Sistemas Lineales I
Primer Parcial - Mayo 1999

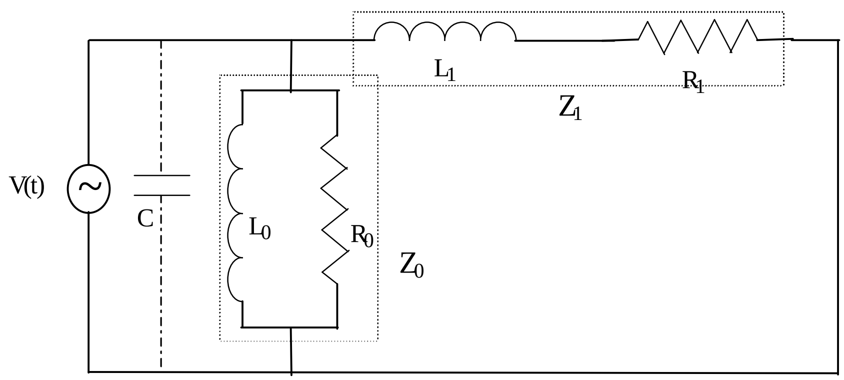
Problema 1 **(11ptos)**

Sea el circuito de la figura, donde :

$V(t) = 311 * \cos(314 * t)$ *voltios*

R_0 = 544 ohms;
R_1 = 5 ohms;
L_0 = 1 Hy;
L_1 = 9.2 mHy;

i(t) corriente por la fuente V(t).
i_0 (t) corriente por la impedancia Z_0.
i_1 (t) corriente por la impedancia Z_1.



Se pide:

a) (4ptos)

i) Realice un diagrama fasorial describiendo la relación de fases entre V(t) e i_0 (t), y entre V(t) e i_1 (t).

ii) Explique cualitativamente como obtendría el fasor correspondiente a i(t) utilizando la parte anterior.

b) Calcular la potencia activa y reactiva consumida en la impedancias Z_0 y Z_1. (4ptos)

c) Se decide compensar la reactiva total, mediante un condensador en paralelo a la entrada. Calcular el valor de dicho condensador para que anule la potencia reactiva. (3ptos)

Problema 2 **(6ptos)**

En los siguientes ejercicios α es una función infinitamente derivable, T es una distribución cualquiera y d es la distribución de Dirac. Utilizando la definición:

$$\langle T'(x), j(x)\rangle = -\langle T(x), j'(x)\rangle$$

i) Indicar la opción correcta: (4ptos)

$$a(x)d'(x) = \begin{cases} a(0)d'(x) & (a) \\ a(0)d'(x) - a'(0)d(x) & (b) \\ a'(0)d'(x) + a(0)d(x) & (c) \end{cases}$$

ii) Hallar una expresión equivalente para: (2ptos)

$$\left(a(x)T(x)\right)'$$

Problema 3 **(11ptos)**

En las preguntas i) ii) y iii), indicar todas las opciones correctas.

i) $$\langle S_x * T_x, j(x)\rangle = \begin{cases} \langle S_x \otimes T_x, j(x+x)\rangle & (a) \\ \langle S_x \otimes T_y, j(x+y)\rangle & (b) \\ \langle S_x \otimes T_t, j(x-t)\rangle & (c) \\ \langle S_u \otimes T_v, j(u+v)\rangle & (d) \end{cases}$$ (2ptos)

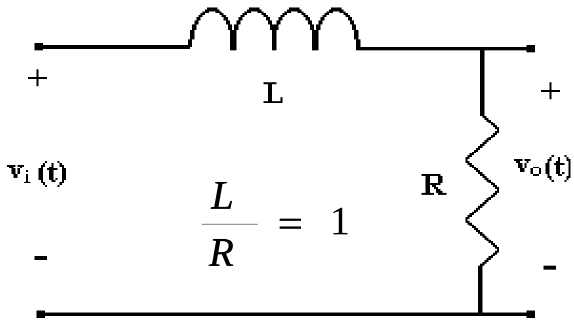
ii) Si $\begin{cases} S_x \in D'_+ \\ T_x \in D'_- \end{cases}$ $S_x * T_x \begin{cases} \in D'_+ & (a) \\ \textit{puede no estar definida} & (b) \\ \in (C^\infty)' & (c) \end{cases}$ (3ptos)

iii) Si T_x es de soporte acotado y $a(x)$ es infinitamente derivable, (4ptos)

$$T_x * a(x) \in \begin{cases} D & (a) \\ D'_+ & (b) \\ C^\infty & (c) \end{cases}$$

iv) Demostrar que $T_x * d(x-a) = T_{x-a}$ (2ptos)

Problema 4 **(5ptos)**



a) Hallar $v_o(t)$ en régimen cuando $v_i(t)$ es una señal sinusoidal de amplitud unitaria y periodo *2p*. Estudiar primero el caso e que $v_i(t)$ es un coseno y luego el caso en que es un seno. (3ptos)

b) En cada uno de los casos anteriores dibujar en una misma gráfica las señales $v_i(t)$ y $v_o(t)$, señalando las abscisas y ordenadas notables. (2ptos)

Problema 5 **(7ptos)**

a) Hallar los coeficientes de Fourier de la función f(-t) en función de los c_n de f(t). (3ptos)

b) Sabiendo que la función f(t) de la figura 1 tiene los siguientes coeficientes de Fourier: (4ptos)

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{j.T}{4n\text{p}} & n \; par \\ \dfrac{-j.T}{4n\text{p}} - \dfrac{T}{2n^2\text{p}^2} & n \; impar \\ \dfrac{T}{8} & n = 0 \end{cases}$$

Calcular, usando la parte a), los c_n de la función g(t) de la figura 2.

Recordar que para una función real:

$$c_n = \overline{c_{-n}}$$

Figura 1.

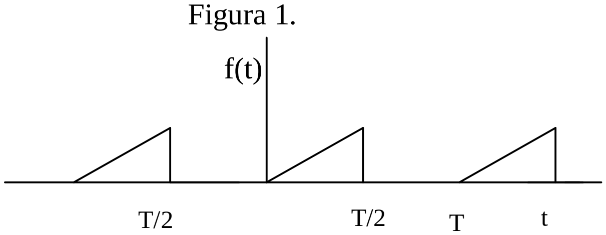
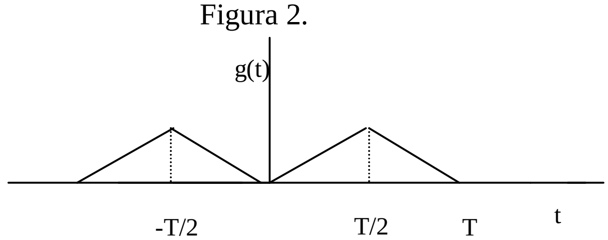
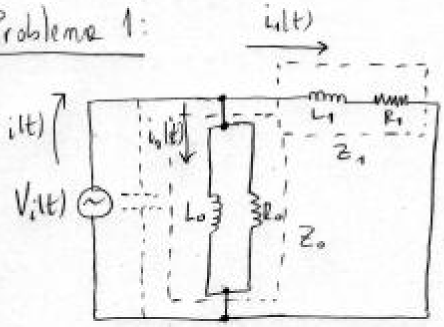


Figura 2.



SISTEMAS LINEALES 1: PRIMER PARCIAL 1999 ①

Problema 1:



$V(t) = 220\sqrt{2}\cos(2\pi\, 50t)$ V , $\omega = 314 \frac{rad}{s}$

$R_0 = 544\,\Omega$

$R_1 = 5\,\Omega$

$L_0 = 1$ Hy

$L_1 = 9{,}2$ mHy

ⓐ (i) $Z_0 = L_0 j\omega \,//\, R_0 = \dfrac{L_0 j\omega R_0}{L_0 j\omega + R_0} = (136{,}1 + 235{,}6j)\,\Omega = 272{,}1\angle 60^\circ\,\Omega$

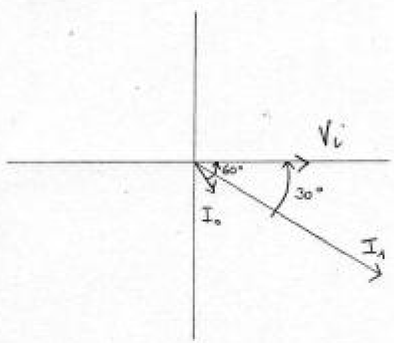
$Z_1 = L_1 j\omega + R_1 = (5 + 2{,}89j)\,\Omega = 5{,}77\angle 30^\circ\,\Omega$

Trabajando con valores eficaces: $V_i = 220\angle 0^\circ$ V

$I_0 = \dfrac{V_i}{Z_0} \Rightarrow \boxed{I_0 = (0{,}404 - 0{,}7j)\,A = 0{,}809\angle -60^\circ\ A}$

$I_1 = \dfrac{V_i}{Z_1} \Rightarrow \boxed{I_1 = (32{,}98 - 19{,}1j)\,A = 38{,}1\angle -30^\circ\ A}$

El diagrama fasorial resulta:



(ii) Por la ley de nudos, sabemos que $i(t) = i_1(t) + i_0(t)$ por lo que $I = I_1 + I_0$. Podemos obtener el fasor I, sumando vectorialmente $I_1 + I_0$, por ejemplo a partir de la regla del paralelogramo.

ⓑ $P_0 = Re[V_i\, I_0^*] \Rightarrow \boxed{P_0 = 89W}$ $\qquad P_1 = Re[V_i\, I_1^*] \Rightarrow \boxed{P_1 = 7256W}$

$Q_0 = Im[V_i\, I_0^*] \Rightarrow \boxed{Q_0 = 154{,}1\ Var}$ $\qquad Q_1 = Im[V_i\, I_1^*] \Rightarrow \boxed{Q_1 = 4194\ Var}$

Otra forma:

2

$P_0 = Re[Z_0]|I_0|^2 \Rightarrow \boxed{P_0 = 89 W}$

$P_1 = \underbrace{Re[Z_1]}_{R_1}|I_1|^2 \Rightarrow \boxed{P_1 = 7256 W}$

$Q_0 = Im[Z_0]|I_0|^2 \Rightarrow \boxed{Q_0 = 154,1 Var}$

$Q_1 = \underbrace{Im[Z_1]}_{L_1 w}|I_1|^2 \Rightarrow \boxed{Q_1 = 4194 Var}$

c) $Q_{TOT} = Q_1 + Q_0 \Rightarrow Q_{TOT} = 4348,2 Var$

Conecto un condensador en paralelo tal que entregue una reactiva igual a la consumida total

$Q_c + Q_{TOT} = 0$

$Q_c = - C\omega |V_i|^2 = - Q_{TOT} \Rightarrow C = \frac{Q_{TOT}}{\omega |V_i|^2} \Rightarrow \boxed{C = 286 \mu F}$

3

Problema 2:

$\alpha \in C^\infty$, T distribución cualquiera, y δ es la distribución de Dirac.

(i) $\langle \alpha(x)\delta'(x), \varphi(x) \rangle = \langle \delta'(x), \alpha(x)\varphi(x) \rangle = -\langle \delta, (\alpha(x)\varphi(x))' \rangle = -\alpha(0)\varphi'(0) - \alpha'(0)\varphi(0)$

producto por función C^∞ — derivada de distribución

Por otro lado $\langle \alpha(0)\delta'(x) - \alpha'(0)\delta(x), \varphi(x) \rangle = \langle \alpha(0)\delta'(x), \varphi(x) \rangle - \langle \alpha'(0)\delta(x), \varphi(x) \rangle = -\alpha(0)\varphi'(0) - \alpha'(0)\varphi(0)$

suma de distribuciones

Como $\varphi(x)$ es arbitraria, se tiene la igualdad: $\boxed{\alpha(x)\delta'(x) = \alpha(0)\delta'(x) - \alpha'(0)\delta(x)}$ Opción b

(ii) Por un lado tenemos $\langle (\alpha(x)T(x))', \varphi(x) \rangle = -\langle \alpha(x)T(x), \varphi'(x) \rangle = -\langle T(x), \alpha(x)\varphi'(x) \rangle$

Por otro lado: $\langle \alpha'(x)T(x), \varphi(x) \rangle = \langle T(x), \alpha'(x)\varphi(x) \rangle$

$\langle \alpha(x)T'(x), \varphi(x) \rangle = \langle T'(x), \alpha(x)\varphi(x) \rangle = -\langle T(x), (\alpha(x)\varphi(x))' \rangle$

Siendo $\varphi(x)$ arbitraria, y de la identidad para funciones $(\alpha\varphi)' = \alpha'\varphi + \alpha\varphi'$ se obtiene la igualdad: $\boxed{(\alpha(x)T(x))' = \alpha'(x)T(x) + \alpha(x)T'(x)}$

$\alpha(x)$ debe derivarse como función y $T(x)$ como distribución.

4

Problema 3:

(i) $\boxed{< S(x) * T(x), \varphi(x) > = < S(x) \otimes T(y), \varphi(x+y) >}$ Opción b

$\boxed{< S(x) * T(x), \varphi(x) > = < S(u) \otimes T(v), \varphi(u+v) >}$ Opción d

Estas dos opciones son las correctas a partir de la definición misma de producto convolución. Debe quedar claro que no depende del nombre utilizado para las variables en el producto tensorial.

La opción a no es correcta pues el producto tensorial no queda definido para $\varphi \in D(\mathbb{R}^2)$

La opción c directamente no coincide con la definición de producto convolución.

(ii) Sea $S(x) \in D'_+$, $T(x) \in D'$

En este caso $\boxed{S(x) * T(x) \text{ puede no estar definido}}$ Opción b.

Habíamos visto que dados S y T de soportes respectivos A y B, tiene sentido definir el producto convolución $S * T$ siempre que la condición $x+y$ acotado ($x \in A, y \in B$) implique necesariamente que x e y se mantengan acotados.

En este caso la acotación de $x+y$, $x \geq 0$ e $y \leq 0$ no implica la acotación individual de x e y. Si elijo $x = r$, $y = -r$ con r arbitrario grande y positivo, la suma es 0, acotada, pero cada uno no es acotado.

(iii) Si $T(x)$ es de soporte acotado y $\alpha(x) \in C^\infty \Rightarrow \boxed{T(x) * \alpha(x) \in C^\infty}$ Opción c

El resultado se obtiene directamente del enunciado del Teorema de la Regularizada

(iv) $< T(x) * \delta(x-a), \varphi(x) > = < T(x) \times \delta(y-a), \varphi(x+y) > = < T(x), < \delta(y-a), \varphi(x+y) > >$

$= < T(x), \varphi(x+a) > \underset{\uparrow}{=} < T(x'-a), \varphi(x') > = T(x-a)$

$\uparrow$ δ con asiento en $y=a$

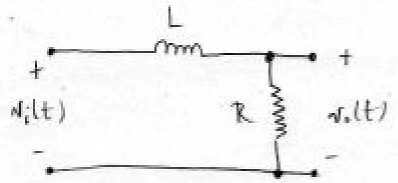
Cambio de variable $x+a = x'$

$\Rightarrow \boxed{T(x) * \delta(x-a) = T(x-a)}$

5

Problema 4:

a)



Del divisor de tensiones:

$$V_o = \frac{R}{R+Lj\omega} V_i = \frac{R}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}} e^{-j\tan^{-1}\left(\frac{L\omega}{R}\right)} V_i$$

Si $V_i = e^{jt} \Rightarrow Re[V_i] = \cos t$ $\quad \omega = 1\frac{rad}{s}$ pues

$Im[V_i] = \sin t$ $\quad T = 2\pi s$

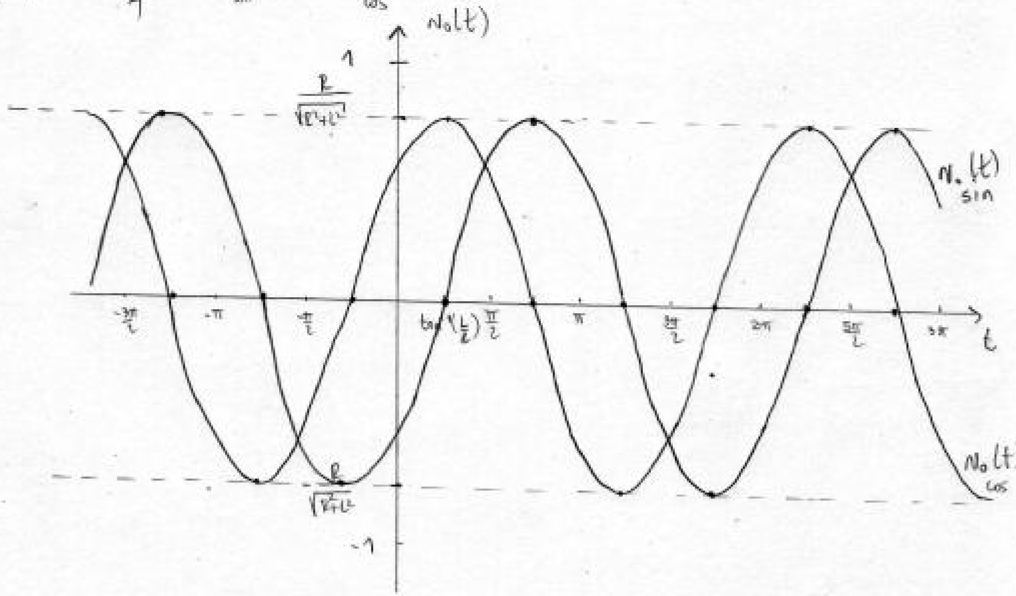
La salida ante $v_i(t) = \cos t$ es $Re\left[\frac{R}{R+Lj} V_i\right]$

$$\Rightarrow \boxed{v_{o_{cos}}(t) = \frac{R}{\sqrt{R^2+L^2}} \cos\left(t - \tan^{-1}\left(\frac{L}{R}\right)\right)}$$

La salida ante $v_i(t) = \sin t$ es $Im\left[\frac{R}{R+Lj} V_i\right]$

$$\Rightarrow \boxed{v_{o_{sin}}(t) = \frac{R}{\sqrt{R^2+L^2}} \sin\left(t - \tan^{-1}\left(\frac{L}{R}\right)\right)}$$

b) Notando que $v_{o_{sin}}(t) = v_{o_{cos}}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$



Las salidas corresponden a las entradas $v_i(t)$ con una atenuación de $\frac{R}{\sqrt{R^2+L^2}}$ y un desfasaje de $-\tan^{-1}\left(\frac{L}{R}\right)$ (retardo pues $\tan^{-1}\left(\frac{L}{R}\right) > 0$)

6

Problema 5 :

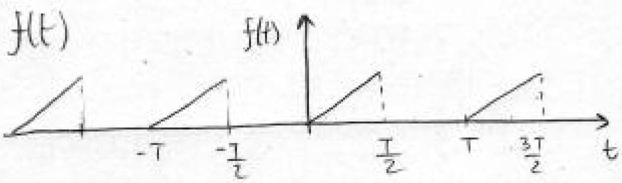
a) Sean $c_n(f)$ los coeficientes de Fourier de $f(t)$. Buscamos hallar los coeficientes $c_n(g)$ de $g(t)=f(-t)$. Es claro que $g(t)$ tiene el mismo período T que $f(t)$.

$$c_n(g)=\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,e^{-jn\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(-t)\,e^{-jn\omega t}\,dt \underset{\substack{-t=s\\-dt=ds}}{=} -\frac{1}{T}\int_0^{-T} f(s)\,e^{-j(-n)\omega s}\,ds$$

$$\Rightarrow c_n(g) = -\frac{1}{T}\int_{0+T}^{-T+T} f(s)\,e^{-j(-n)\omega s}\,ds = \frac{1}{T}\int_0^T f(s)\,e^{-j(-n)\omega s}\,ds = c_{-n}(f)$$

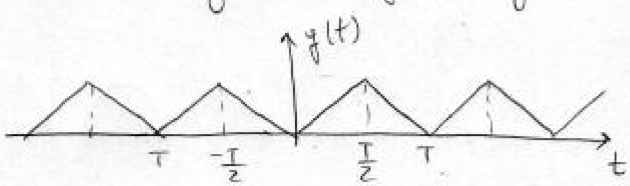
Recordando que para una función real $c_{-n}=\bar{c}_n \Rightarrow \boxed{c_n(g)=\overline{c_n(f)}}$

b) Sea $f(t)$



con $c_n(f)=\begin{cases} \dfrac{jT}{4n\pi} & n \text{ par}\\ \dfrac{-jT}{4n\pi}-\dfrac{T}{2n^2\pi^2} & n \text{ impar}\\ \dfrac{T}{8} & n=0\end{cases}$

Buscamos hallar los coeficientes $c_n(g)$ de $g(t)$:



Es claro que $g(t)=f(t)+f(-t)$

$\Rightarrow$ Por la linealidad de los coeficientes de Fourier, y la parte anterior:

$$c_n(g)=c_n(f)+\overline{c_n(f)} = 2\,\mathrm{Re}[c_n(f)]$$

$$\Rightarrow \boxed{c_n(g)=\begin{cases} 0 & n \text{ par}\\ -\dfrac{T}{n^2\pi^2} & n \text{ impar}\\ \dfrac{T}{4} & n=0\end{cases}}$$