Sistemas Lineales 1
Primer parcial, Mayo, 2000

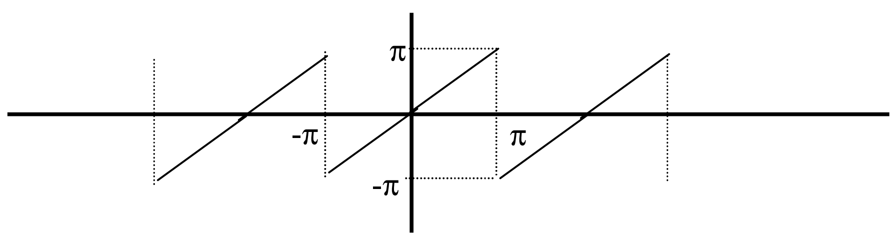
Problema 1 **(6 puntos)**

a) Calcular $\delta'(at)$ en función de $\delta'(t)$. **(2 puntos)**
Deducir si $\delta'(t)$ es par o impar.

b) Sea T una distribución que cumple $xT = x$. Hallar T sabiendo que aplicada a una $\varphi(x) \in D$ que en 0 vale 1 $[\varphi(0) = 1]$ y que encierra un área A sobre el eje x, da $\langle T,\varphi\rangle = 0$. **(4 puntos)**

Problema 2 **(8 puntos)**

Sea *f(t)* la función periódica que se muestra en la figura:



a) Hallar y graficar $T_f^{'}$ y $T_f^{''}$, las dos primeras derivadas de *f(t)* como distribución. **(2 puntos)**

b) Hallar $c_n\left(T_f^{''}\right)$ y probar que para todo *n* no nulo se cumple que **(3 puntos)**

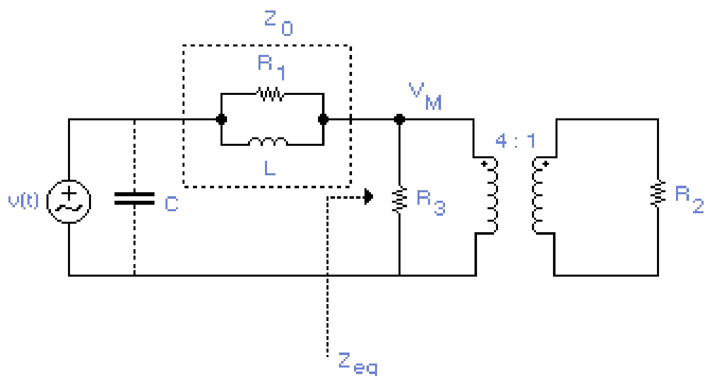
$$c_n(f) = j\,\frac{(-1)^n}{n}$$

c) Graficar el espectro de *f*. **(1 puntos)**

d) Calcular $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. **(2 puntos)**

Problema 3 **(11 puntos)**

Dado el circuito de la figura, en donde:



$L = 600\ mHy$
$R_1 = 326\,\Omega$
$R_2 = 16\,\Omega$
$R_1 = 454\,\Omega$
$v(t) = 311\cos(100p\ t)$

El condensador **sólo se considera** para la parte d)

a) Hallar Z_{eq}. **(2 puntos)**

b) Hallar los fasores I (fasor de corriente por la fuente), V_0 (caída en Z_0). Dibujar un diagrama fasorial con I , V (fasor de tensión de la fuente) y V_0. Identificar V_M (fasor de la caída de tensión en Zeq) en el diagrama fasorial. **(4 puntos)**

c) Calcular la Potencia activa y reactiva consumida a la fuente. **(3 puntos)**

d) Se desea compensar la potencia reactiva, para ello se coloca un condensador en paralelo con la fuente. Calcular el valor de dicho condensador para que el factor de potencia sea 1. **(2 puntos)**

Problema 4 **(7 puntos)**

Sea el operador diferencial lineal de segundo orden $D = \frac{\partial}{\partial x^2} - 1$.

a) i) Hallar una función *f* continua tal que *Df* = 0, *f* (0)=0, *f* '(0)=1.
ii) Verificar que *D*(Y*f*)=*d*.

(2 puntos)

Se considera ahora la siguiente ecuación en D'_+:

$$DX = B \quad , \quad X, B \in D'_+$$

b) Probar que $X = (Dd)^{-1} * B$. **(2 puntos)**

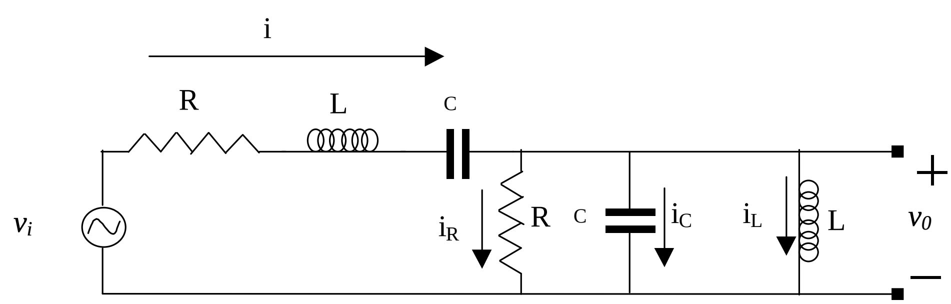
c) Probar que si $DA = d$, entonces $A = (Dd)^{-1}$. **(2 puntos)**

d) Hallar $X \in D'_+$ tal que $DX = d'$. **(1 punto)**

Sugerencia: $D(S * T) = (DS) * T = S * (DT)$.

Problema 5 **(7 puntos)**

Sea el circuito de la figura con $v_i(t) = V_i.\cos(wt)$. Además se cumple que $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$



a) Calcular el cociente de los fasores $\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$. **(3 puntos)**

b) Determinar el producto LC en función de ω, para que el circuito se comporte como un divisor resistivo a la frecuencia ω. **(2 puntos)**

c) Calcular los fasores V_o e I para $C = \frac{2\Omega^{-1}}{\omega}$ y $L = \frac{2\Omega}{\omega}$ y hallar la relación de módulo y fase entre $v_i(t)$=0.5 sen (ωt) y $v_o(t)$. **(2 puntos)**

SISTEMAS LINEALES 1: PRIMER PARCIAL 2000 (1)

Problema 1:

(a) Por la definición de cambio de variable, tenemos que:

$$\langle \delta'(at), |a|.\varphi(at)\rangle = \langle \delta'(x), \varphi(x)\rangle = -\varphi'(0)$$

Por otro lado tenemos que:

$$\langle \delta'(t), \varphi(at)\rangle = -\langle \delta(t), (\varphi(at))'\rangle = -a\,\varphi'(0)$$

Juntando ambos tenemos que:

$\langle |a|.\delta'(at), \varphi(at)\rangle = \frac{1}{a}\langle \delta'(t), \varphi(at)\rangle$ y siendo φ arbitraria, se tiene la igualdad

$\boxed{\delta'(at) = \frac{1}{a|a|}\delta'(t)}$, si $a=-1 \Rightarrow \delta'(-t) = -\delta'(t)$ por lo que $\delta'(t)$ es impar.

(b) Sea $T \in D' \ / \ xT = x$.
Además se sabe que $\langle T(x), \varphi(x)\rangle = 0$ con $\varphi(x) \in D \ / \ \varphi(0)=1$ y encierra un área A sobre el eje x.

De la igualdad de distribuciones $x = xT$, se cumple $\forall \varphi \in D$ que:

$\langle x - xT(x), \varphi(x)\rangle = 0 = \langle x(1-T), \varphi(x)\rangle$. Siendo x una función C^∞ con una única raíz en el origen y además dicha raíz es simple, sabemos que

$1 - T(x) = C\,\delta(x) \quad , \ C \in \mathbb{R}$

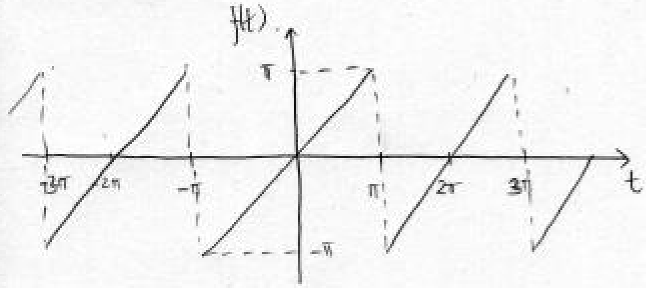
Por otro lado,

$$\langle T(x), \varphi(x)\rangle = 0 = \langle 1 - C\delta(x), \varphi(x)\rangle = \underbrace{\langle 1, \varphi(x)\rangle}_{A} - C\underbrace{\langle \delta(x), \varphi(x)\rangle}_{\varphi(0)=1} = A - C$$

$\Rightarrow A = C$ y por lo tanto $\boxed{T = 1 - A\delta}$

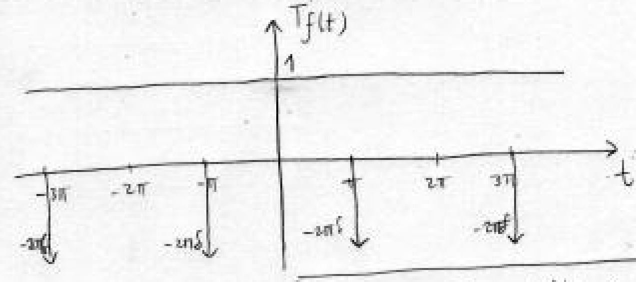
Problema 2:

(2)

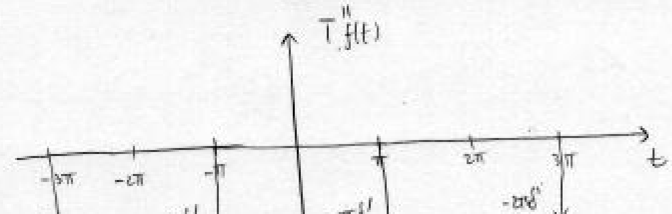


(a) Utilizando directamente el resultado de derivación para funciones seccionalmente continuas:

$$\boxed{T'_{f(t)} = 1 + \sum_{k\in \mathbb{Z}} -2\pi\,\delta(t-(2k+1)\pi)}$$



De manera análoga: $\boxed{T''_{f(t)} = \sum_{k\in \mathbb{Z}} -2\pi\,\delta'(t-(2k+1)\pi)}$

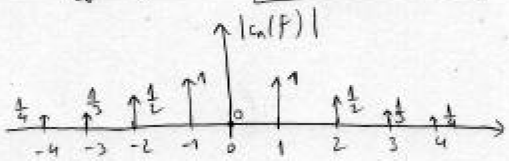


(b) Aplicando los resultados de Serie de Fourier para distribuciones periódicas: $(T=2\pi,\ \omega_0=1)$

$$c_n(T''f) = \frac{1}{T}\langle -2\pi\delta'(t-\pi),\ e^{-jn\omega_0 t}\rangle = -\frac{2\pi}{2\pi}\, jn\overset{1}{\omega_0}\, e^{-jn\pi} \Rightarrow \boxed{c_n(T''_f) = -jn(-1)^n}$$

$$c_n(f) = \frac{c_n(T''f)}{(jn\omega_0)^2} \Rightarrow \boxed{c_n(f) = \frac{j}{n}(-1)^n}$$

(c)

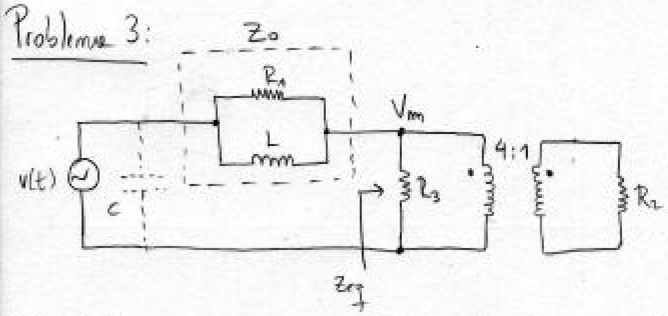


El módulo decae como $\frac{1}{n}$

(d) Por Parseval, $P_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \sum_{k\in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \underset{c_0=0}{=} 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

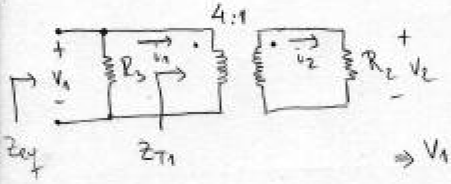
Problema 3: (3)



$L = 600$ mHy
$R_1 = 326\,\Omega$
$R_2 = 16\,\Omega$
$R_3 = 454\,\Omega$
$v(t) = \sqrt{2}\,220 \cos(2\pi 50 t)$ V

(a) Calculo Z_{eq} como $R_3 // Z_{T1}$ siendo Z_{T1} la impedancia vista en el lado del primario del transformador

$$Z_{T1} = \frac{V_1}{I_1}$$



De las ecuaciones del transformador ideal: $\frac{V_1}{V_2} = 4$, $\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow V_1 = 4V_2$ y $\frac{V_2}{I_2} = R_2 \Rightarrow V_1 = 4R_2 I_2 = 16 R_2 I_1$

$\Rightarrow Z_{T1} = 16 R_2$

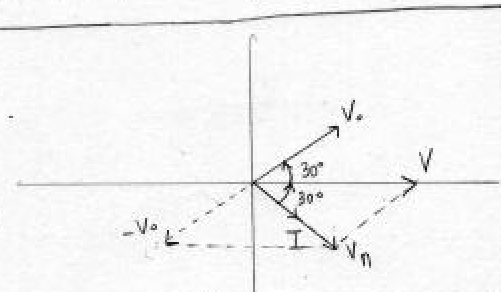
$$Z_{eq} = \frac{R_3 \cdot 16 R_2}{R_3 + 16 R_2} \Rightarrow \boxed{Z_{eq} = 164\,\Omega}$$

(b) Trabajando con valores eficaces, $V = 220\angle 0°$ V

$$Z_o = \frac{R_1 L j\omega}{R_1 + L j\omega} = (81{,}7 + 141{,}3j)\,\Omega = 163{,}2 \angle 60°$$

$$I = \frac{V}{Z_o + Z_{eq}} \Rightarrow \boxed{I = (0{,}673 - 0{,}388j)\text{A} = 0{,}77\angle -30°\text{A}}$$

$$V_o = Z_o I \Rightarrow \boxed{V_o = (109{,}8 + 63{,}5j)\text{ V} = 126{,}8\angle 30°\text{ V}}$$



Por la ley de mallas de Kirchoff: $V = V_o + V_n \Rightarrow V_n = V - V_o$. Lo puedo construir por la regla del paralelogramo, además se que deberá ser colineal con I, pues Z_{eq} es resistiva pura.

4

c) $P = Re[V.I^*] \Rightarrow \boxed{P = 148W}$

$Q = Im[V.I^*] \Rightarrow \boxed{Q = 85,3\ Var}$

d) Coloco un condensador en paralelo con la fuente, de manera de que aporte una reactiva igual a la consumida por la carga.

$\Rightarrow Q_c + Q = 0$

$-C\omega|V|^2 = -Q \Rightarrow C = \dfrac{Q}{\omega|V|^2} \Rightarrow \boxed{C = 5,6\ \mu F}$

5

Problema 4:

$D = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1$

ⓐ i) $Df = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$

$\Rightarrow f''(x) - f(x) = 0$

La ecuación característica es: $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

$f(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$ y $f(0) = 0 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = -C_2$

$f'(0) = 1 = C_1 - C_2 \Rightarrow 1 = 2C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = -\frac{1}{2}$

$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}\left[e^{x} - e^{-x}\right] = \sinh(x)}$

ii) $D(Y(x)f(x)) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(Y(x)f(x)) - Y(x)f(x)$

$\frac{\partial}{\partial x}(Y(x)f(x)) = \frac{1}{2}\left[e^{x} + e^{-x}\right]Y(x)$ $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(Y(x)f(x)) = \underbrace{\frac{1}{2}\left[e^{x} - e^{-x}\right]Y(x)}_{Y(x)f(x)} + \underset{\underset{1}{\parallel}}{c_0}\,\delta(x)$

$\Rightarrow D(Y(x)f(x)) = \cancel{Y(x)f(x)} + \delta(x) - \cancel{Y(x)f(x)}$

$\Rightarrow \boxed{D(Y(x)f(x)) = \delta(x)}$

ⓑ $DX = B$ y recordamos que $X = \delta * X$

$\Rightarrow D(\delta * X) = B \Rightarrow (D\delta) * X = B$ por lo que finalmente se tiene que

$\boxed{X = (D\delta)^{-1} * B}$ como se quería

ⓒ Siguiendo el razonamiento de la parte anterior, con $X = A$ y $B = \delta$ resulta

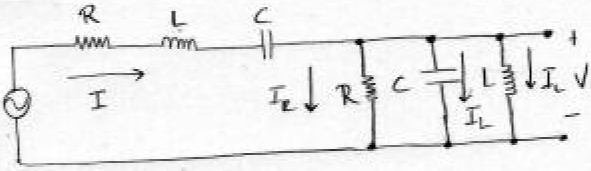
$A = (D\delta)^{-1} * \delta \Rightarrow \boxed{A = (D\delta)^{-1}}$

ⓓ Del resultado de la parte ⓑ tenemos que $X = (D\delta)^{-1} * \delta'$ que es lo mismo que derivar la distribución $A = (D\delta)^{-1}$.

Por otra parte, de ⓐ ii) sabemos que $A = T_{Yf}$

$\Rightarrow X = T'_{Y.f} \Rightarrow \boxed{X = \frac{1}{2}\left[e^{x} + e^{-x}\right]Y(x) = \cosh(x).Y(x)}$

Problema 5: (6)



$v_i(t) = V_i \cos(\omega t)$

$R = \sqrt{\frac{L}{C}}$

(a) Para el cálculo de $\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$ planteo el divisor de tensiones:

$$\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{R /\!/ \frac{1}{C\omega j} /\!/ Lj\omega}{R + Lj\omega + \frac{1}{C\omega j} + R /\!/ \frac{1}{C\omega j} /\!/ Lj\omega}$$

$$R /\!/ \frac{1}{C\omega j} /\!/ Lj\omega = \frac{R}{RC\omega j + 1} /\!/ Lj\omega = \frac{RLj\omega}{R + Lj\omega + RLC(j\omega)^2}$$

$$\boxed{\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{RLC(j\omega)^2}{(RCj\omega + LC(j\omega)^2 + 1)(R + Lj\omega + RLC(j\omega)^2) + RLC(j\omega)^2}}$$

(b) Para que se comporte como un divisor resistivo, basta que $R /\!/ \frac{1}{C\omega j} /\!/ Lj\omega \in \mathbb{R}$ y

$R + Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Impongo que $\frac{RLj\omega}{R + Lj\omega + RLC(j\omega)^2} = \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow RLj\omega = \alpha R(1 - LC\omega^2) + \alpha Lj\omega$

Impongo que la parte imaginaria se anule $\Rightarrow \boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$

Verifiquemos que $R + Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega}\Big|_{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \in \mathbb{R}$

Efectivamente tenemos $R + j\sqrt{\frac{L}{C}} - j\sqrt{\frac{L}{C}} = R$.

(c) $C = \frac{2\Omega^{-1}}{\omega}$, $L = \frac{2\Omega}{\omega} \Rightarrow \omega^2 = \frac{4}{LC}$, $R = \sqrt{\frac{L}{C}} = 1$

$$R + Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega} = \left(1 + 2j + \frac{1}{2j}\right)\Omega = \left(1 + \frac{3}{2}j\right)\Omega$$

$$R /\!/ Lj\omega /\!/ \frac{1}{Cj\omega} = \left(\frac{2j}{1 + 2j - 4}\right)\Omega = \left(\frac{2j}{-3 + 2j}\right)\Omega = \frac{1}{(1 + \frac{3}{2}j)}\Omega$$

7

$$\frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{1}{\left(1+\frac{3}{2}j\right)^2+1} = -\frac{1}{145}\left(4+48j\right) = 0{,}332\angle -95^\circ$$

$$\Rightarrow \boxed{V_o = -\frac{1}{145}\left(4+48j\right)V_i}$$

$$I = \frac{V_i - V_o}{\left(1+\frac{3}{2}j\right)\Omega} = V_i\,\frac{\left[\left(1+\frac{3}{2}j\right)^{\cancel{2}}+\cancel{1}-\cancel{1}\right]}{\cancel{\left(1+\frac{3}{2}j\right)}\left[\left(1+\frac{3}{2}j\right)^2+1\right]} = \frac{\left(1+\frac{3}{2}j\right)}{\left(1+\frac{3}{2}j\right)^2+1}V_i$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{145}\left(68-54j\right)V_i}$$

En particular si $v_i(t) = 0{,}5\sin\omega t$

$$\Rightarrow v_o(t) = 0{,}5 \times 0{,}332\sin(\omega t - 95^\circ)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_o(t) = 0{,}166\sin(\omega t - 95^\circ)}$$