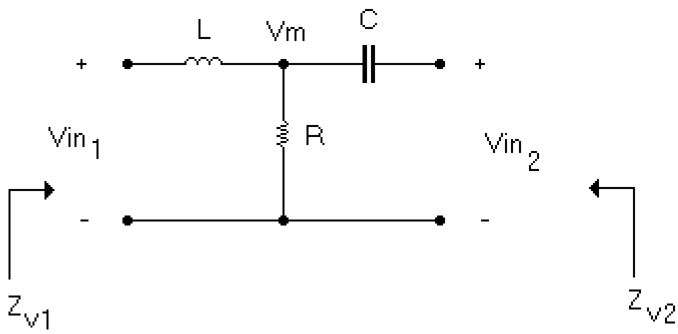
Sistemas Lineales 1
Examen, 12 de agosto del 2000

Ejercicio 1

Sea el circuito de la figura 1, donde V_{in1} y V_{in2} son entradas al circuito.



a) i) Calcular V_m en función de las entradas

ii) Calcular la Z_{v1}, impedancia vista del lado 1.

iii) Calcular la Z_{v2}, impedancia vista del lado 2.

Para el resto del problema se considera:

$V_{in2} = 0$

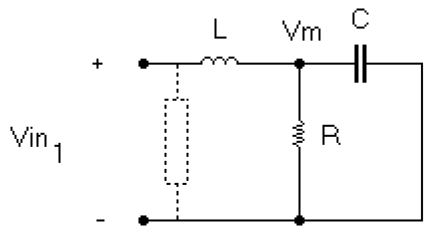
$V_{in1} = 220V\ eficaces$

$\omega = 100\pi$

$R = 220\,\Omega$

$L = 0.4\ Hy$

$C = 17\ \mu f$



b) i) Hallar los fasores V_m, I_R(fasor de corriente por la resistencia), I_C (fasor de corriente por el condensador), realizar un diagrama fasorial con V_{in1}, V_m, I_R y I_C.

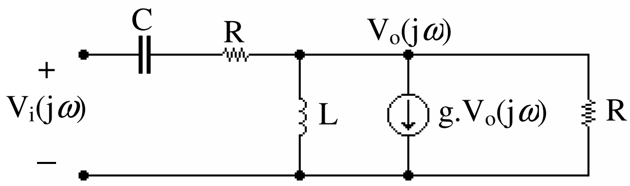
ii) Explicar como calcularía el fasor I (fasor de corriente por la bobina), basándose en el diagrama fasorial anterior. Dibujar el fasor I en el mismo diagrama fasorial.

iii) Hallar $i(t)$ y $v_m(t)$, expresiones en el tiempo de V_m y I.

c) i) Calcular la potencia activa y reactiva del circuito.

ii) Se esta pensando en compensar la reactiva utilizando una componente en paralelo con la fuente(según como se indica en la figura), decidir que elemento pondría y cual sería su valor para compensar la reactiva del circuito total.

Ejercicio 2



a) En el circuito de la figura, calcular la transferencia en régimen $H(j\omega)$ entre los fasores $V_o(j\omega)$ y $V_i(j\omega)$.

b) Sabiendo que $(2+g.R)=4$, $\dfrac{1}{LC}=\omega_o^2$, $\omega_o.\left[RC+\dfrac{3L}{R}\right]=5$:

i) Verificar que la transferencia puede escribirse como

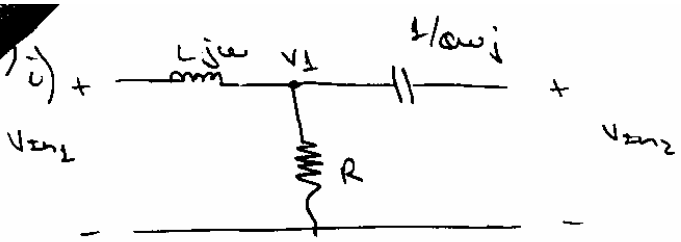
$$H(j\omega)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\left(\dfrac{j\omega}{\omega_o}\right)^2}{\left(\dfrac{j\omega}{\omega_o}+1\right).\left(\dfrac{j\omega}{\omega_o}+\dfrac{1}{4}\right)}$$

ii) Dibujar los Diagramas de Bode asintóticos, asumiendo que 1 >>1/4. Indicar claramente los pasos realizados para la obtención de los Diagramas. Señalar en los mismos los valores destacables (pendientes, abscisas, ordenadas, ejes, constantes, etc.).

c) Calcular la distancia en decibeles entre el Bode de módulo asintótico y el real para $\omega=\omega_o/4$ y $\omega=\omega_o$.

d) Si la entrada es $v_i(t)=10.\cos(\omega_o t)$, mostrar que la salida es $v_i(t)=10.A.\cos(\omega_o t + \varphi)$, hallando A y φ.

i)



$$V_1 = \frac{V_{in1}\,(R \parallel 1/C\omega j)}{L\omega j + (R \parallel 1/C\omega j)} + \frac{V_{in2}\,(L\omega j \parallel R)}{\frac{1}{C\omega j} + (R \parallel L\omega j)}$$

$$\frac{R\,V_{in1}}{L\omega j\,(RC\omega j+1)+R} + \frac{V_{in2}\left(\frac{L\omega j R}{R+L\omega j}\right)}{\frac{1}{C\omega j} + \frac{L\omega j R}{R+L\omega j}}$$

$$\boxed{V_1 = \frac{R\,V_{in1}}{L\omega j\,(RC\omega j+1)+R} + \frac{V_{in2}\,C\omega j\,L\omega j R}{(R+L\omega j) + (L\omega j R)\,C\omega j}}$$

ii)

$$\boxed{Z_{V_1} = L\omega j + \frac{R}{(RC\omega j+1)}} \qquad \boxed{Z_{V_2} = \frac{1}{C\omega j} + \frac{RL\omega j}{R+L\omega j}}$$

b)

$$V_1 = \frac{R\,V_{in1}}{R + L\omega j\,(RC\omega j+1)} \qquad I_R = \frac{V_{in1}}{R+L\omega j\,(RC\omega j+1)}$$

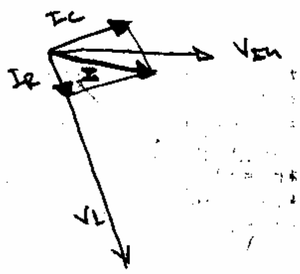
$$I_c = \frac{RC\omega j\,V_{in1}}{R + L\omega j\,(RC\omega j+1)}$$

$$V_L = \frac{R\,V_{in}}{R - RCL\omega^2 + L\omega j} \cong \frac{(220)^2}{145\, e^{j60^\circ}} \cong 333{,}8\, e^{-j60^\circ}$$

$$I_R = \frac{V_{in}}{R(1-CL\omega^2) + L\omega j} \cong \frac{V_L}{220} \cong 1{,}52\, e^{-j60^\circ}$$

$$I_C = \frac{RC\omega j\, V_{in}}{R(1-CL\omega^2)+L\omega j} = V_L\, C\omega j \simeq 1{,}78\, e^{j30^\circ}$$

$v_L(t)$
$i(t)$



$$v_L(t) = \sqrt{2}\,|V_L|\ \text{sen}\,(\omega t + \arg(V_L))$$

$$\boxed{v_L(t) \simeq 472\ \text{sen}\,(100\pi t + \pi/3)}$$

$$i(t) = \sqrt{2}\,|I|\ \text{sen}\,(\omega t + \arg(I))$$

$I \rightarrow I_C + I_R$

→ sumo numericamente $I_C + I_R$

↓ calculo gráficamente → $|I| \cong 2{,}34$

$\arg(I) \cong -10^\circ 30'$

$$P = \frac{|V_1|^2}{R} \simeq 506 \text{ W}$$

$$Q = |V_1|^2 C\omega - |I|^2 L\omega \simeq -93 \text{ Var}$$

$$Q_T = Q + Q_C \Rightarrow \quad -Q = Q_C = |V|^2 C_1 \omega$$

$$\frac{-Q}{|V|^2 \omega} = C_1 \Rightarrow \boxed{C_1 \simeq 6{,}13\,\mu F}$$

a) $$\frac{V_i - V_o}{R + \frac{1}{Cj\omega}} = \frac{V_o}{Lj\omega} + \frac{V_o}{R} + g V_o = V_o\left[\frac{1}{Lj\omega} + \frac{1}{R} + g\right]$$

$$(V_i - V_o)\, Cj\omega = (1 + RCj\omega)\, V_o \left[\frac{R + Lj\omega + gRLj\omega}{RLj\omega}\right]$$

$$V_i - V_o = \frac{(1 + RCj\omega)}{R(Lj\omega)(Cj\omega)} V_o \left[R + (1+gR)Lj\omega \right]$$

$$V_i = V_o\left[1 + \frac{(1+RCj\omega)\left[R + (1+gR)Lj\omega\right]}{R(Lj\omega)(Cj\omega)}\right]$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{R(Lj\omega)(Cj\omega)}{R(Lj\omega)(Cj\omega) + (1+RCj\omega)\left[R + (1+gR)Lj\omega\right]} = H(j\omega)$$

b) $$H(j\omega) = \frac{R(Lj\omega)(Cj\omega)}{R(Lj\omega)(Cj\omega) + R + (1+gR)Lj\omega + R^2 Cj\omega + R(1+gR)(Cj\omega)(Lj\omega)}$$

$$H(j\omega) = \frac{R(Lj\omega)(Cj\omega)}{R(Lj\omega)(Cj\omega)\left[2 + gR\right] + \left[(1+gR)L + R^2 C\right] j\omega + R}$$

$$H(j\omega) = \frac{\cancel{RLC}\,(j\omega)^2}{\cancel{RLC}\left[(j\omega)^2(2+gR) + \left[\frac{(1+gR)L + R^2C}{RLC}\right] j\omega + \frac{1}{LC}\right]}$$

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^2(2+gR) + \left[\frac{(1+gR)}{RC} + R/L\right] j\omega + \frac{1}{LC}}$$

②

$\Rightarrow 2 + gR = 4$

$\Rightarrow 1 + gR = 3$

$$\frac{(1+gR)L + R^2C}{RLC} = \frac{3}{RC} + \frac{R}{L} = \frac{1}{LC}\left[\frac{3L}{R} + RC\right] = \omega_0^2\left[\frac{3L}{R} + RC\right]$$

$= 5\,\omega_0$.

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^2 \cdot 4 + 5\,\omega_0 j\omega + \omega_0^2}$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2 \cdot 4 + 5\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right) + 1} = \frac{\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}{4\left(\frac{j\omega}{\omega_0} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{\omega_0} + \frac{1}{4}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(\frac{j\omega}{\omega_0} + 1\right)\left(\frac{j\omega}{\omega_0} + \frac{1}{4}\right)}}$$

Para hacer el Bode, asumimos que $1 >> \frac{1}{4} \Rightarrow \omega_0 >> \frac{\omega_0}{4}$

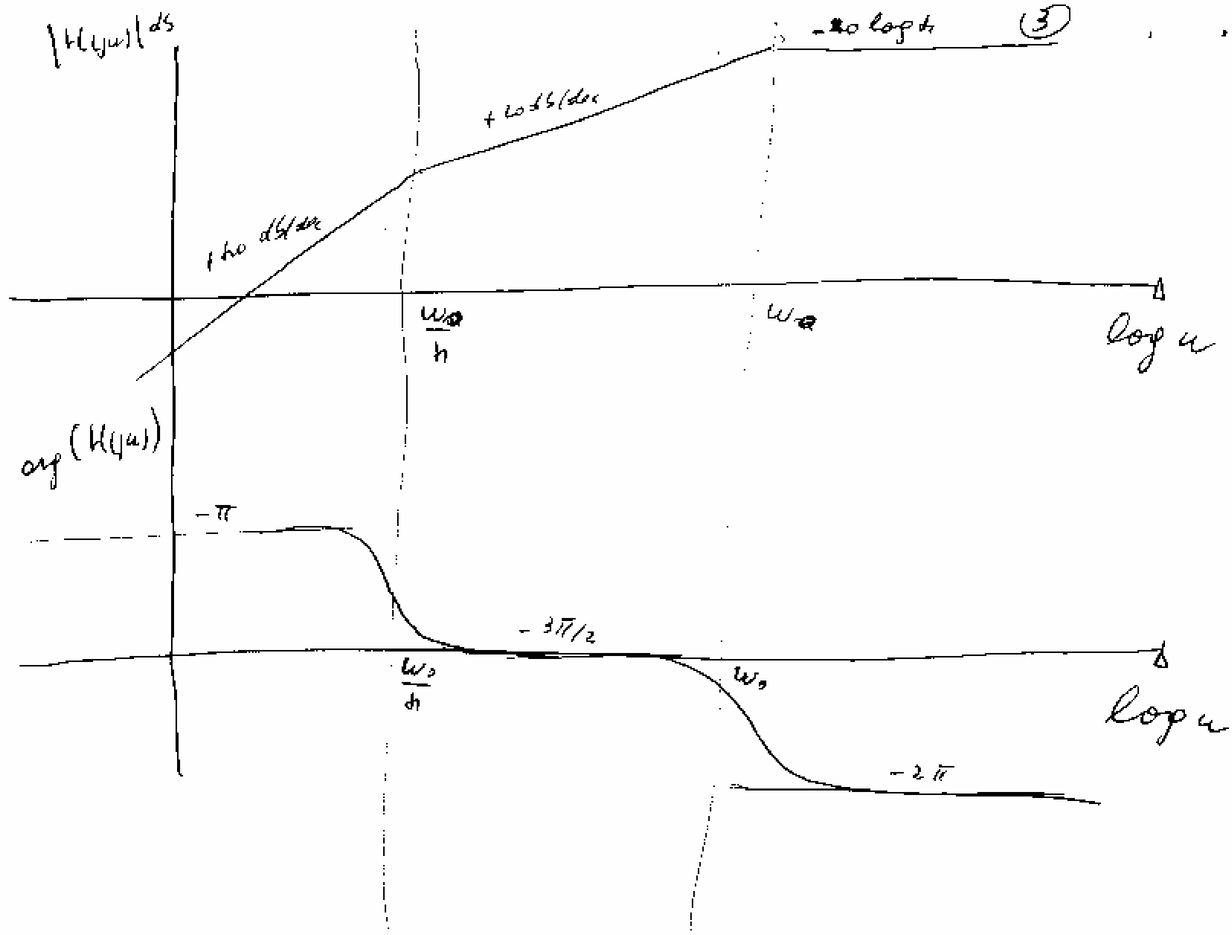
$$\omega << \frac{\omega_0}{4} \Rightarrow H(j\omega) \simeq \frac{1}{\cancel{4}} \frac{\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}{(1)\left(\cancel{\frac{1}{4}}\right)} = \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| \simeq \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \\ \arg H(j\omega) \simeq -\pi . \end{cases}$$

$$\frac{\omega_0}{4} << \omega << \omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \simeq \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^{\cancel{2}}}{(1)\left(\cancel{\frac{j\omega}{\omega_0}}\right)} = \frac{j\omega}{4\omega_0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| \simeq \frac{\omega}{4\omega_0} \\ \arg H(j\omega) \simeq -\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$\omega >> \omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \simeq \frac{1}{4} \frac{\left(\cancel{\frac{j\omega}{\omega_0}}\right)^{\cancel{2}}}{\left(\cancel{\frac{j\omega}{\omega_0}}\right)\left(\cancel{\frac{j\omega}{\omega_0}}\right)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| \simeq \frac{1}{4} \\ \arg H(j\omega) \simeq -2\pi . \end{cases}$$



c) $H\left(j\frac{\omega_0}{4}\right)$: $\quad \dfrac{j\frac{\omega_0}{4}}{\omega_0} = \dfrac{j}{4} \Rightarrow H\left(j\frac{\omega_0}{4}\right) = \dfrac{1}{4}\,\dfrac{\left(\frac{j}{4}\right)^2}{\left(\frac{j}{4}+1\right)\left(\frac{j}{4}+\frac{1}{4}\right)}$

$$\Rightarrow H\left(j\frac{\omega_0}{4}\right) = \frac{1}{4}\,\frac{j^2}{(j+4)(j+1)} \Rightarrow \left|H\left(j\frac{\omega_0}{4}\right)\right| = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}\,\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{34}}$$

Para el asintótico, usamos la pendiente de $+20$ dB/dec (podríamos usar también la de $+40$ dB/dec, ya que ambas rectas se cortan en $\frac{\omega_0}{4}$).

$$H_{as}\left(j\frac{\omega_0}{4}\right) = \frac{j\frac{\omega_0}{4}}{4\omega_0} = \frac{j}{16} \Rightarrow \left|H_{as}\left(j\frac{\omega_0}{4}\right)\right| = \frac{1}{16}.$$

$$\Rightarrow 20\log\left|H\left(j\frac{\omega_0}{4}\right)\right| - 20\log\left|H_{as}\left(j\frac{\omega_0}{4}\right)\right| = 20\log\frac{\frac{1}{4\sqrt{34}}}{\frac{1}{16}} = 20\log\frac{4}{\sqrt{34}} \approx -3{,}3 \text{ dB}.$$

Hacemos lo mismo para ω_0:

$$H(j\omega_0) = \frac{1}{4}\,\frac{(j)^2}{(j+1)(j+\frac{1}{4})} = \frac{(j)^2}{(j+1)(4j+1)}$$

$$|H(j\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}\;\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{34}}$$

$$H_{as}(j\omega_0) = \frac{1}{4} \Rightarrow |H_{as}(j\omega_0)| = \frac{1}{4}.$$

$$20\log\frac{|H(j\omega_0)|}{|H_{as}(j\omega_0)|} = 20\log\frac{4}{\sqrt{34}} \simeq -3{,}3\,dB.$$

d) $v_i(t) = 10\cos\omega_0 t = Re\left(10\,e^{j\omega_0 t}\right) \Rightarrow$ trabajamos con el fasor $V_i(j\omega_0) = 10$.

$$\Rightarrow V_o(j\omega_0) = H(j\omega_0)\cdot V_i(j\omega_0) = \frac{10}{4}\,\frac{(j)^2}{(j+1)(j+\frac{1}{4})}$$

$$V_o(j\omega_0) = 10\,\frac{(j)^2}{(j+1)(4j+1)} = 10\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{34}}}_{|H(j\omega_0)|}\,e^{j\arg H(j\omega_0)}$$

$$\arg(H(j\omega_0)) = 1{,}03\,rad = \varphi.$$

$$|H(j\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{34}} = A.$$

$$\Rightarrow v_o(t) = Re\left(V_o(j\omega_0)\,e^{j\omega_0 t}\right) = Re\left(A\cdot 10\,e^{j(\omega_0 t+\varphi)}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_o(t) = \frac{10}{\sqrt{34}}\cdot\cos(\omega_0 t + 1{,}03)}$$