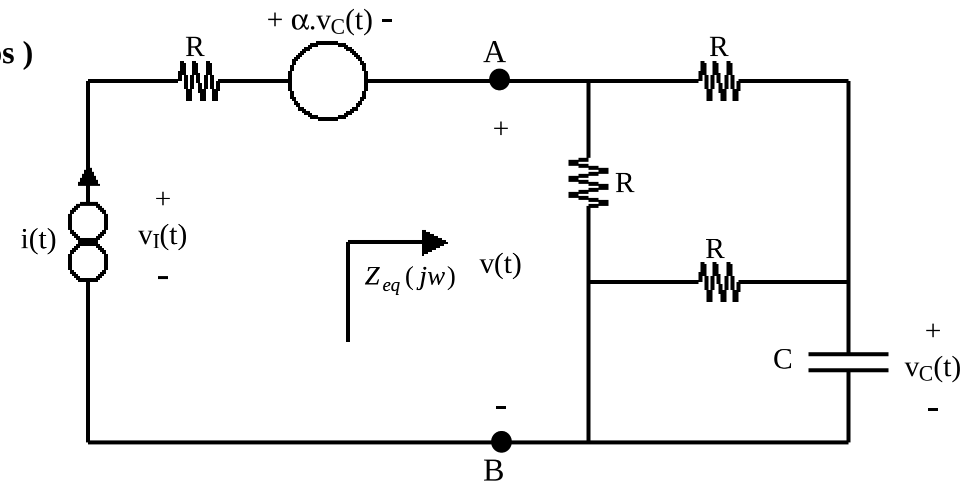
Sistemas Lineales 1

Primer parcial, 19 de mayo 2006

Recomendaciones generales:

- **Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.**
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.**
- **Justificar claramente los pasos realizados para resolver los problemas.**
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- **Se recuerda que la prueba es individual.**
- **Al finalizar, colocar las hojas dentro del sobre amarillo y entregarlo al docente del salón.**

Problema 1 **(11 puntos)**



El circuito lineal de la figura está excitado por una fuente de corriente sinusoidal de valor i(t) y contiene también una fuente de tensión dependiente que entrega una tensión proporcional a la tensión en bornes del condensador ($a \in \Re$). Se pide:

a) Hallar la impedancia equivalente $Z_{eq}(jw)$ entre los puntos **A** y **B**.

b) Hallar la relación en régimen entre las tensiones $V_C(jw)$ y $V(jw)$.

c) Hallar la transferencia en régimen $G(jw) = \dfrac{V_C(jw)}{I(jw)}$.

d) **i)** Hallar la transferencia en régimen $H(jw) = \dfrac{V_I(jw)}{I(jw)}$. **La salida del sistema será la tensión en bornes de la fuente**.

ii) Mostrar que puede escribirse de la forma $H(jw) = K.R.\dfrac{(jw + a_1)}{(jw + a_2)}$, hallando las constantes K, a_1 y a_2.

iii) Hallar el valor de α tal que $a_1 = 10.a_2$ **(de ahora en más se trabajará con dicho valor de** a**)**.

e) **i)** Hallar las respuestas en régimen del sistema para $i_1(t) = A.\cos(a_2\, t)$ y $i_2(t) = A.\cos(\sqrt{10}.\, a_2\, t + \frac{p}{4})$.

ii) Deducir que existe al menos una frecuencia de excitación a la cual el sistema introduce a la salida un retraso de 50º.

Problema 2 **(6 puntos)**

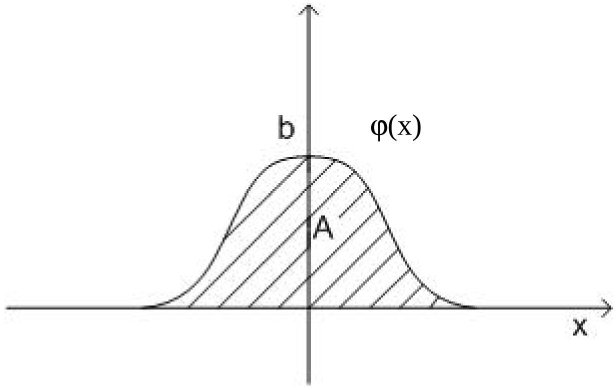
Sea φ(x) una función par del espacio D, de área A, con φ(0) = b, como se indica en la Figura.

Sea Φ(x,y,z) = φ(x). φ(y). φ(z).

a) **Indicar y justificar** si las distribuciones siguientes están bien definidas:

i) $T(x,y,z) = 1_x \otimes d_y \otimes Y(z)$

ii) $S(x) = 1_x * d_x * Y(x)$



b) En los casos posibles, calcular:

i) $< T(x,y,z), \Phi(x,y,z) >$

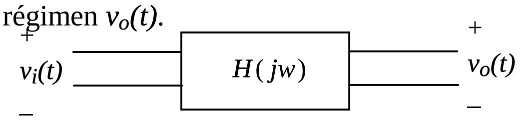
ii) $< \dfrac{\partial T}{\partial x}, \Phi(x,y,z) >$

iii) $< \dfrac{\partial T}{\partial z}, \Phi(x,y,z) >$

iv) $< S'(x), j(x) >$

Problema 3 **(8 puntos)**

a) Se considera un circuito eléctrico lineal invariante en el tiempo, con entrada $v_i(t)$ y salida $v_o(t)$. En régimen sinusoidal, dicho sistema puede describirse por su función de transferencia $H(jw) = \dfrac{V_o(jw)}{V_i(jw)}$, con $V_o(jw)$ y $V_i(jw)$ fasores asociados a la salida y a la entrada respectivamente. Para el caso de $v_i(t)$ periódica, de pulsación $w_o = \dfrac{2p}{T}$, dada por su serie de Fourier $v_i(t) = \sum_{n \in Z} c_n e^{jnw_o t}$, hallar **justificando detalladamente** la serie de Fourier de la salida en régimen $v_o(t)$.

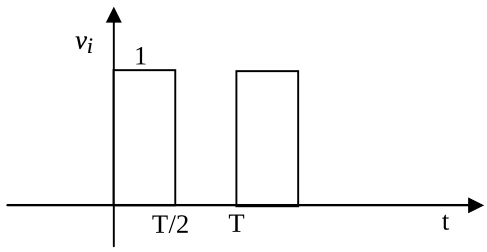


b) Sean dos circuitos con funciones de transferencia respectivas $H_1(jw)$ y $H_2(jw)$ que verifican:

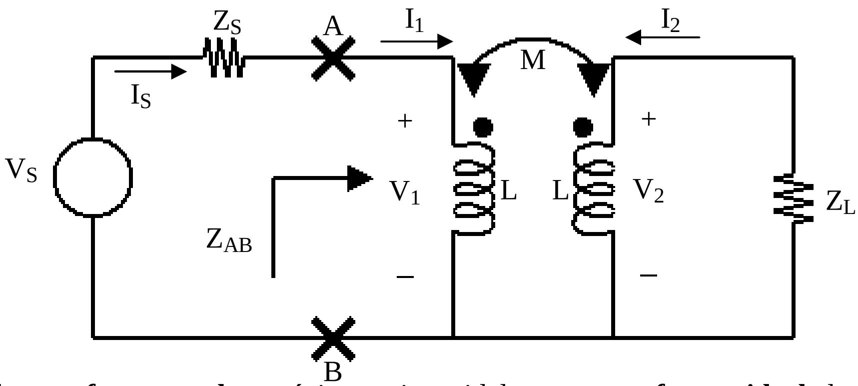
$$|H_1(jw)| = \begin{cases} 1 & |w| \le \frac{3}{2} w_o \\ 0 & |w| > \frac{3}{2} w_o \end{cases} \qquad |H_2(jw)| = \begin{cases} 1 & |w| \le \frac{7}{2} w_o \\ 0 & |w| > \frac{7}{2} w_o \end{cases}$$

Si a ambos circuitos se aplica a la entrada la misma señal periódica $v_i(t)$, ¿en cuál esperaría tener una señal de salida con mayor potencia media? **Justificar.**

c) Si la $v_i(t)$ de la figura se aplica a la entrada de ambos circuitos, calcular las potencias medias de las respectivas salidas.



Problema 4 **(9 puntos)**

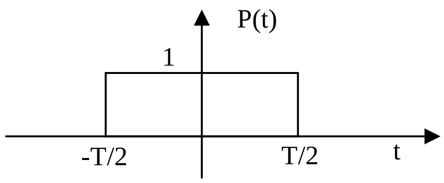


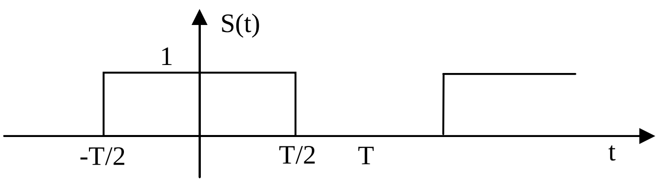
Se modela una **fuente real** en régimen sinusoidal como una **fuente ideal** de tensión V_S en serie con una **impedancia** $Z_S=R_S+jX_S$. Dicha fuente alimenta una **carga** Z_L a través de un **transformador simple**, tal como se muestra en la figura.

- **a)** Hallar la impedancia vista por la fuente real, es decir, la impedancia Z_{AB} señalada en la figura.
- **b)** Simplificar la expresión anterior para el caso de un transformador perfecto (**esta hipótesis se mantendrá para el resto del ejercicio**). Escribir Z_{AB} como el paralelo de dos impedancias.
- **c)** Para una carga resistiva $Z_L=R$ y se asume que $Xs<0$, hallar los valores de R y L que maximizan la potencia activa entregada por la **fuente real**.
- **d)** Considerando nuevamente una carga $Z_L=R$, compensar la potencia reactiva consumida a la **fuente real**. Indicando claramente qué elemento colocaría, dónde lo haría y qué valor tendría.

Problema 5 **(6 puntos)**

- **a)** Probar que la convolución entre una distribución periódica y una distribución de soporte acotado está bien definida.
- **b)** Probar que la convolución entre una distribución periódica y una distribución de soporte acotado es periódica.
- **c)** Sea P el pulso de ancho T y sea S el tren de pulsos de ancho T y periodo 2T (ver figura). Hallar la serie de Fourier de P*S (**sugerencia**: usar que toda distribución periódica se puede ver como la convolución entre una de soporte acotado y un tren de impulsos).

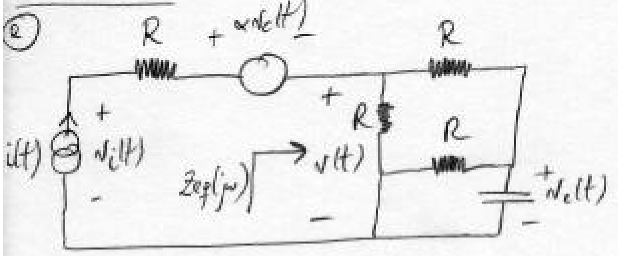




SISTEMAS LINEALES 1: PRIMER PARCIAL 2006 (1)

Problema 1:

a)



$$Z_{eq}(j\omega) = R // (R + R // 1/Cj\omega)$$

$$R // \frac{1}{Cj\omega} = \frac{R}{RCj\omega+1}, \quad R + \frac{R}{RCj\omega+1} = \frac{R[RCj\omega+2]}{RCj\omega+1}$$

Finalmente: $\boxed{Z_{eq}(j\omega) = \frac{R[RCj\omega+2]}{2RCj\omega+3}}$

b) Planteando el divisor de tensiones $V_c(j\omega) = \frac{R//1/Cj\omega}{R + R//1/Cj\omega} V(j\omega)$

$$\Rightarrow \boxed{V_c(j\omega) = \frac{V(j\omega)}{RCj\omega+2}}$$

c) De la definición de impedancia equivalente $Z_{eq} = \frac{V}{I}$. Eliminando $V(j\omega)$ en función de $V_c(j\omega)$ resulta: $Z_{eq} I = V_c [RCj\omega+2] \Rightarrow \frac{V_c}{I} = \frac{Z_{eq}}{RCj\omega+2}$

$$\Rightarrow \boxed{G(j\omega) = \frac{R}{2RCj\omega+3}}$$

d) (i) Planteando la ley de mallas de Kirchoff se tiene:

$V_i = [R + Z_{eq}] I + \alpha V_c = [R + Z_{eq} + \alpha G] I \Rightarrow H(j\omega) = R + Z_{eq} + \alpha G$

Desarrollando los términos se obtiene $\boxed{H(j\omega) = R\frac{[3RCj\omega + 5+\alpha]}{2RCj\omega+3}}$

(ii) Reescribiendo, $H(j\omega) = \frac{3}{2} R \left[\frac{j\omega + \frac{5+\alpha}{3RC}}{j\omega + \frac{3}{2RC}} \right]$ y se deduce que $\boxed{\begin{cases} K = \frac{3}{2} \\ a_1 = \frac{5+\alpha}{3RC} \\ a_2 = \frac{3}{2RC} \end{cases}}$

(iii) $a_1 = 10 a_2 \Rightarrow \frac{5+\alpha}{3RC} = \frac{15}{RC} \Rightarrow \boxed{\alpha = 40}$

e) (i) Si $i_1(t) = A\cos(a_2 t) \Rightarrow v_1(t) = A|H(ja_2)|\cos(a_2 t + \arg(H(ja_1)))$

$$H(ja_1) = \frac{3}{2} R \frac{(ja_2 + 10a_2)}{(ja_2 + a_2)} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{101}{2}} \cdot R \angle -39{,}3^\circ$$

$$\Rightarrow \boxed{v_1(t) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{101}{2}} AR \cos(a_2 t - 39{,}3^\circ)}$$

De manera análoga: $v_2(t) = A\,|H(j\sqrt{10}a_2)|\cos\left(a_2 t + \frac{\pi}{4} - \arg(H(j\sqrt{10}a_2))\right)$ ②

$$H(j\sqrt{10}a_2) = \frac{3}{2} R \frac{(j\sqrt{10}a_2 + 10a_2)}{(j\sqrt{10}a_2 + a_2)} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{110}{11}}\, R \angle -55^\circ$$

$$\Rightarrow \boxed{v_2(t) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{110}{11}}\, AR \cos(\sqrt{10}a_2 t - 10^\circ)}$$

(ii) El retardo introducido por el sistema a cierta frecuencia w es igual a

$$-\arg(H(jw)) = -\arctan\left(\frac{w}{10a_2}\right) + \arctan\left(\frac{w}{a_2}\right) = R(w)$$

Dicha función es continua en w y de la parte anterior se obtuvo que:

$$\begin{cases} R(a_2) = 39{,}3^\circ \\ R(\sqrt{10}a_2) = 55^\circ \end{cases} \Rightarrow \exists\, w^* \text{ tal que } R(w^*) = 50^\circ \text{ y } w^* \in (a_2, \sqrt{10}a_2)$$

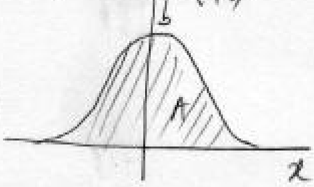
Problema 2:

3

ⓐ (i) $T(x,y,z) = 1_x \otimes \delta_y \otimes Y(z)$ está bien definido ya que el producto tensorial de distribuciones existe siempre. Para un número finito de distribuciones se calcula valiendo la propiedad asociativa.

(ii) $S(x) = 1_x * \delta_x * Y(x)$ no está bien definido ya que no existe el producto convolución entre 1_x y $Y(x)$: $1_x * Y(x) = \int_{-\infty}^{t} dt \to \infty$

Además observar que $sop\{1_x\} = \mathbb{R}$ y $sop\{Y(x)\} = [0, +\infty)$. Por lo tanto para $x_1 \in sop\{1_x\}$, $x_2 \in sop\{Y(x)\}$ la acotación de $x_1 + x_2$ no implica x_1 acotado y x_2 acotado



ⓑ (i) $\langle T(x,y,z), \Phi(x,y,z) \rangle = \langle 1_x \otimes \delta_y \otimes Y(z), \varphi(x) \cdot \varphi(y) \varphi(z) \rangle$

$= \langle 1_x, \varphi(x) \rangle . \langle \delta_y, \varphi(y) \rangle . \langle Y(z), \varphi(z) \rangle$.

↑
propiedad producto tensorial

$\langle 1_x, \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = A \leftarrow$ Área de $\varphi(x)$

$\langle \delta_y, \varphi(y) \rangle = \varphi(0) = b$

$\langle Y(z), \varphi(z) \rangle = \int_0^{\infty} \varphi(z)\, dz = \frac{A}{2} \leftarrow \varphi(z)$ función par

$$\Rightarrow \boxed{\langle T(x,y,z), \Phi(x,y,z) \rangle = \frac{A^2 b}{2}}$$

(ii) $\langle \frac{d T(x,y,z)}{dx}, \Phi(x,y,z) \rangle = -\langle 1_x \otimes \delta_y \otimes Y(z), \varphi'(x) \varphi(y) \varphi(z) \rangle =$ $\varphi \in D$

$= \langle 1_x, \varphi'(x) \rangle \langle \delta_y, \varphi(y) \rangle \langle Y(z), \varphi(z) \rangle$. Pero $\langle 1_x, \varphi'(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \frac{d T(x,y,z)}{dx}, \Phi(x,y,z) \rangle = 0}$$

(iii) $\langle \frac{\partial T(x,y,z)}{dz}, \Phi(x,y,z) \rangle = -\langle 1_x \otimes \delta_y \otimes Y(z), \varphi(x) \varphi(y) \varphi'(z) \rangle$

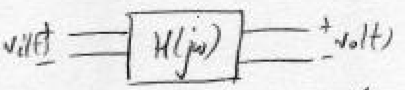
$= -\langle 1_x, \varphi(x) \rangle \langle \delta_y, \varphi(y) \rangle \langle Y(z), \varphi'(z) \rangle$ $\quad \langle Y(z), \varphi'(z) \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi'(z) dz = \varphi(z) \Big|_0^{+\infty} = -b$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \frac{d T(x,y,z)}{dz}, \Phi(x,y,z) \rangle = A b^2}$$

(iv) S' no está definida pues S no lo está.

Problema 3: (4)

ⓐ Sistema lineal e invariante en el tiempo



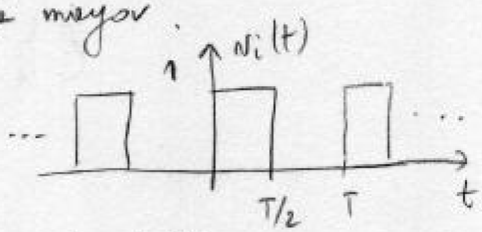
Por el principio de superposición, la respuesta a la entrada periódica $v_i(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega_0 t}$ es igual a la suma de las respuestas correspondientes a las entradas $c_n e^{jn\omega_0 t}$, $n \in \mathbb{Z}$. A estos términos sinusoidales de frecuencia $n\omega_0$ se les puede asociar el fasor c_n, por lo cual el fasor asociado a cada salida será $H(jn\omega_0).c_n$. Superponiendo, la salida en régimen resulta

$$\boxed{v_o(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} H(jn\omega_0) c_n e^{jn\omega_0 t}}$$

ⓑ Para el sistema $H_1(j\omega)$, se cumple que el producto $H_1(jn\omega_0)c_n = 0$ para frecuencias mayores a $\frac{3}{2}\omega_0$. Por el resultado de la parte anterior, el sistema solo dejará pasar la componente de continua y el primer armónico de la entrada. Mediante un razonamiento análogo, el sistema $H_2(j\omega)$ dejará pasar hasta el tercer armónico inclusive.

Por el teorema de Parseval, la potencia media de la señal de salida puede calcularse como: $P_m = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |H(jn\omega_0).c_n|^2$. El segundo filtro deja pasar mayor cantidad de armónicos $\Rightarrow$ la suma anterior tendrá más términos $\Rightarrow$ la potencia media será mayor.

ⓒ Sea $v_i(t)$ como en la figura



$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Calculamos sus coeficientes de Fourier

$$c_0 = \frac{1}{2} \quad , \quad c_n = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} e^{-jn\frac{2\pi}{T}t}\,dt = \left.\frac{-e^{-jn\frac{2\pi}{T}t}}{jn2\pi}\right|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{j2n\pi}(1-(-1)^n)$$

$$\Rightarrow c_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & n=0 \\ 0 & n \text{ par} \neq 0 \\ \frac{1}{jn\pi} & n \text{ impar} \end{cases}$$

Calculo la potencia media a la salida para cada uno de los sistemas.: (5)

Para el sistema $H_1(j\omega)$, $P_{m_1} = |H(j0)|^2 |c_0|^2 + \underset{\uparrow}{2} |H(j\omega_0)|^2 |c_1|^2$

$$\begin{cases} |H(j\omega_0)| = |H(-j\omega_0)| \\ |c_1| = |c_{-1}| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{m_1} = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2}}$$

Análogamente, para el sistema $H_2(j\omega)$,

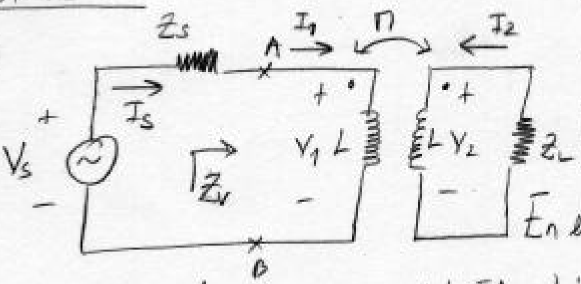
$$P_{m2} = |H(j0)|^2 |c_0|^2 + 2\left[|H(j\omega_0)|^2 |c_1|^2 + |H(j3\omega_0)|^2 |c_3|^2 \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{m2} = \frac{1}{4} + 2\left[\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2}\right]}$$

$P_{m2} > P_{m1}$ como era de esperar.

Problema 4: ⑥

a)



Para el transformador simple, se tiene que:

$$\begin{cases} V_1 = Lj\omega I_1 + Mj\omega I_2 \\ V_2 = Lj\omega I_2 + Mj\omega I_1 \end{cases}$$

En el secundario $V_2 = -Z_L I_2 \Rightarrow I_2 = -\frac{V_2}{Z_L}$

$V_1 = Lj\omega I_1 - \frac{Mj\omega}{Z_L} V_2$ y $V_2\left[1 + \frac{Lj\omega}{Z_L}\right] = Mj\omega I_1 \Rightarrow V_2 = \frac{Z_L Mj\omega}{Z_L + Mj\omega} I_1$

Eliminando V_2: $V_1 = \left[Lj\omega - \frac{(Mj\omega)^2}{Z_L + Lj\omega}\right] I_1 \Rightarrow \boxed{Z_V = \frac{Z_L Lj\omega + (Lj\omega)^2 - (Mj\omega)^2}{Z_L + Lj\omega}}$

b) Si el transformador es perfecto $\Rightarrow L = M$ y $\boxed{Z_V = \frac{Z_L Lj\omega}{Z_L + Lj\omega} = Z_L // Lj\omega}$

c) La potencia activa entregada por la fuente real, debe ser igual a la consumida por $Z_{AB} = \frac{RLj\omega}{R + Lj\omega} = \frac{R(L\omega)^2 + jR^2(L\omega)}{R^2 + (L\omega)^2}$

Sabemos dicha potencia es maxima para $Z_{AB} = \overline{Z_s} = R_s - jX_s$

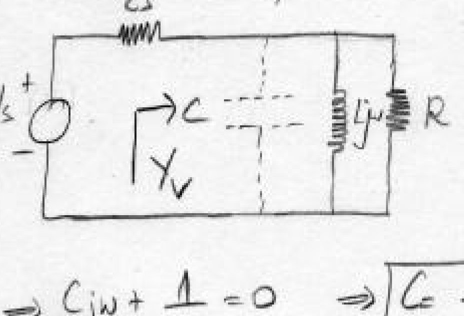
Si $Z_{AB} = \overline{Z_s}$ se cumple que $\frac{L\omega}{R} = -\frac{R_s}{X_s} \Rightarrow L\omega = -\frac{R_s R}{X_s}$

Igualando partes reales tenemos que $R(L\omega)^2 = R_s(R^2 + (L\omega)^2)$

$\Rightarrow R^{\cancel{3}}\frac{R_s^2}{X_s^2} = R_s\left(\cancel{R^2} + \cancel{R^2}\frac{R_s^2}{X_s^2}\right) \Rightarrow \boxed{R = R_s\left[\frac{X_s^2}{R_s^2} + 1\right]}$

$\boxed{L = -\frac{R_s}{\omega}\left[\frac{X_s}{R_s} + \frac{R_s}{X_s}\right]}$ Notar que $L > 0$ pues $X_s < 0$

d) El circuito es equivalente a:



Compenso con un condensador en paralelo, de manera tal que la admitancia vista por la fuente real sea puramente resistiva

$\Rightarrow Y_V = Cj\omega + \frac{1}{Lj\omega} + \frac{1}{R}$

$\Rightarrow Cj\omega + \frac{1}{Lj\omega} = 0 \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{L\omega^2}}$

Problema 5: 7

(a) Sea T distribución periódica y S distribución de soporte acotado.

$\Rightarrow \langle T(t) * S(t), \varphi(t)\rangle = \langle T_x \otimes S_y, \varphi(x+y)\rangle = \langle T_x, \langle S_y, \varphi(x+y)\rangle\rangle$

Pero $\theta(x) = \langle S_y, \varphi(x+y)\rangle$ es de soporte acotado pues si $sop\{S\} \subseteq [a,b]$ y $sop\ \varphi \subseteq [c,d] \Rightarrow \theta(x) = 0$ si $x \in [c-a, d-b]^c$

$\Rightarrow \langle T_x, \theta(x)\rangle$ está bien definido y consecuentemente $T(t) * S(t)$

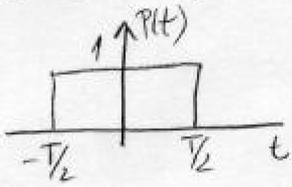
(b) $\langle T(t) * S(t), \varphi(t)\rangle = \langle T_x \otimes S_y, \varphi(x+y)\rangle = \langle S_y \otimes T_x, \varphi(x+y)\rangle =$

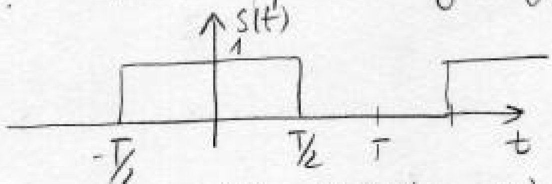
$= \langle S_y, \langle T_x, \varphi(x+y)\rangle\rangle \underset{\uparrow}{=} \langle S_y, \langle T_x, \varphi(x+y+n\Upsilon)\rangle\rangle = \langle T_x \otimes S_y, \varphi(x+y+nT)\rangle$

T periódica de período Υ.

$= \langle T(t) * S(t), \varphi(t+n\Upsilon)\rangle \Rightarrow T * S$ es periódica y de igual período que T

(c)



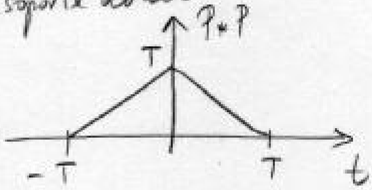


Notar que S(t) puede escribirse como $S(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} P(t-n2T) = P(t) * \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t-n2T)$

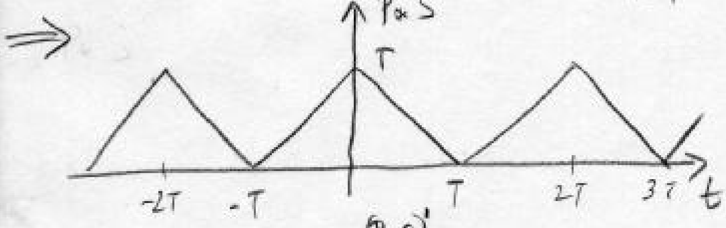
$\Rightarrow P * S = P * \left(P * \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t-n2T)\right) \underset{\uparrow}{=} (P * P) * \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t-n2T)$

P(t) de soporte acotado

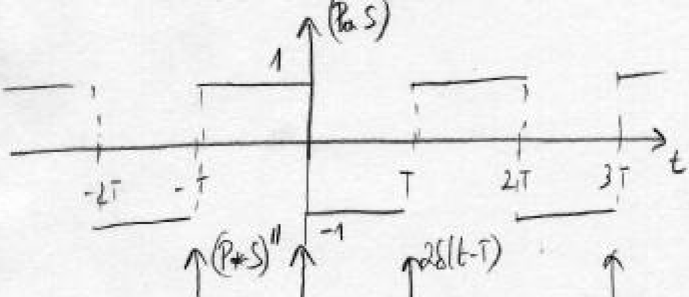
P*P tiene un gráfico de la forma

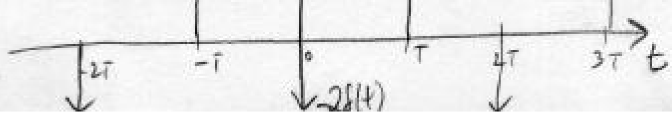


$\Rightarrow$



Para el cálculo de su desarrollo de Fourier, derivo dos veces como distribución.





$(P*S)'' = 2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^{n+1} \delta(t-nT)$

8

Los coeficientes de Fourier de $(P*S)''$ resultan:

$$c_n(P*S)'' = \frac{1}{2T} \langle -2\delta(\tau) + 2\delta(\tau - T), e^{-j\frac{2\pi}{2T}n\tau} \rangle = \frac{1}{T}\left((-1)^n - 1\right)$$

Por otro lado recordando la propiedad $c_n(P*S)'' = \left(j n \frac{2\pi}{2T}\right)^2 c_n(P*S)$

$$\Rightarrow c_n(P*S) = \frac{T}{n^2\pi^2}\left(1 - (-1)^n\right) \quad n \neq 0, \quad c_0 = \frac{T}{2} \text{ (Valor medio)}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_n(P*S) = \begin{cases} T/2 & n = 0 \\ 0 & n \text{ par} \neq 0 \\ \frac{2T}{n^2\pi^2} & n \text{ impar} \end{cases}} , \quad \boxed{P*S = \frac{1}{2T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(P*S)\, e^{j n\frac{2\pi}{2T}t}}$$