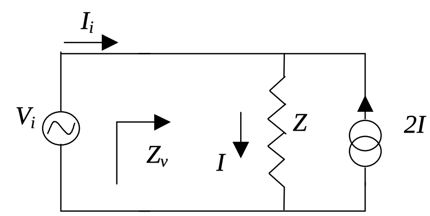
Examen de Sistemas Lineales 1
5 de marzo del 2003

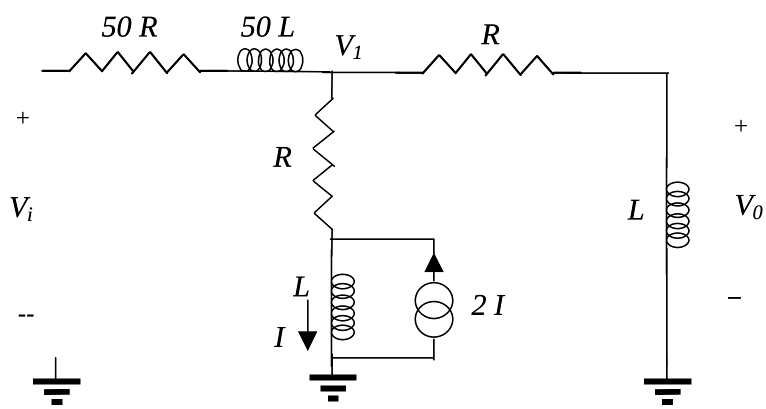
Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo y al menos dos preguntas completas. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. En las preguntas teóricas, se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Ejercicio 1

a) Calcular la impedancia vista por la fuente de tensión en el circuito de la figura



b) Hallar la transferencia $H(jw) = \dfrac{V_0(jw)}{V_i(jw)}$ del siguiente circuito:



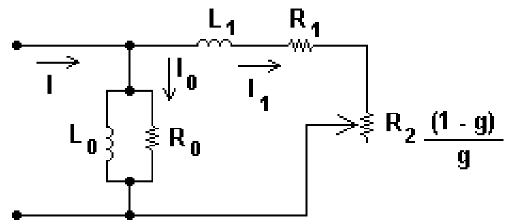
c) Realizar los Diagramas de Bode asintóticos de $H(jw)$, sabiendo que $\dfrac{L}{R} = t$.

d) i) Según los Diagramas asintóticos, hallar aproximadamente la frecuencia a la cual H es real y determinar su módulo.

ii) ¿Es de esperar que la frecuencia real a la que esto ocurre es similar a la hallada en la parte i)? Justificar.

Ejercicio 2

El siguiente es un modelo simplificado de un motor de inducción, el valor de g depende de la velocidad de giro del mismo y determina el punto de funcionamiento.



$R_2 = 3\Omega$

$V_{in} = 220\sqrt{2}\cos(100p\,t)$

$S = V\,\overline{I}$ *definición de potencia aparente*

Para determinar los valores de los parámetros de realizaron dos ensayos:

- Ensayo de vacío:
  $g \cong 0$
  $P = 1250W$
  $Q = 1600Var$
- Ensayo de rotor bloqueado:
  $g = 1$
  $P = 2500W$
  $|I| = 50A$

a) Hallar los parámetros del modelo, verificar que los valores (en forma aproximada) son los siguientes:

$R_0 = 38{,}72\Omega$ $\quad R_1 = 715{,}4m\Omega$

$L_0 = 96{,}3mHy$ $\quad L_1 = 16{,}6mHy$

b) Siendo $g = 0{,}02$ (esto define el punto de funcionamiento):

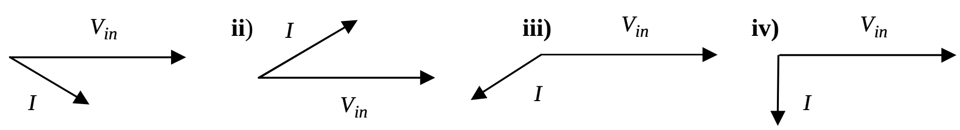
i) Hallar los fasores de correinte I_0, I_1 e I .

ii) Realizar un diagrama fasorial que vincule los fasores I_0, I_1, I y V_{in} (fasor de tensión de entrada).

iii) Calcular la potencia activa y reactiva que consume el motor.

iv) Calcular el factor de potencia del motor en este punto y compensar la potencia reactiva.

c) Dado los siguientes diagramas fasoriales entre V_{in} (fasor de tensión de entrada) e I (fasor de corriente de entrada al motor), indicar cuales podrian y cuales no podrian corresponder a un punto de funcionamiento ($0 \le g \le 1$) del motor. Justificar en cada caso.

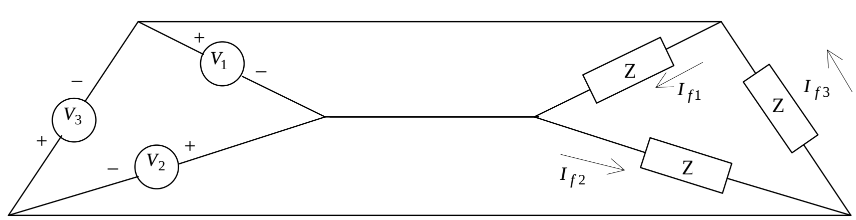


d) Se tiene el siguiente sistema trifásico en donde la cargas Z son motores iguales al visto anteriormente (mismos parámetros) y el punto de funcionamiento de cada motor es el mismo $g = 0{,}02$:

$V_1 = 220\sqrt{2}\cos(100p\,t + 10^o)$

$V_2 = 220\sqrt{2}\cos(100p\,t + 130^o)$

$V_3 = 220\sqrt{2}\cos(100p\,t + 250^o)$



i) Calcular la potencia activa y reactiva que consume el sistema.

ii) Hallar $i_{f1}(t)$, $i_{f2}(t)$ e $i_{f3}(t)$; expresiones temporales de los fasores de corriente de fase I_{f1} , I_{f2} e I_{f3} respectivamente.

Pregunta 1

Algunos autores definen la Transformada de Fourier para funciones como $G(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t).e^{jwt}dt$.

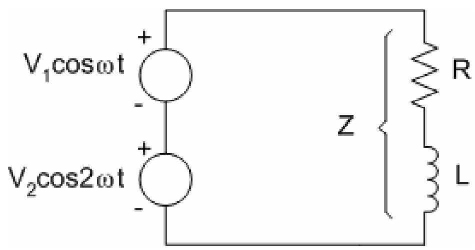
Con esta definición, las propiedades conocidas sufren algunas modificaciones. Suponiendo que se trabaja con funciones y que se cumplen las condiciones de valides de las propiedades empleadas:

a) Probar que con la definición anterior $g(t) = \frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{+\infty} G(w).e^{jwt}dw$.

b) Sean *U(w)* y *V(w)* las Transformadas de Fourier de *u(t)* y *v(t).* Calcular *y(t)*, la antitransformada de Fourier de *Y(w)=U(w)*V(w).*

c) Deducir como conclusión que la transformada del producto ordinario u(t).v(t) es $\frac{1}{2p}U(w)*V(w)$.

Pregunta 2



En el circuito de la figura, calcular:

a) la corriente *i(t)*;

b) la potencia instantánea en bornes de la carga *Z*;

c) la potencia media disipada en la carga *Z.*

d) Aplicación:

Si $\begin{cases} V_2 = \sqrt{3}.V_1 \\ Lw = \sqrt{2}.R \end{cases}$, calcular la relación entre las componentes de potencia media correspondientes a ambas fuentes.

(En b) y c) se sugiere usar la identidad $\cos(a).\cos(b) = \frac{1}{2}\cos(a-b) + \frac{1}{2}\cos(a+b)$ para obtener las expresiones finales).

Pregunta 3

a) Definir el producto convolución en distribuciones.

b) Demostrar al menos una propiedad.

c) Usando la definición probar que δ'*T=T', para toda distribución T.

d) Probar entonces (S*T)'=S'*T=S*T', siendo S y T tales que existe el producto convolución S*T.

Pregunta 4

a) Definir la Serie de Fourier de una distribución periódica

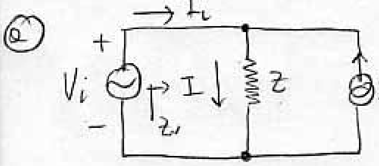
b) Mostrar que la salida en régimen de un sistema lineal de transferencia $H(jw)$ excitado por una señal periódica es también periódica, con la misma pulsación. Hallar la Serie de Fourier de la salida en función de la de la entrada ($H(-jw) = \overline{H(jw)}$).

c) Hallar la respuesta en régimen de un sistema de transferencia $H(jw) = \frac{1}{jw+1}$ para la entrada *A.sen(t)*, señalando relaciones de amplitud y fase entre la entrada y la salida.

SISTEMAS LINEALES 1: Marzo 2003 (1)

Ejercicio 1:

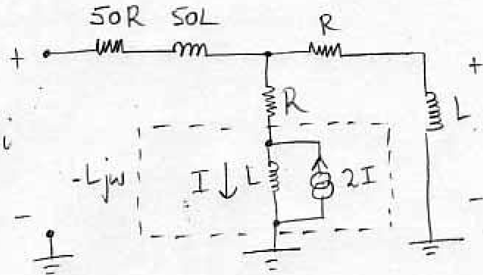
a)



La impedancia vista es $Z_v = \frac{V_i}{I_i}$. No anulo la fuente de corriente pues es dependiente.
Planteando la ecuación de nudos:

$$I_i = \frac{V_i}{Z} - 2I = \frac{V_i}{Z} - 2\frac{V_i}{Z} \Rightarrow I_i = -\frac{V_i}{Z} \Rightarrow \boxed{Z_v = -Z}$$

b)



Del divisor de tensiones: $V_o = V_1 \frac{Lj\omega}{R+Lj\omega}$

Planteando la ecuación de nudos:

$$\frac{V_i - V_1}{50(R+Lj\omega)} = \frac{V_1}{R-Lj\omega} + \frac{V_1 - V_o}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{V_i}{50(R+Lj\omega)} = V_o\left(\frac{1}{50Lj\omega} + \frac{R+Lj\omega}{Lj\omega(R-Lj\omega)} + \frac{R+Lj\omega}{RLj\omega} - \frac{1}{R}\right) \text{ y operando,}$$

$$\frac{V_i}{R+Lj\omega} = V_o\frac{(101R - Lj\omega)}{Lj\omega(R-Lj\omega)} \Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{j\omega\left(j\omega - \frac{R}{L}\right)}{\left(j\omega + \frac{R}{L}\right)\left(j\omega - 101\frac{R}{L}\right)}}$$

c) Para $\omega_o = \frac{1}{\tau} = \frac{R}{L} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{j\omega(j\omega - \omega_o)}{(j\omega+\omega_o)(j\omega - 101\omega_o)}$

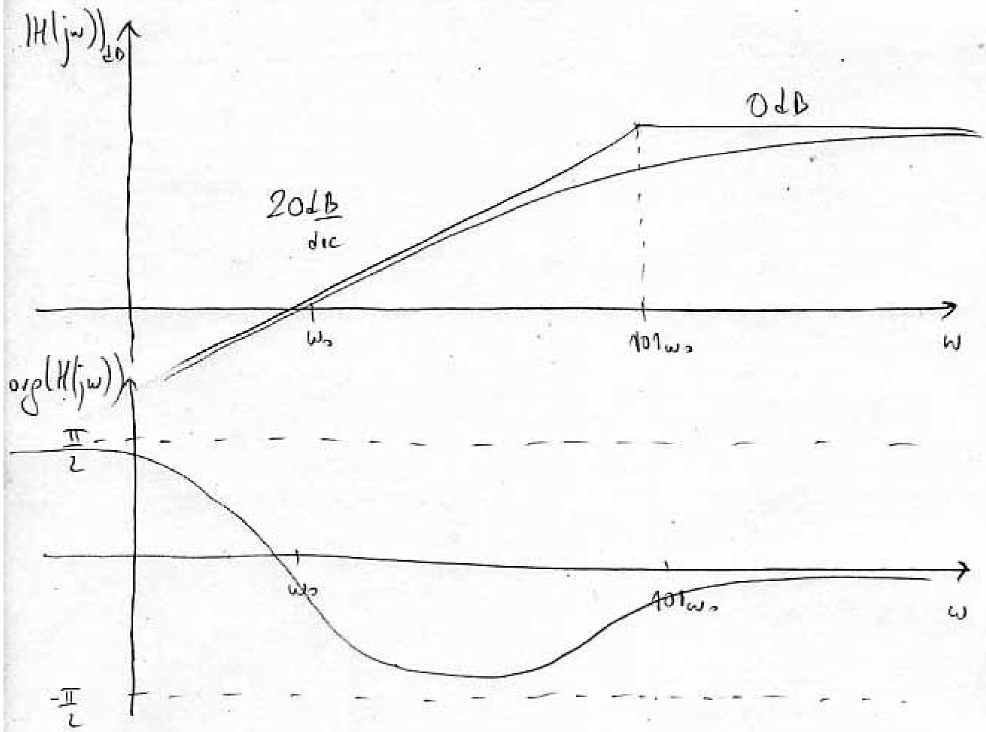
Para $\omega \ll \omega_o \Rightarrow H(j\omega) \simeq \frac{j\omega}{101\omega_o} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq -20\log(101\omega_o) + 20\log\omega \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) \simeq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Para $\omega_o \ll \omega \ll 101\omega_o \Rightarrow H(j\omega) \simeq \frac{-j\omega}{101\omega_o} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq -20\log(101\omega_o) + 20\log\omega \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) \simeq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Para $\omega \gg 101\omega_o \Rightarrow H(j\omega) \simeq 1 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq 0 \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) \simeq 0 \end{cases}$

El polo en $-\omega_o$ (parte real negativa) y el cero en ω_o (parte real positiva) implican un retardo de fase de π, con módulo constante en la transición.

2



d) (i) De los diagramas asintóticos, observamos que $H(j\omega)$ es real ($\arg(H(j\omega)) \approx 0$) a una frecuencia aproximada de ω_0.

Del Bode asintótico, el módulo en $\omega=\omega_0$ es $\boxed{H(j\omega_0) \simeq \frac{1}{101}}$

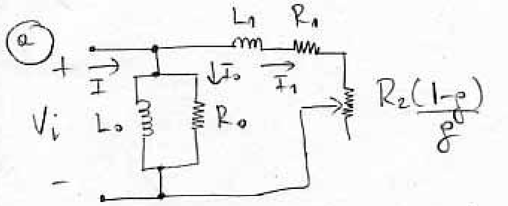
En el real el módulo es $H(j\omega_0) = \frac{\cancel{\omega_0}}{\cancel{\omega_0}\sqrt{1+101^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+101^2}} \simeq \frac{1}{101}$

(ii) Es de esperar que sí sea una buena aproximación ya que el otro polo se encuentra a dos décadas ($101\omega_0$) y su influencia sobre el comportamiento en torno a ω_0 debe ser despreciable.

Ejercicio 2:

3

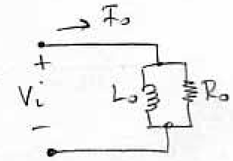
a)



$R_2 = 3\Omega$

$V_{in}(t) = 220\sqrt{2}\cos(100\pi t)$

En el ensayo de vacío ($g \approx 0$) el circuito equivalente es:

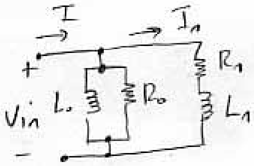


Se miden $P = 1250\,W$, $Q = 1600\,Var$

$\Rightarrow P = \dfrac{|V_{in}|^2}{R_0} \Rightarrow R_0 = \dfrac{|V_{in}|^2}{P} \Rightarrow \boxed{R_0 = 38{,}72\,\Omega}$

$Q = \dfrac{|V_{in}|^2}{L_0 w} \Rightarrow L_0 = \dfrac{|V_{in}|^2}{w Q} \Rightarrow \boxed{L_0 = 96{,}3\,mHy}$

A rotor bloqueado ($g = 1$) el circuito equivalente queda:



Se midieron $P = 2500W$, $|I| = 50A$

$P = |V_{in}||I|\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = 0{,}227$

$Q = |V_{in}||I|\sin\varphi \Rightarrow Q = 10{,}7\,KVar$

$I_1 = \dfrac{V_{in}}{R_1 + L_1 jw} \Rightarrow |I_1| = \dfrac{|V_{in}|}{\sqrt{R_1^2 + (L_1 w)^2}}$

$P = \dfrac{|V_{in}|^2}{R_0} + R_1 \dfrac{|V_{in}|^2}{R_1^2 + (L_1 w)^2}$

$Q = \dfrac{|V_{in}|^2}{L_0 w} + L_1 w \dfrac{|V_{in}|^2}{R_1^2 + (L_1 w)^2}$

Resolviendo el sistema de ecuaciones no lineales resultan los parámetros faltantes del modelo:

$\boxed{R_1 = 0{,}715\,\Omega}$, $\boxed{L_1 = 16{,}59\,mHy}$

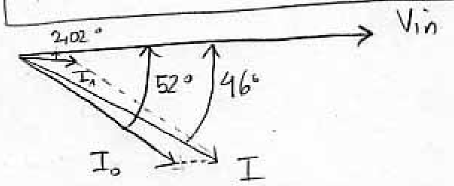
b) (i) $g = 0{,}02 \Rightarrow R_{2e} = 147\,\Omega$ y tomando $V_{in} = 220V\angle 0°$

$I_0 = \dfrac{V_{in}}{R_0 \| L_0 jw} \Rightarrow \boxed{I_0 = (5{,}68 - 7{,}27j)A = 9{,}2A\angle -52°}$

$I_1 = \dfrac{V_{in}}{R_1 + R_{2e} + L_1 jw} \Rightarrow \boxed{I_1 = (1{,}49 - j0{,}052)A = 1{,}49A\angle -2{,}02°}$

$I = I_0 + I_1 \Rightarrow \boxed{I = (7{,}17 - 7{,}32j)A = 10{,}24A\angle -46°}$

(ii)



4

(iii) $P = \mathrm{Re}[V\bar{I}] \Rightarrow \boxed{P = 1577W}$

$Q = \mathrm{Im}[V\bar{I}] \Rightarrow \boxed{Q = 1612 Var}$

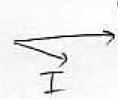
(iv) $\cos\varphi = \dfrac{P}{|V_{in}||I|} \Rightarrow \boxed{\cos\varphi = 0{,}699}$

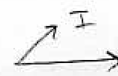
Conecto un condensador en paralelo con la fuente de tal forma que entregue la potencia reactiva consumida por el motor

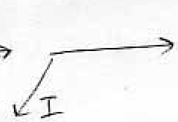
$Q_c + Q = 0 \Rightarrow -|V_{in}|^2 C\omega + Q = 0 \Rightarrow C = \dfrac{Q}{\omega|V_{in}|^2} \Rightarrow \boxed{C = 106\mu F}$

c) Para $\rho \in [0,1]$, la carga siempre será inductiva $\Rightarrow Z_v = R + jX$ con $R > 0$ y $X > 0$

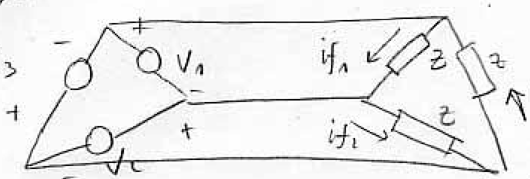
$V_{in} = Z_v I$

$\Rightarrow$  Puede corresponder a un punto de funcionamiento ya que para cargas inductivas, I atrasa a V_{in}

$\Rightarrow$  No puede ya que implica Z_v capacitiva

$\Rightarrow$  No puede ya que implica $R < 0$

$\Rightarrow$  No puede ya que implica $R = 0$.

d) 

$v_1(t) = 220\sqrt{2}\cos(100\pi t + 10^\circ)$

$v_2(t) = 220\sqrt{2}\cos(100\pi t + 10^\circ + 120^\circ)$

$v_3(t) = 220\sqrt{2}\cos(100\pi t + 10^\circ + 240^\circ)$

(i) Como tengo un esquema triángulo - triángulo cada fuente se aplica directamente a cada carga Z por lo que las corrientes de fase son iguales a las I ya calculadas en el caso monofásico (a menos de los desfasajes de 120°)

$P_{TRI} = 3P_{mono} \Rightarrow \boxed{P_{TRI} = 4{,}73 KW}$

$Q_{TRI} = 3Q_{mono} \Rightarrow \boxed{Q_{TRI} = 4{,}83 KVar}$

(ii)
$$\boxed{\begin{aligned} i_{f1}(t) &= \sqrt{2}\ 10{,}24A \cos(100\pi t + 10^\circ - 46^\circ) \\ i_{f2}(t) &= \sqrt{2}\ 10{,}24A \cos(100\pi t + 10^\circ + 120^\circ - 46^\circ) \\ i_{f3}(t) &= \sqrt{2}\ 10{,}24A \cos(100\pi t + 10^\circ + 240^\circ - 46^\circ) \end{aligned}}$$