Sistemas Lineales 1
Primer parcial, 12de mayo 2007

Recomendaciones generales:

- **Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.**
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.**
- **Justificar claramente los pasos realizados para resolver los problemas.**
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- **Se recuerda que la prueba es individual.**
- **Al finalizar, colocar las hojas dentro del sobre amarillo y entregarlo al docente del salón.**

Problema 1 **(12 puntos)**

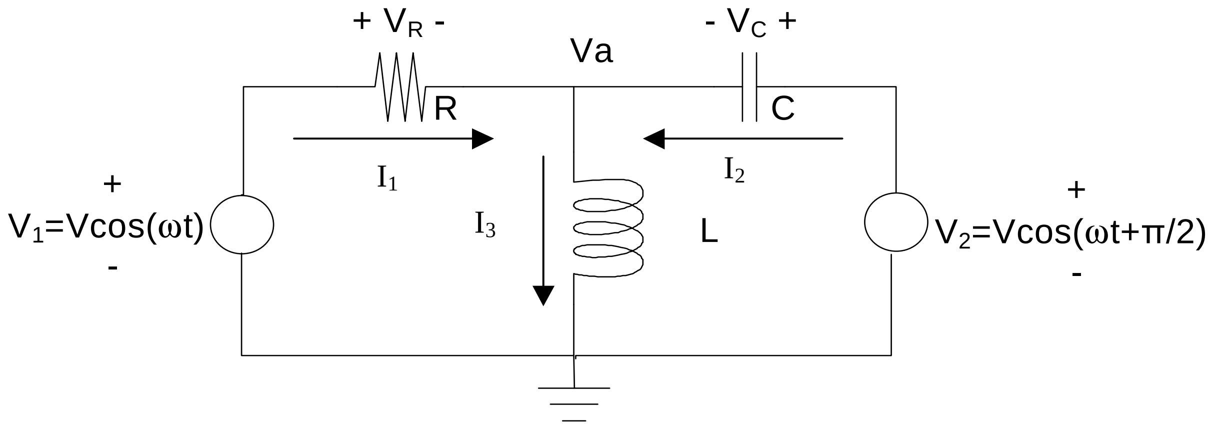


figura 1

a) En el circuito de la figura 1:

i) Calcular $V_a(j\omega)$ en función de V, L, R y C.

ii) Hallar ω en función de R y C para que V_a sea 0 para todo t.

En las partes siguientes los componentes del circuito tienen los siguientes valores:

$$V = 40 \text{ Volts}, \omega = 2000 \text{ rad/seg}, L = 10 \text{ mHy}, R = 100\Omega, C = 10\mu F$$

b) i) Calcular los fasores V_1, V_2, Va , I_1, I_2, I_3. Realizar un diagrama fasorial de V_1, V_2, Va, I_1, I_2, I_3. Enfatizar los ángulos notables.

ii) Calcular la corriente $i_1(t)$.

c) i) Calcular V_C y V_R. Realizar para cada componente (R, L y C), un diagrama fasorial del voltaje y la corriente que lo atraviesa.

ii) Calcular la potencia activa, reactiva y aparente consumida por R, L y C.

Problema 2 (9 puntos)

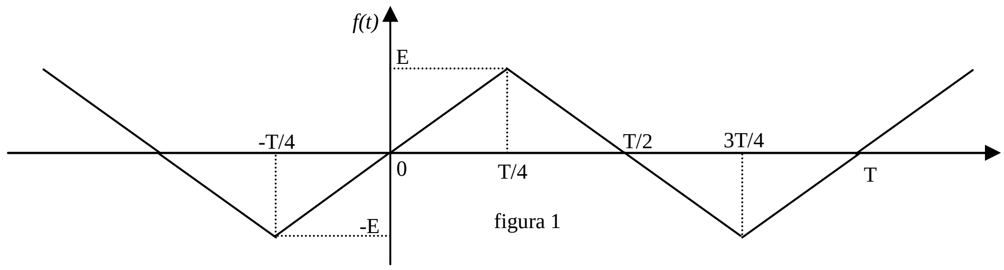


figura 1

a) Probar que si una **distribución** periódica $S \in D'$, de periodo T, verifica que $S(t+\frac{T}{2}) = -S(t)$, entonces su serie de Fourier no presenta armónicos pares.

Se considera la función *f(t)*, periódica de periodo *T*, que se muestra en la figura 1. Se pide:

b) **Bosquejar** las distribuciones T_f' y T_f'', derivadas primera y segunda de la función *f* como distribución.

c) Hallar los coeficientes de Fourier de T_f'', que denotaremos por $c_n(T_f'')$. Verificar que efectivamente la señal no presenta armónicos pares, que los coeficientes no nulos son imaginarios puros y que:

$$signo\left(\operatorname{Im}\left[c_{4n+1}(T_f'')\right]\right) = -signo\left(\operatorname{Im}\left[c_{4n+3}(T_f'')\right]\right).$$

d) Hallar los coeficientes de Fourier de *f*. Sabiendo que la potencia media ***Pm*** de *f* vale $\frac{E^2}{3}$, encontrar el número de primeros armónicos necesarios para obtener el 99% de la potencia media de la señal.

e) Se inyecta la señal *f(t)* en un filtro pasabajos ideal de frecuencia de corte ω_C. Hallar una relación entre dicha frecuencia y el periodo T que asegure que a la salida del pasabajos se obtenga en régimen una señal cuya potencia media sea al menos el 99% de la potencia media de *f(t)*.

Justificar claramente los pasos dados y las propiedades y resultados utilizados.

Problema 3 **(5 puntos)**

a) Definir la convergencia de distribuciones en D'.

Para cada n natural, consideremos el número $h_n = \frac{1}{n}$ y la distribución $T_n = \frac{\delta_{h_n} - \delta_{-h_n}}{2h_n}$.

b) Hallar $T \in D'$ tal que $\lim_{n\to+\infty} T_n = T$.

c) Sea $S \in D'$ la distribución asociada al pulso de amplitud 1 con soporte el intervalo [-1,1].

i) Hallar la distribución $R_n = S * T_n$. Representar gráficamente el resultado.

ii) Hallar la distribución $R = \lim_{n\to+\infty} R_n$. Representar gráficamente el resultado.

Problema 4 **(5 puntos)**

En el circuito en fasores de la figura 1,

a) Mostrar que los fasores V_R y V_X son perpendiculares.

b) Dibujar el diagrama fasorial para V, I, V_R, V_X, explicando las diferencias según que X sea:

i) Inductiva

ii) Capacitiva

c) Dibujando el fasor V_R a partir del origen del plano complejo, hallar y dibujar el lugar geométrico de su extremo al variar X en todo su rango.

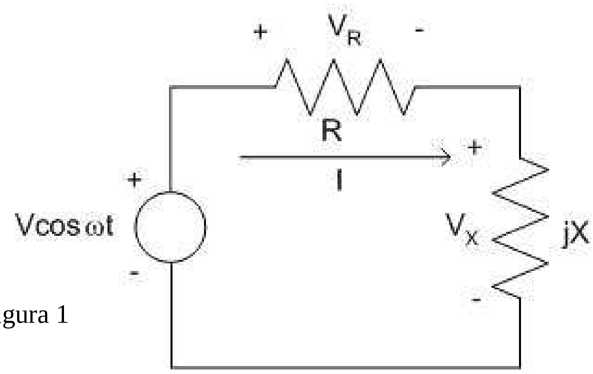


figura 1

(**Sugerencia:** no hacerlo de forma analítica, sino recordando el resultado geométrico del arco capaz o las propiedades de las transformaciones bilineales).

<u>Problema 5</u> **(9 puntos)**

a) En el circuito de la figura 1, hallar la ecuación diferencial que vincula $v_o(t)$ con $v_i(t)$.

Dato: g=1/R

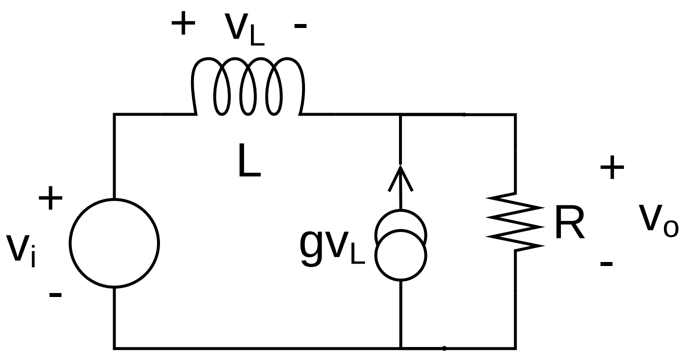


figura 1

b) Determinar dos distribuciones T y S tales que: $T*v_o = S*v_i$.

c) Hallar la respuesta al impulso del sistema, considerando como entrada v_i y como salida v_o.

d) Hallar la respuesta del sistema a la entrada $v_i(t) = 1V.Y(t).e^{-\frac{R}{2L}t}$.

Solución ejercicio 1

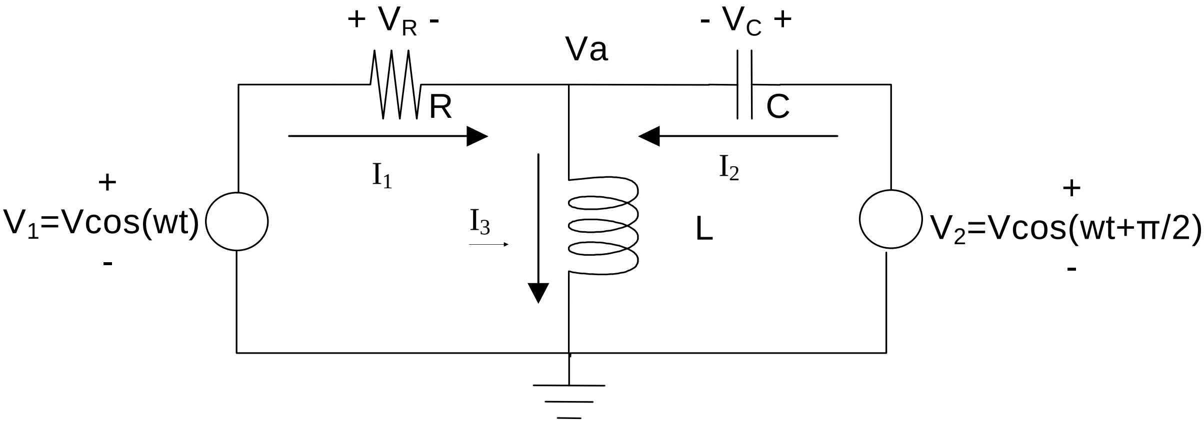


figura 1

a) En el circuito de la figura 1:
   i) Calcular $V_a(jw)$ en función de V, L, R y C.

Solución

Aplicando superposición al circuito de la figura 1, Va se puede calcular como la suma de los aportes de cada fuente por separado. De esta forma tomando los circuitos de las figuras 2 y 3, Va(jw) = Va1(jw) + Va2(jw). Observar que se puede realizar esta suma en fasores porque las frecuencias de ambas fuentes son iguales.

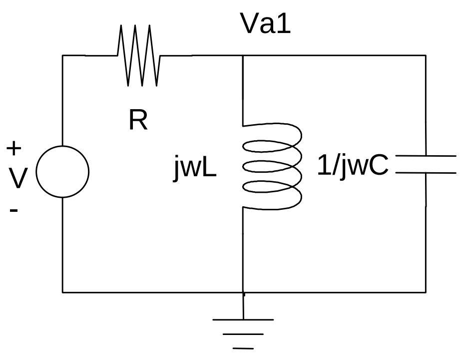


figura 2

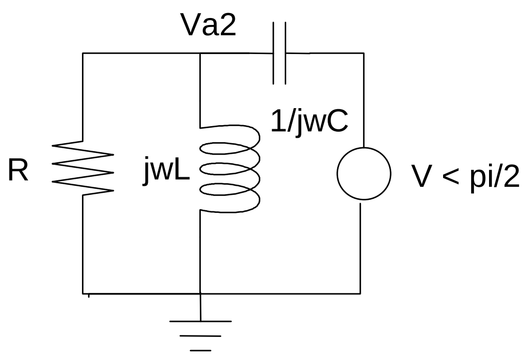


figura 3

Considerando en la figura 2 la impedancia equivalente de jwL y 1/jwC, y en la figura 3 la impedancia equivalente de R y jwL, se pueden calcular Va1 y Va2 aplicando divisores de tensión, resultando:

$$Z1 = (j\omega L)//\left(\frac{1}{j\omega C}\right) = \frac{j\omega L}{(j\omega)^2 LC + 1} \qquad Z2 = R//(jwL) = \frac{j\omega LR}{R + j\omega L}$$

$$Va(j\omega) = \frac{Z1}{R + Z1}V + \frac{Z2}{Z2 + 1/jwC}V < \pi/2 \qquad \boxed{Va(j\omega) = \frac{(j\omega)L[1 - \omega RC]}{(j\omega)^2 LRC + j\omega L + R}V}$$

ii) Hallar ω en función de R y C para que Va sea 0 para todo t.

Solución

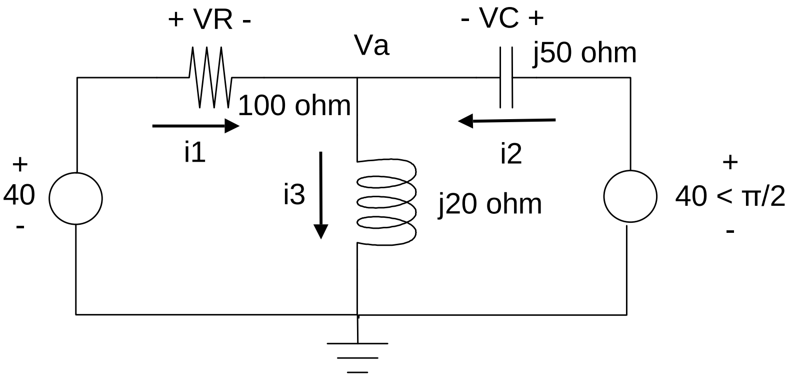
Si pasamos al tiempo la solución hallada en la pare anterior, tenemos:
Va(t) = A cos (ωt +φ) donde A es el módulo y φ la fase de Va (jω).
Para que Va sea 0 para todo t, se debe cumplir que A = 0, esto se logra anulando el numerador en la expresión Va(jω), por lo tanto $\omega = \dfrac{1}{RC}$

En las partes siguientes los componentes del circuito tienen los siguientes valores:
V = 40 Volts, ω = 2000 rad/seg, L = 10 mHy, R = 100Ω, C = 10μF

b) i) Calcular los fasores V_1, V_2, Va , I_1, I_2, I_3. Realizar un diagrama fasorial de V_1, V_2, Va, I_1, I_2, I_3.

Solución

Con los datos anteriores el circuito queda:



Donde
Va = 12.6 V < -108.4º = -3.98 - j11.95 V
V_1 = 40 V
V_2 = j 40 V = 40 V < 90º

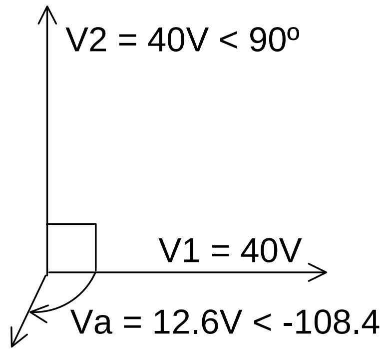
Hay que calcular I_1, I_2 e I_3:

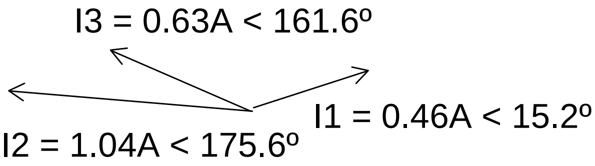
$$I_1 = \frac{V_R}{R} = \frac{(40 + 3.98 + j11.95)V}{100\Omega} = 0.46A < 15.2^{o}$$

$$I_2 = \frac{V_C}{1/j\omega C} = j0.02\left(1/\Omega\right)(j40 + 3.98 + j11.95)V = 1.04A < 175.6^{o}$$

$$I_3 = \frac{V_a}{j\omega L} = \frac{12.6V < -108.4^{o}}{20\Omega < 90^{o}} = 0.63A < 161.6^{o}$$

Diagramas fasoriales:





iii) Calcular $i_1(t)$

Solución

Pasando al tiempo los fasores I_1, I_2, e I_3 ($i(t) = \mathrm{Re}[I\, e^{j\omega t}]$), se tiene:

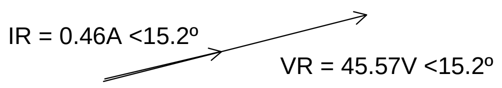
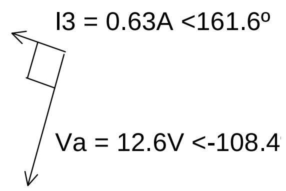
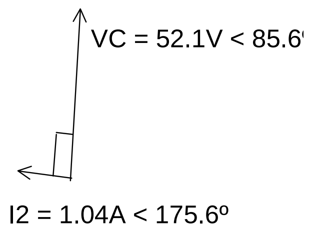
$$\boxed{\begin{array}{l} i_1(t) = 0.46 \cos(2000t + 0.27)\ A \\ i_2(t) = 1.04 \cos(2000t + 3.06)\ A \\ i_3(t) = 0.63 \cos(2000t + 2.82)\ A \end{array}}$$

c) i) Calcular V_C y V_R. Realizar para cada componente (R, L y C), un diagrama fasorial del Voltaje y la corriente que lo atraviesa.

Solución

$$\boxed{\begin{array}{l} V_C = V_2 - V_a = (3.98 + j51.95)V = 52.10V < 85.6^{\circ} \\ V_R = V_1 - V_a = (43.98 + j11.95)V = 45.57V < 15.2^{\circ} \end{array}}$$

Diagramas fasoriales por componente:

		
Resistencia	Inductancia	Condensador

ii) Calcular la potencia activa, reactiva y aparente consumida por R, L y C

Solución

Observando que la resistencia solo consume potencia activa, y la bobina y el condensador solo consumen o entregan reactiva, y utilizando que:

$$S = \frac{V\,\bar{I}}{2} \qquad P = \mathrm{Re}\left[\frac{V\,\bar{I}}{2}\right] \qquad Q = \mathrm{Im}\left[\frac{V\,\bar{I}}{2}\right]$$

Se obtiene la siguiente tabla

	Potencia activa (Watts)	Potencia reactiva (VAr)	Potencia aparente (VA)
Resistencia	10.4	0	10.4
Inductancia	0	4	j4
Capacitor	0	- 27.2	-j27.2

Fuera de letra:

Se calcula la potencia entregada por las fuentes:

	Potencia activa (Watts)	Potencia reactiva (VAr)	Potencia aparente (VA)
Fuente 1	-8.8	2.4	-8.8 + j2.4
Fuente 2	-1.6	20.8	-1.6 + j20.8

Haciendo un balance de potencia se ve claramente que la suma de las potencias es 0.

SOLUCIÓN DEL EJERCICIO 2 DEL PRIMER PARCIAL, 2007

PABLO MONZÓN

Parte a)

7 Sea $S(t) \in \mathcal{D}'$ una distribución periódica, de periodo T, tal que

$$S(t+\frac{T}{2}) = -S(t)$$

Dicha propiedad la cumple también la distribución $\tilde{S}(s) \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ que representa a S en un periodo. Definamos la pulsación $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Por definición de coeficiente de Fourier, tenemos que

$$c_n(S) = \frac{1}{T}\left\langle \tilde{S}(s), e^{-jn\omega s}\right\rangle = -\frac{1}{T}\left\langle \tilde{S}(s+\frac{T}{2}), e^{-jn\omega s}\right\rangle = -\frac{1}{T}\left\langle \tilde{S}(u), e^{-jn\omega\left(s-\frac{T}{2}\right)}\right\rangle$$

donde en la última igualdad hemos realizado el cambio de variable $u = s+\frac{T}{2}$. Aplicando linealidad y considerando nuevamente la definición de coeficiente de Fourier, llegamos a que

$$c_n(S) = -\frac{1}{T}.e^{jn\omega\frac{T}{2}}.\left\langle \tilde{S}(u), e^{-jn\omega u}\right\rangle = -\frac{1}{T}.e^{jn\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}}.\left\langle \tilde{S}(u), e^{-jn\omega u}\right\rangle = (-1)^{n+1}.c_n(S)$$

Por lo que para n par, se concluye que $c_n(S) = 0$.

Partes b) y c)

Derivemos la función f, que se muestra en la figura 1-a) como distribución. Al ser f una función continua, su derivada como distribución (T_f') coincidirá con la distribución asociada a la derivada de f como función en los puntos donde es derivable ($T_{f'}$). La gráfica de la figura 1-b) muestra que T_f' es la distribución asociada a una onda cuadrada que oscila entre los valores $\pm\frac{4E}{T}$. La derivada segunda de f como distribución se obtiene entonces derivando T_f'. Como T_f' es la distribución asociada a una función seccionalmente constante, tenemos que T_f'' contiene sólo deltas de Dirac en los puntos de discontinuidad de la onda cuadrada. El resultado se muestra en la figura 1-c). La distribución de $\mathcal{D}'(\Gamma)$ asociada a T_f'' es

$$\tilde{T}_f''(s) = -\frac{8E}{T}\delta\left(s-\frac{T}{4}\right) + \frac{8E}{T}\delta\left(s-\frac{3T}{4}\right)$$

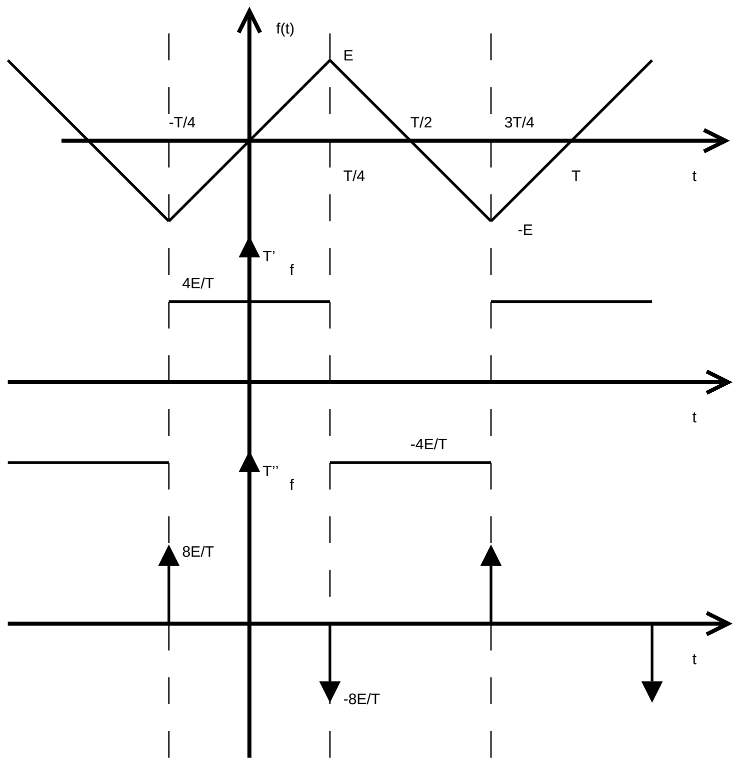
El respectivo coeficiente de Fourier es

$$c_n\left(T_f''\right) = \frac{1}{T}\left\langle \tilde{T}_f''(s), e^{-jn\omega s}\right\rangle = \frac{8E}{T^2}\left[-e^{-jn\omega\frac{T}{4}} + e^{-jn\omega\frac{3T}{4}}\right]$$

$$c_n\left(T_f''\right) = \frac{8E}{T^2}\left[-e^{-jn\frac{\pi}{2}} + e^{+jn\frac{\pi}{2}}\right] = 2j.\frac{8E}{T^2}.\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = (j)^n.\frac{8E}{T^2}.\left[1-(-1)^n\right]$$

Verificamos que los coeficientes pares se anulan, lo cual es coherente con lo visto en la parte **(a)**. Además, observemos que

$$(j)^{4n+1} = j \quad , \quad (j)^{4n+3} = -j$$



Parte d)

De la propiedad de los coeficientes de Fourier para distribuciones

$$c_n(T') = (jn\omega)c_n(T)$$

obtenemos que

$$c_n(f) = \frac{c_n(T''_f)}{-n^2\omega^2} = \frac{T^2.c_n(T''_f)}{-4n^2\pi^2}$$

El valor medio de f es cero, ya que el gráfico de f es simétrico respecto del eje de abscisas. Los coeficientes pares de f se anulan pues también lo hacen los de T''_f. Finalmente, los restantes coeficientes de Fourier valen

$$c_{4n+1}(f) = -j\frac{4E}{(4n+1)^2\pi^2} \quad , \quad c_{4n+3}(f) = +j\frac{4E}{(4n+3)^2\pi^2}$$

La potencia que *transportan* los primeros N armónicos de la señal f viene dada por

$$P_N = \sum_{n=-N}^{n=N} |c_n(f)|^2$$

Como f es una señal real, entonces $|c_n| = |c_{-n}|$, de donde

$$P_N = 2.\sum_{n=1}^{n=N} |c_n(f)|^2$$

Comencemos con el primer armónico.

$$P_1 = 2.|c_1(f)|^2 = 2.\frac{16E^2}{\pi^4} = 0{,}329E^2 = 98{,}5\,\%P_m$$

Como no hay armónicos pares, $P_2 = P_1$. Sigamos con P_3:

$$P_3 = 2.\left[|c_1(f)|^2 + |c_3(f)|^2\right] = 2.\frac{16E^2}{\pi^4}\left(1 + \frac{1}{81}\right) = 99{,}77\,\%P_m$$

Entonces, necesitamos al menos hasta el tercer armónico.

Parte e)

El filtro pasabajos ideal *dejará pasar*[1] sólo las frecuencias menores a su frecuencia de corte ω_C. Por lo tanto, para tener a la salida del filtro una señal cuya potencia media sea al menos el 99 % de la potencia media de $f(t)$, de las infinitas frecuencias presentes en ésta, deberán pasar por lo menos la fundamental y el tercer armónico (ver parte **d)**). Entonces, se debe cumplir la relación

$$3\omega = \frac{6\pi}{T} < \omega_C$$

[1] *Dejar pasar* significa que estas frecuencias aparecerán a la salida con la misma amplitud que tienen a la entrada.

Ejercicio de Teoría de Distribuciones y Convolución.

1. Definir convergencia de distribuciones en $\mathcal{D}'$.

2. Sea $h_n = 1/n$ y
$$T_n = \frac{\delta_{h_n} - \delta_{-h_n}}{2h_n}$$
Hallar $T \in \mathcal{D}'$ tal que $T = \lim_n T_n$.

3. Sea S la distribución asociada al pulso de amplitud 1 con soporte el intervalo $[-1, 1]$.
   a) Hallar la distribución $R_n = T_n * S$. Representar gráficamente el resultado
   b) Hallar la distribución $R = \lim_n R_n$. Representar gráficamente el resultado.

Solución:

1. Decimos que una sucesión $\{T_n\}$ con $T_n \in \mathcal{D}'$ converge a $T \in \mathcal{D}'$ (y escribimos $T = \lim_n T_n$ si y solo si $< T_n, \varphi > \rightarrow_n < T, \varphi > \ \forall \varphi \in \mathcal{D}$.

2. Observemos que, dada $\varphi \in \mathcal{D}$, se tiene que:
$$< T_n, \varphi > = < \frac{\delta_{h_n} - \delta_{-h_n}}{2h_n}, \varphi > = \frac{1}{2h_n} \left(\varphi(h_n) - \varphi(-h_n)\right)$$
Y como $h_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, el útlimo término es un cociente incremental que tiende a $\varphi'(0)$, ya que φ es infinitamente derivable. Por lo tanto:
$$< T_n, \varphi > \rightarrow_n \varphi'(0) = < -\delta', \varphi >$$
Por lo que $T = -\delta'$.

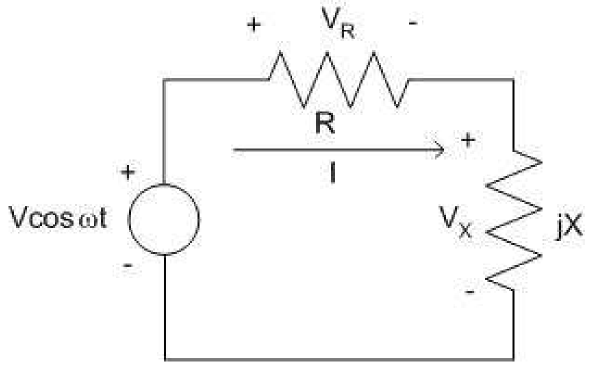
3. *a*) Sustituyendo T_n y aplicando propiedades de convolución:
$$T_n * S = \left(\frac{\delta_{h_n} - \delta_{-h_n}}{2h_n}\right) * S = \frac{1}{2h_n}(\delta_{h_n} * S) - \frac{1}{2h_n}(\delta_{-h_n} * S)$$
Utilizando que $\delta_a * S(t) = S(t-a)$ se tiene que:
   - $\frac{1}{2h_n}(\delta_{h_n} * S)$ es un pulso de amplitud $\frac{1}{2h_n} = \frac{n}{2}$ en el intervalo $[-1+1/n, 1+1/n]$.
   - $\frac{1}{2h_n}(\delta_{-h_n} * S)$ es un pulso de amplitud $\frac{1}{2h_n} = \frac{n}{2}$ en el intervalo $[-1-1/n, 1-1/n]$.

   Al hacer la diferencia de las dos distribuciones anteriores obtenemos que R_n consiste en la distribución asociada a la función:
$$f(t) = \begin{cases} -n/2 & \text{si } t \in [-1-1/n, -1+1/n] \\ n/2 & \text{si } t \in [1-1/n, 1+1/n] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   b) La distribución R puede hallarse pasando al límite en R_n obtenido en la parte anterior, o bien utilizando el hecho de que la convolución es una operación continua, por lo que:
$$R = \lim_n R_n = \lim_n (T_n * S) = (\lim_n T_n) * S = T * S = -\delta' * S$$
Al ser $\delta' * S = S' = \delta_{-1} - \delta_1$ (la derivada como distribución de S), se tiene que:
$$R = -\delta_{-1} + \delta_1$$

Solución Ejercicio 4 del primer parcial de 2007

a)



Calculando los fasores V_R y V_X, tenemos:

$$V_R = \frac{R}{R + jX} \qquad V_X = \frac{jX}{R + jX}$$ por lo que

$$\boxed{V_X = j\left(\frac{X}{R}\right)\frac{R}{R + jX} = j\left(\frac{X}{R}\right)V_R}$$

Donde se ve claramente que V_X y V_R están desfasados 90º (son perpendiculares).

b) i) Caso inductivo. El diagrama fasorial es el siguiente:

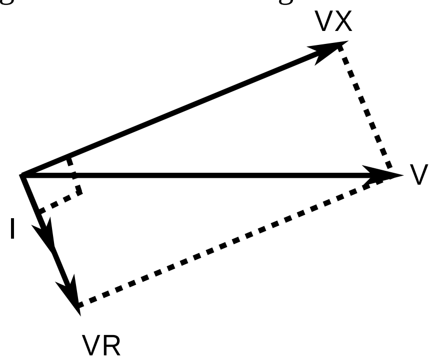


Figura 1

ii) Caso capacitivo. El diagrama fasorial es el siguiente:

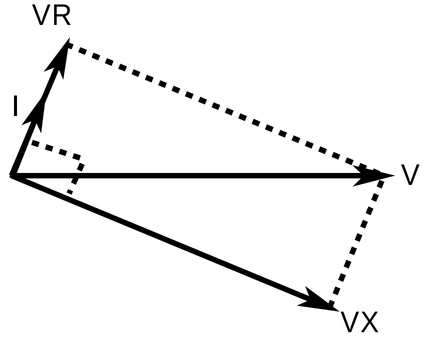
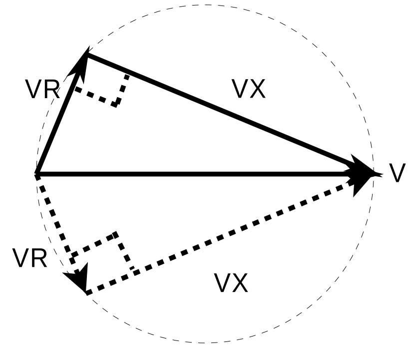


Figura 2

Analizando ambos diagramas se ve que en el caso de una impedancia inductiva la corriente se atrasa con respecto al voltaje y en el caso de una impedancia capacitiva la corriente se adelanta al voltaje. En la resistencia el voltaje y la corriente son colineales.

Esto se debe a que en cada componente $V_Z = ZI$, cuando Z = R (real) no se introduce ningún desfasaje por lo que V_Z e I son colineales, cuando Z= jX con X positivo (caso inductivo), se deben sumar 90º a I para encontrar la fase de V_Z, y cuando Z = -jX se deben restar 90º a I para encontrar la fase de V_Z.
En cuanto al desfasaje entre V e I, se observa que en un diagrama la corriente es el conjugado de la corriente en el otro diagrama, esto se debe a que arg(I) = arg(V)-arg(Z) = -arg(Z) ya que arg(V)=0 .
En el caso inductivo $\arg(I_I) = \operatorname{arctg}(X/R) > 0$ y en el caso capacitivo
$\arg(I_C) = \operatorname{arctg}(-X/R) < 0$. En las ecuaciones anteriores se puede ver que
$\arg(I_I) = -\arg(I_C)$ lo que corresponde a complejos conjugados.

c) En fasores $V = V_R + V_X$, además de la parte a) sabemos que V_R es perpendicular a V_X. Obteniéndose el siguiente diagrama fasorial, donde la línea continua representa el caso capacitivo y la punteada el inductivo:



Siguiendo el razonamiento anterior a medida que varía X entre $(-\infty, +\infty)$ V_R va describiendo la curva tal que el vector V se ve bajo un ángulo de 90º, este lugar geométrico es por definición el arco capaz correspondiente al vector V y un ángulo de 90º, además al ser el ángulo de 90º, V es un diámetro de dicha circunferencia.
Por lo dicho anteriormente: el lugar geométrico de los extremos de V_R que se obtienen al variar X en todo su rango es la circunferencia de centro V/2 (sobre el eje real) y radio V/2.

Solución primer parcial de Sistemas Lineales 1 2007

Andrés Alcarraz

3 de mayo de 2007

1. Ejercicio X

Parte a.

$$v_o = RG.v_L + R.i_L \quad \text{(Nudo y ley de Ohm)} \tag{1}$$

$$\frac{dv_o}{dt} = \frac{dv_L}{dt} + R.\frac{di_L}{dt} = \frac{dv_L}{dt} + R.\frac{v_L}{L} \quad \text{derivando al ecuación anterior, RG=1} \tag{2}$$

$$v_L = v_i - v_o \quad \text{(malla exterior)} \tag{3}$$

$$\frac{dv_o}{dt} = \frac{dv_i}{dt} - \frac{dv_o}{dt} + R.\frac{v_i - v_o}{L} \quad \text{(sustituyendo 3 en 2)} \tag{4}$$

$$\text{finalmente: } \boxed{2\frac{dv_o}{dt} + R\frac{v_o}{L} = \frac{dv_i}{dt} + R\frac{v_i}{L}}$$

Parte b.

Si definimos los operadores $D_1 = 2\frac{d}{dt} + \frac{R}{L}$ y $D_2 = \frac{d}{dt} + \frac{R}{L}$ tenemos que $D_1(v_o) = D_2(v_i)$, que por propiedades de la convolución y la δ es lo mismo que $D_1(\delta) * v_o = D_2(\delta) * v_i$. Por lo tanto $\boxed{T = 2\delta' + \frac{R}{L}\delta \text{ y } S = \delta' + \frac{R}{L}\delta}$.

Parte c.

La respuesta al impulso será $T^{-1} * S$ pues $v_o = T^{-1} * S * v_i$. Hallamos T^{-1}.

Por el teorema de la inversa T^{-1} será de la forma $T^{-1} = Y(t)f(t)$ con $f \in C^\infty$ y que cumpla la ecuación diferencia $2f' + \frac{R}{L}f = 0$ con condiciones iniciales $f(0) = \frac{1}{2}$.

Resolviendo la ecuación diferencial $f(t) = Ae^{-\frac{R}{2L}t}$ y al plantear las condiciones iniciales $f(0) = A = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto

$$T^{-1} = Y(t)\frac{e^{-\frac{R}{2L}t}}{2}$$

.

Ahora debemos convolucionar T^{-1} con S:

$$T^{-1} * S = Y(t)f(t) * (\delta' + \frac{R}{L}\delta) = \frac{dY(t)f(t)}{dt} + \frac{R}{L}Y(t)f(t)$$

.

$$= f(0)\delta + Y(t)f'(t) + \frac{R}{L}Y(t)f(t) = ,5\delta(t) + Y(t)\left(-\frac{R}{4L}e^{-\frac{R}{2L}t} + \frac{R}{2L}e^{-\frac{R}{2L}t}\right)$$

.

$$\Rightarrow h(t) = ,5\delta(t) + Y(t)\frac{R}{4L}e^{-\frac{R}{2L}t}$$

Y esta última expresión es la respuesta al impulso.

Parte d.

I.

Para hallar la respuesta al escalón hay que convolucionar la respuesta al impulso hallada en la parte anterior con el escalón:

$$h(t) * 1V.Y(t) = 1V\left(0{,}5\delta(t) * Y(t) + Y(t)\frac{R}{4L}e^{-\frac{R}{2L}t} * Y(t)\right)$$
$$= 1V.Y(t)\left(0{,}5 + \frac{R}{4L}\int_0^t e^{-\frac{R}{2L}u}du\right) = 1V.Y(t)\left(0{,}5 - 0{,}5\ e^{-\frac{R}{2L}u}\Big|_0^t\right)$$
$$= 0{,}5V.Y(t)\left(1 - \left(e^{-\frac{R}{2L}t} - 1\right)\right) = 0{,}5V.Y(t)\left(2 - e^{-\frac{R}{2L}t}\right)$$

II.

Al igual que en la parte anterior realizamos la convolución entre la entrada y $h(t)$:

$$h(t) * v_i(t) = \frac{v_i(t)}{2} + \frac{R}{4L}.Y(t)e^{-\frac{R}{2L}t} * v_i(t)$$

$$Y(t)e^{-\frac{R}{2L}t} * v_i(t) = Y(t)\int_0^t e^{-\frac{R}{2L}u}e^{-\frac{R}{2L}(t-u)}du$$

$$= Y(t)\int_0^t e^{-\frac{R}{2L}(t)}du = Y(t)e^{-\frac{R}{2L}t}\int_0^t du = Y(t)t.e^{-\frac{R}{2L}t}$$

O sea que

$$v_o(t) = 0{,}5VY(t)e^{-\frac{R}{2L}t}\left(1 + \frac{R}{2L}t\right)$$