Sistemas Lineales 1
Segundo parcial, agosto 2001

Recomendaciones generales:
Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.
En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar de problema y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.
Justificar claramente los pasos realizados para resolver los problemas.
Hacer problemas distintos en hojas separadas.
Poner el nombre en todas las hojas.
Usar las hojas de un solo lado
Se recuerda que la prueba es **individual**.

Problema 1 **(8 puntos)**

a) Calcular las constantes generales de un cuadripolo, A,B,C,D, en función de los parámetros híbridos.
b) Deducir las condiciones que deben cumplir los parámetros híbridos para que el cuadripolo sea
 i) recíproco
 ii) simétrico

Problema 2 **(17 puntos)**

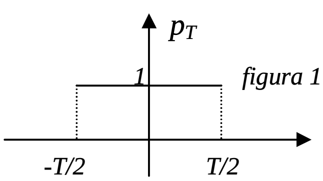
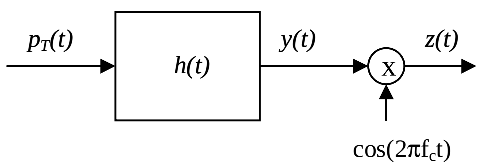


figura 1

figura 2



$f_o << f_C$

a) Probar que $F\left[p_T(t)\right] = \dfrac{\mathrm{sen}(pfT)}{pf} = T.sinc(fT)$.

b) Usando la fórmula de inversión de Fourier, mostrar que $F\left[f_o.sinc(f_o t)\right] = p_{f_o}(f)$.

Se considera el sistema de la figura 2, en el que *y(t)=h(t)*p*$y(t)=h(t)*p_T(t)$, con $h(t) = f_o.sinc(f_o t)$ y $\dfrac{f_o}{2} = \dfrac{1}{T}$.

c) Dibujar el espectro de la señal *y(t)*.

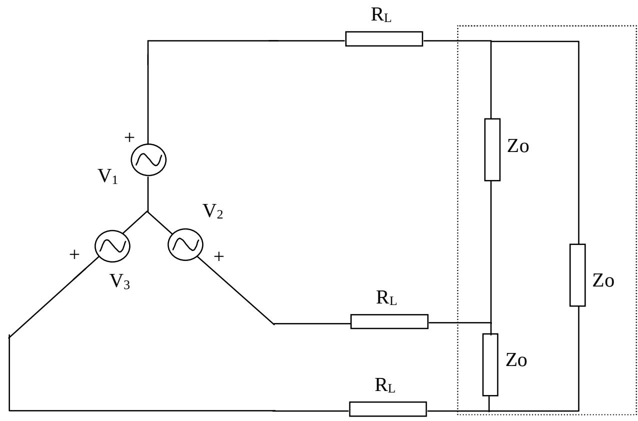
d) Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)dt$.

e) Dibujar el espectro de la señal *z(t)*.

f) Se define la energía de una señal *u(t)* como $\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt$ cuando esta integral tiene sentido. Comparar las energías de las señales *y(t)* y *z(t)*.

Problema 3 **(15 puntos)**

a) Enunciar el Teorema de Blondell en el caso de un sistema polifásico con N fases, definir los elementos que aparecen en el teorema.



b) Dado el circuito de la figura, calcular:

i) Corriente de línea, y las expresiones temporales de $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $i_3(t)$.
ii) Tensión en bornes de Zo (módulo).
iii) Potencia Activa y Reactiva consumida a las fuentes.
iv) Se desea hacer una compensación de reactiva a nivel local (en paralelo con las Zo), decidir que elemento agregaría y el valor del mismo.

$$v_1(t) = 220\sqrt{2}\cos(100p\,t) \quad v_2(t) = 220\sqrt{2}\cos(100p\,t + 2p/3) \quad v_3(t) = 220\sqrt{2}\cos(100p\,t + 4p/3)$$

$$R_L = 2\,\Omega \quad R_1 = 80\,\Omega \quad L_1 = 60\ mHy \quad Z_0 = R_1 \textit{ en serie con } L_1$$

Sugerencia: Expresar los resultados primero en función de los parámetros (sin sustituir por los valores numéricos) y luego sí escribirlos en forma numérica.

Problema 4 **(20 puntos)**

a) Sea la transferencia $H(j.\omega) = \dfrac{a}{a + j.\omega}$,

i) Dibujar el diagrama de bode asintótico de módulo y fase y bosquejar el real.
ii) Hallar la diferencia en decibeles entre el bode asintótico de módulo y el real para ω = a.
iii) Demostrar que en ω = a se da la mayor diferencia entre el bode de módulo real y el asintótico.
iv) Calcular la fase de H(jω) para ω= a

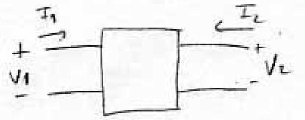
b) Sea la transferencia $H(j.\omega) = \dfrac{100.\omega_0}{100.\omega_0 + j.\omega}.\dfrac{\omega_0 + j.\omega}{\omega_0 - j.\omega}$

i) Realizar el bode asintótico de módulo y fase de H(jω), especificando los puntos de corte entre las asíntotas.
ii) Si la entrada a un sistema de transferencia H(jω), es x(t) = A.cos($100\omega_0$t), cual es la salida? Si despreció algún término, justifique.

SISTEMAS LINEALES 1: SEGUNDO PARCIAL 2001 (1)

Problema 1:

(a)



Para los constantes generales: $\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{pmatrix}$

Para los parámetros híbridos: $\begin{pmatrix} V_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$

$A = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0} \Rightarrow h_{21} I_1 + h_{22} V_2 = 0 \Rightarrow I_1 = -\frac{h_{22}}{h_{21}} V_2$

Sustituyendo $V_1 = \left[-\frac{h_{11}h_{22}}{h_{21}} + h_{12}\right] V_2 \Rightarrow \boxed{A = \frac{h_{12}h_{21} - h_{11}h_{22}}{h_{21}}}$, $h_{21} \neq 0$

$B = -\left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{V_2=0} \Rightarrow \frac{V_1}{I_2} = \frac{h_{11}}{h_{21}} \Rightarrow \boxed{B = -\frac{h_{11}}{h_{21}}}$, $h_{21} \neq 0$

$C = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0} \Rightarrow h_{21} I_1 + h_{22} V_2 = 0 \Rightarrow \boxed{C = -\frac{h_{22}}{h_{21}}}$, $h_{21} \neq 0$

$D = -\left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_2=0} \Rightarrow I_2 = h_{21} I_1 \Rightarrow \boxed{D = -\frac{1}{h_{21}}}$, $h_{21} \neq 0$

(b) (i) Sabemos que la condición de reciprocidad para un cuadripolo descripto por sus parámetros generales es $AD - BC = 1$

$\Rightarrow \frac{-h_{12}h_{21} + h_{11}h_{22}}{h_{21}^2} - \frac{h_{11}h_{22}}{h_{21}^2} = -\frac{h_{12}\cancel{h_{21}}}{h_{21}^{\cancel{2}}} = 1 \Rightarrow \boxed{h_{12} = -h_{21}}$

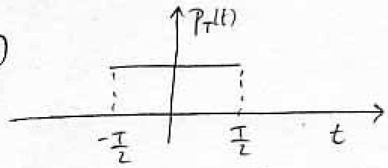
(ii) Si el cuadripolo es simétrico, además debe cumplirse: $A = D$

$\Rightarrow \frac{h_{12}h_{21} - h_{11}h_{22}}{\cancel{h_{21}}} = -\frac{1}{\cancel{h_{21}}} \Rightarrow \boxed{h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = 1}$

Como además debe ser recíproco $\Rightarrow \boxed{h_{11}h_{22} + h_{12}^2 = 1}$ y vemos que resultan dos parámetros para la descripción.

Problema 2: (2)

ⓐ



$$\mathcal{F}[p_T(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} p_T(t)\, e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi f t}\,dt = \left.\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f}\right|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}}{\pi f\, 2j} = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}$$

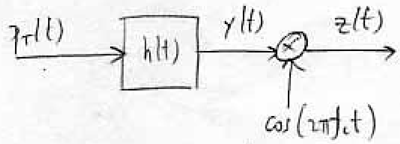
$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}[p_T(t)] = T\,\mathrm{sinc}(fT)}$$

ⓑ De la parte anterior sabemos que $f_0\,\mathrm{sinc}(f_0 t) = \mathcal{F}[p_{f_0}(f)]$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[f_0\,\mathrm{sinc}(f_0 t)] = \mathcal{F}[\mathcal{F}[p_{f_0}(t)]] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[p_{f_0}(t)]\, e^{-j2\pi f t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[p_{f_0}(t)]\, e^{j2\pi(-f)t}\,dt$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Fórmula de inversión}}}{=} p_{f_0}(-f) \underset{\substack{\uparrow \\ p_{f_0}(t) \text{ función par}}}{=} p_{f_0}(f) \qquad \Rightarrow \boxed{\mathcal{F}[f_0\,\mathrm{sinc}(f_0 t)] = p_{f_0}(f)}$$

ⓒ

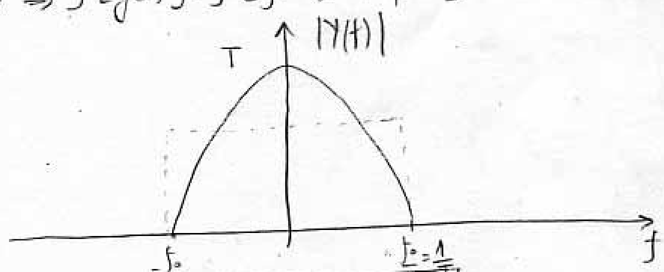


$f_0 \ll f_c$, $h(t) = f_0\,\mathrm{sinc}(f_0 t)$, $f_0 = \frac{2}{T}$

$$y(t) = h(t) * p_T(t) = f_0\,\mathrm{sinc}(f_0 t) * p_T(t) \Rightarrow \mathcal{F}[y(t)] = \mathcal{F}[f_0\,\mathrm{sinc}(f_0 t) * p_T(t)] = \mathcal{F}[f_0\,\mathrm{sinc}(f_0 t)]\cdot\mathcal{F}[p_T(t)]$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[y(t)] = p_{f_0}(f)\; T\,\mathrm{sinc}(fT)$$

El filtro solo deja pasar el lóbulo principal del sinc



ⓓ

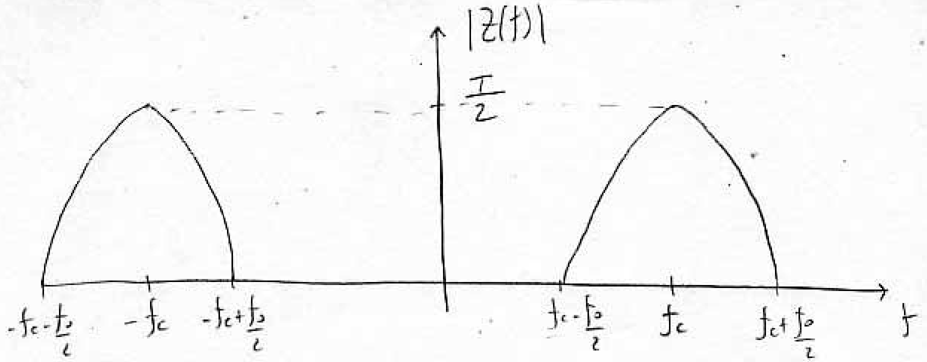
$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\,dt = \left.\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-j2\pi f t}\,dt\right|_{f=0} = Y(f)\Big|_{f=0} \Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\,dt = T}$$

ⓔ $z(t) = y(t)\cos(2\pi f_c t)$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[z(t)] = \mathcal{F}[y(t)\cos(2\pi f_c t)] = \mathcal{F}[y(t)] * \mathcal{F}[\cos(2\pi f_c t)]$$

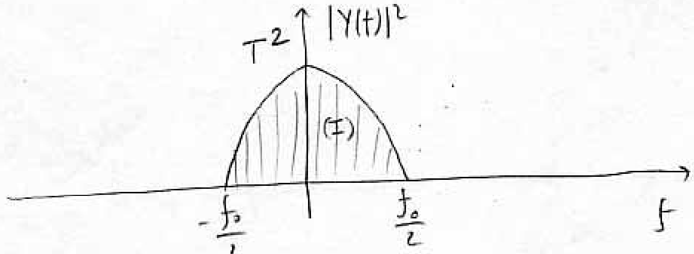
$$= Y(f) * \frac{\delta(f-f_c) + \delta(f+f_c)}{2} = \frac{Y(f-f_c) + Y(f+f_c)}{2}$$

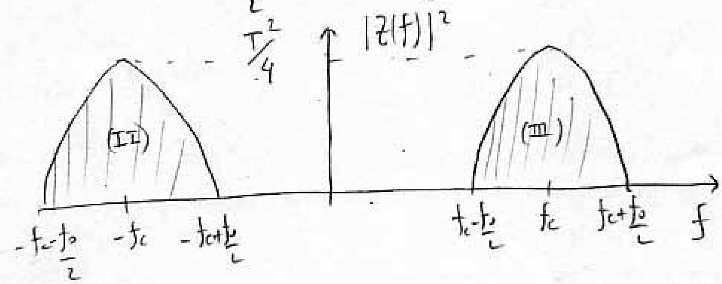
3



(f) $E_Y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt \underset{\uparrow\ \text{Parseval}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df$

Análogamente, $E_Z = \int_{-\infty}^{\infty} |z(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |Z(f)|^2 df$





$E_Y = \text{Área}_{(I)}$,

$E_Z = \text{Área}_{(II)} + \text{Área}_{(III)} = 2\,\text{Área}_{(II)}$

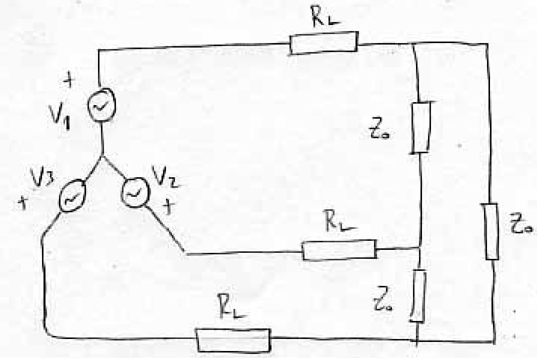
Además claramente se tiene que $\text{Área}_{(I)} = 4\,\text{Área}_{(II)}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{E_Y}{E_Z} = 2}$

Problema 3: (4)

ⓐ Sea un sistema polifásico de fuentes que puede no ser ni perfecto ni equilibrado. Dicho sistema de fuentes alimenta una carga cualquiera, con la única restricción de que si está conectada en estrella, no debe existir hilo neutro. Sea X un punto de referencia cualquiera y sea U_{jx} la diferencia de tensión entre la línea j y el punto X. Entonces la potencia activa total consumida a las fuentes es: $P = Re\left[\sum_{j=1}^{N} U_{jx}\,\bar{I}_j\right]$ donde I_j es la corriente por la línea j.

ⓑ



$v_1(t) = 220\sqrt{2}\cos(100\pi t)$

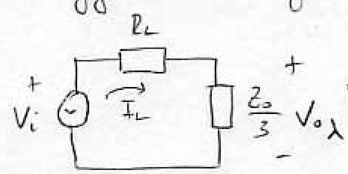
$v_2(t) = 220\sqrt{2}\cos(100\pi t + \frac{2\pi}{3})$

$v_3(t) = 220\sqrt{2}\cos(100\pi t + \frac{4\pi}{3})$

$R_L = 2\Omega$, $R_1 = 80\Omega$, $L_1 = 60\,mHy$

$Z_o = R_1 + L_1 jw$

(i) Transformando la carga en triángulo, obtenemos el equivalente monofásico de la instalación



$\Rightarrow I_L = \dfrac{V_i}{R_L + \frac{R_1 + L_1 jw}{3}} \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 &= 7{,}49A \angle -12{,}36^\circ \\ I_2 &= 7{,}49\,A \angle -12{,}36 + 120^\circ \\ I_3 &= 7{,}49A \angle -12{,}36^\circ + 240^\circ \end{aligned}}$$

Las expresiones temporales son:

$$\boxed{\begin{aligned} i_1(t) &= \sqrt{2}\,7{,}49A\cos(100\pi t - 0{,}216) \\ i_2(t) &= \sqrt{2}\,7{,}49\,A\cos(100\pi t - 0{,}216 + \tfrac{2\pi}{3}) \\ i_3(t) &= \sqrt{2}\,7{,}49\,A\cos(100\pi t - 0{,}216 + \tfrac{4\pi}{3}) \end{aligned}}$$

(ii) Hallaremos el módulo de la tensión $V_{o\lambda}$ aplicada a la carga del equivalente, sabiendo que la tensión real aplicada a la carga en triángulo será $|V_{o\Delta}| = \sqrt{3}\,|V_{o\lambda}|$

Del divisor de tensiones : $|V_{o\lambda}| = \dfrac{|Z_o|\,|V_i|}{|Z_o + 3R_L|} \Rightarrow |V_{o\lambda}| = 205{,}4V$

$\Rightarrow \boxed{|V_{Z_o\Delta}| = 355{,}7\ V}$

(5)

(iii) $P = 3\,\mathrm{Re}[V_i \bar{I}_{L_i}] \Rightarrow \boxed{P = 4833\,W}$

$Q = 3\,\mathrm{Im}[V_i \bar{I}_{L_i}] \Rightarrow \boxed{Q = 1059\,V_{ar}}$

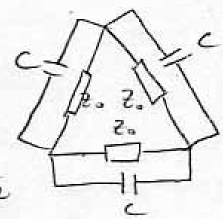
Otra forma: $P = 3\left[R_L + \frac{R_1}{3}\right]|I_L|^2$

$Q = 3 \cdot \frac{L_1 w}{3} |I_L|^2$

ó usando Blondell.

(iv) Compenso a nivel local:

Utilizo condensadores pues la carga es inductiva. Siendo R_L puramente resistiva, para la compensación basta con imponer que $\mathrm{Im}\left[\frac{1}{Cjw} // Z_0\right] = 0$



$$\Rightarrow \frac{1}{Cjw} // R_1 + L_1 jw = \frac{R_1 + L_1 jw}{R_1 Cjw + L_1 C (jw)^2 + 1} = \frac{(R_1 + L_1 jw)(1 - L_1 C w^2 - R_1 Cjw)}{(1 - L_1 C w)^2 + (R_1 C w)^2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}\left[\frac{1}{Cjw} // R_1 + L_1 jw\right] = \frac{L_1 w (1 - L_1 C w^2) - R_1^2 C w}{(1 - L_1 C w)^2 + (R_1 C w)^2}$$

Impongo $\mathrm{Im}\left[\frac{1}{Cjw} // R_1 + L_1 jw\right] = 0 \Rightarrow L_1 = C\left[L_1^2 w^2 + R_1^2\right]$

$$\Rightarrow C = \frac{L_1}{(L_1 w)^2 + R_1^2} \Rightarrow \boxed{C = 8{,}8\,\mu F}$$

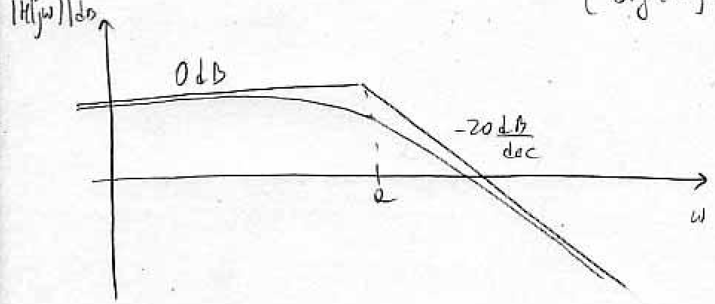
(6)

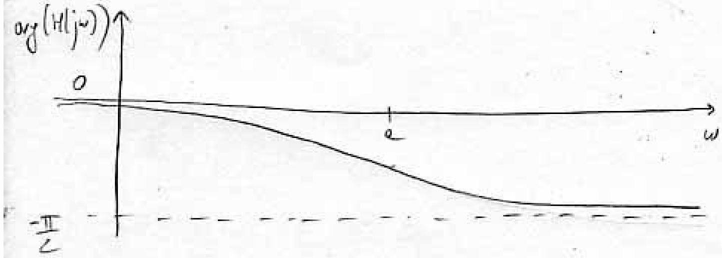
Problema 4:

ⓐ Sea $H(j\omega) = \dfrac{a}{j\omega + a}$

(i) Para $\omega << a \Rightarrow H(j\omega) \simeq 1 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq 0\,dB \\ \arg(H(j\omega)) \simeq 0 \end{cases}$

Para $\omega >> a \Rightarrow H(j\omega) \simeq \dfrac{a}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq 20\log a - 20\log \omega \; dB \\ \arg(H(j\omega)) \simeq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$





(ii) $|H(ja)|_{dB}^{asín} - |H(ja)|_{dB}^{real} = 20\log \left| \dfrac{H(ja)_{asín}}{H(ja)_{real}} \right|$ $\quad |H(ja)|_{asín} = 1$ $\quad |H(ja)|_{real} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \boxed{Dist_a = 20\log \sqrt{2} \simeq 3\,dB}$

(iii) Buscamos hallar el mínimo en ω de la cantidad $M(\omega) = \dfrac{|H(j\omega)_{real}|}{|H(j\omega)_{asín}|}$

que nos permite ver el mínimo en dB ya que la función $20\log(x)$ es monótona creciente. Recordar que la distancia siempre será negativa. Por eso busco mínimo.

$|H(j\omega)|_{real} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$, $|H(j\omega)|_{asín} = \begin{cases} 1, & \omega \leq a \\ \frac{a}{\omega}, & \omega > a \end{cases}$

Para $\omega \leq a$, $M(\omega) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$ y siendo el radicando monótono creciente, la función $M(\omega)$ es monótona decreciente en el intervalo.

Para $\omega > a$, $M(\omega) = \dfrac{\omega}{\sqrt{a^2+\omega^2}} \Rightarrow M'(\omega) = \dfrac{\sqrt{a^2+\omega^2} - \frac{\omega^2}{\sqrt{a^2+\omega^2}}}{a^2+\omega^2} = \dfrac{a^2}{(a^2+\omega^2)^{3/2}} > 0$ en todo el intervalo

Por lo tanto es monótona creciente en el intervalo $\Rightarrow$ Tengo mínimo en $\omega = a$ como quería.

7

(iv) $H(j\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha + j\alpha} = \frac{1}{1+j} \Rightarrow \boxed{arg(H(j\alpha)) = -\frac{\pi}{4}}$

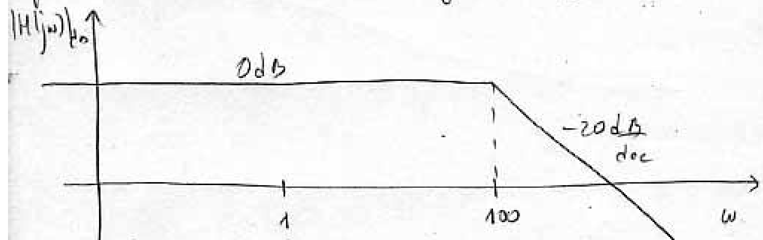
b) $H(j\omega) = \frac{-100\omega_0}{(j\omega + 100\omega_0)} \cdot \frac{(j\omega + \omega_0)}{(j\omega - \omega_0)}$

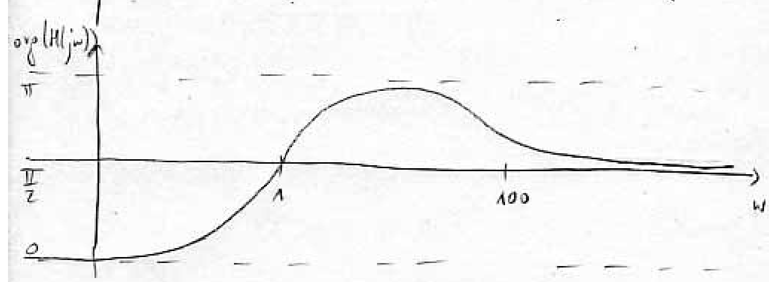
(i) Para $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \simeq 1 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq 0\,dB \\ arg(H(j\omega)) \simeq 0 \end{cases}$

Para $\omega_0 \ll \omega \ll 100\omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \simeq -1 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq 0\,dB \\ arg(H(j\omega)) \simeq \pi \end{cases}$

Para $\omega \gg 100\omega_0 \Rightarrow H(j\omega) \simeq -\frac{100\omega_0}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq 20\log 100\omega_0 - 20\log\omega \; dB \\ arg(H(j\omega)) \simeq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Notar que el salto se da de 0 a π (y no a $-\pi$) pues tanto el polo en $+\omega_0$ como el cero en $-\omega_0$ aportan cada uno un adelanto de fase de $\frac{\pi}{2}$





(ii) $x(t) = A\cos(100\omega_0 t) \Rightarrow v_0(t) = |H(j100\omega_0)| \cos(100\omega_0 t + arg(H(j100\omega_0)))$

Notando que el polo en $100\omega_0$ se encuentra a dos décadas del polo y cero en ω_0, podemos despreciar los efectos de los mismos y aproximar (con muy poco error) como un sistema de primer orden. $\Rightarrow H(j100\omega_0) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}$, $arg(H(j100\omega_0)) \simeq \frac{3\pi}{4}$

$$\Rightarrow \boxed{v_0(t) \simeq \frac{A}{\sqrt{2}} \cos\left(100\omega_0 t + \frac{3\pi}{4}\right)}$$