Examen de Sistemas Lineales 1

3 de febrero del 2004

Se recuerda que para aprobar esta parte de la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente.

Ejercicio 1

a) i – En la Figura 1, calcule la impedancia vista Z_v.

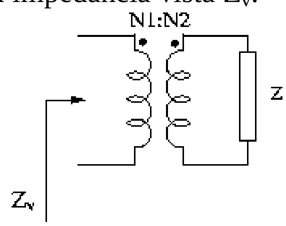


Figura 1

ii – En la Figura 2, hallar los fasores V'_1, V'_2 y V'_3 (en bornes de las bobinas del secundario) , en función de V_1, V_2 y V_3. Hallar los voltajes entre líneas (voltajes compuestos) si V_1, V_2 y V_3 valen:

$$V_1 = V\angle 0^\circ$$
$$V_2 = V\angle 120^\circ$$
$$V_3 = V\angle 240^\circ$$

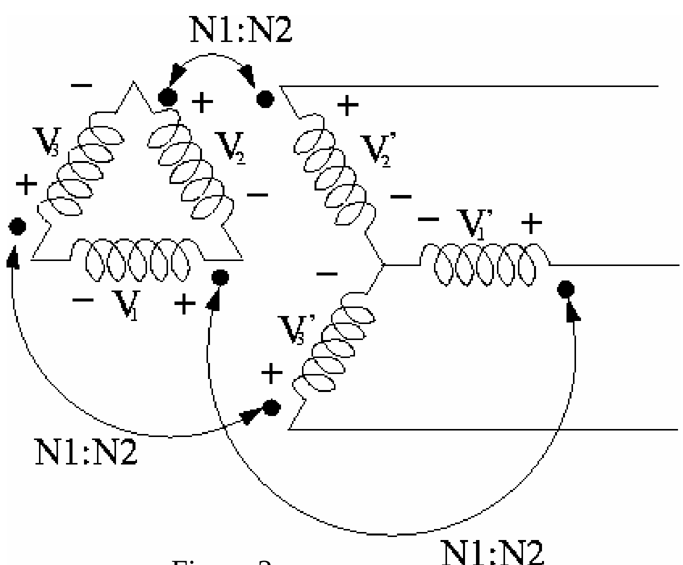


Figura 2

iii – Hallar z' para que los circuitos trifásicos de la Figura 3 sean equivalentes.

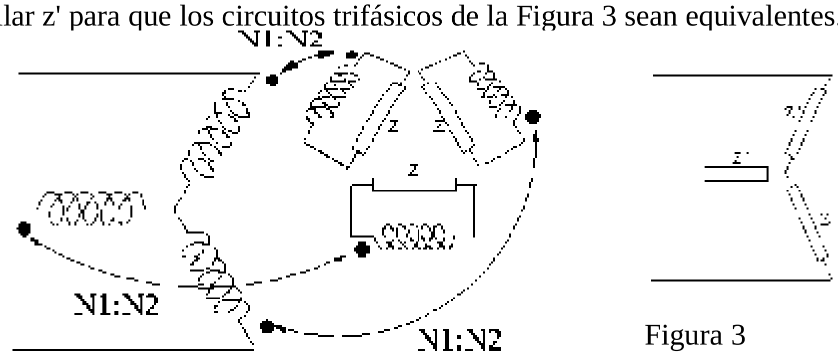


Figura 3

b) En esta parte, V_1, V_2 son como en la parte anterior:

i – En la Figura 4 hallar los módulos de las caídas de voltaje en las impedancias Z_T.

ii – Determinar en cuál de los dos circuitos la caída es menor asumiendo que el módulo de Z_T es mucho menor que el módulo de z y que n es mucho mayor que 1.

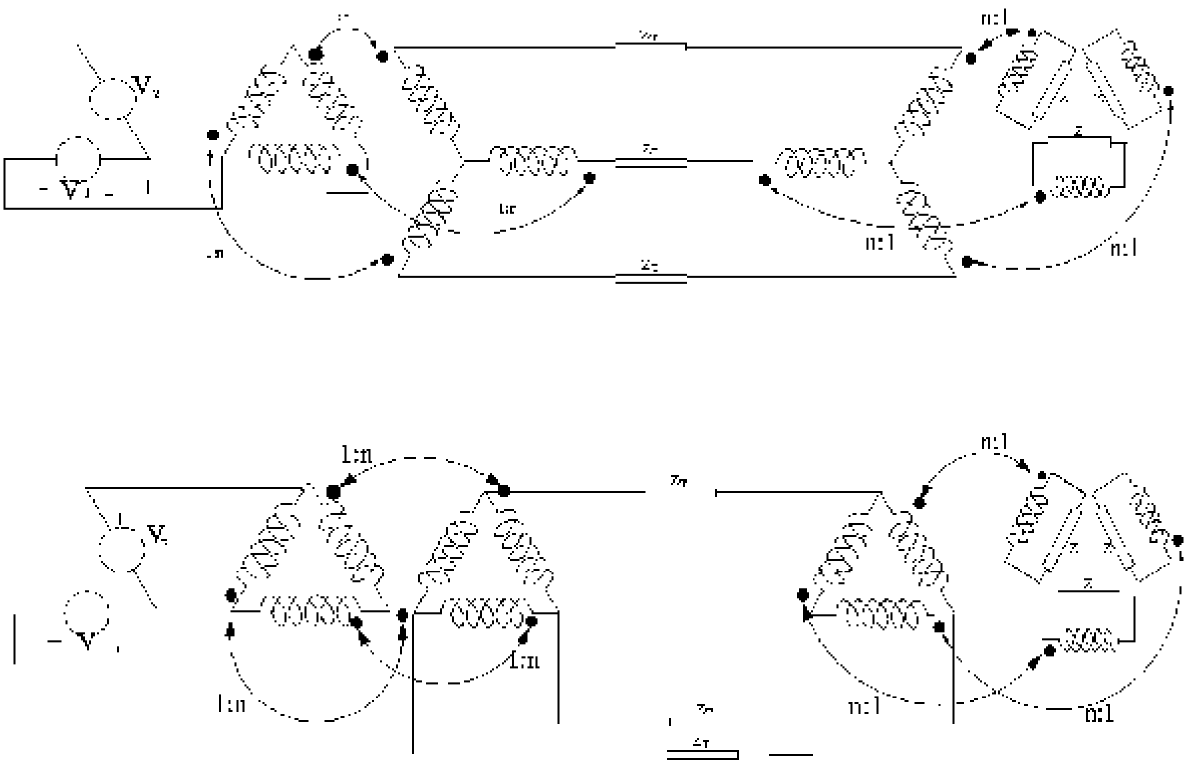


Figura 4

Ejercicio 2

Se considera un circuito eléctrico lineal e invariante en el tiempo, que debido a la complejidad de su estructura interna estudiaremos como una caja negra con terminales de entrada $v_i(t)$ y salida $v_o(t)$ como se muestra en la Fig. 1.

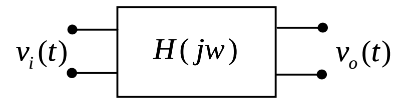


Figura 1

a) Suponiendo que se dispone de un generador de señales sinusoidales de amplitud y frecuencia regulables y de un osciloscopio con dos canales, explicar un método para relevar la transferencia del sistema $H(jw)$ (módulo y fase). **Indicar claramente las bases teóricas en las cuales se sustenta el método experimental propuesto.**[1]

b) Tras el relevamiento experimental de $H(jw)$, se obtuvieron los diagramas de Bode de la Fig. 2. Se sabe que es una muy buena aproximación para el análisis suponer que se trata de un sistema de segundo orden sin ceros de la forma $H(jw) = G_o \dfrac{w_n^2}{(jw)^2 + 2zw_n(jw) + w_n^2}$, siendo z y w_n reales no negativos.

- **i)** Calcular en función de z y w_n, el valor de la frecuencia w_r en el que se da el pico de resonancia. Dar la condición que debe cumplir z para que exista dicho pico y calcular $M_r = \left|H(jw)\right|_{w=w_r}$.
- **ii)** Deducir a partir de la forma cualitativa de los diagramas de Bode relevados y de los resultados de la parte anterior, que $H(jw)$ no puede tener polos reales. **Justificar.**
- **iii)** A partir de los diagramas de Bode, determinar completamente $H(jw)$, calculando G_o, z y w_n.

[1] Recordar que existen métodos clásicos (que no vienen al caso en este ejercicio) para medir el desfasaje entre las señales conectadas a cada canal del osciloscopio.

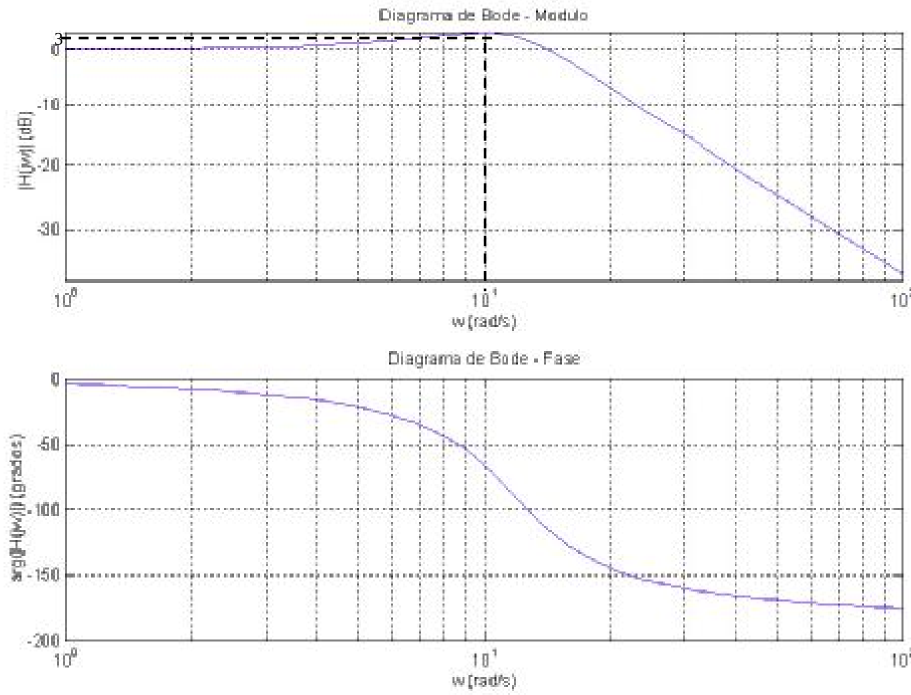


Figura 2

iv) Se considera la onda cuadrada $v_i(t)$, T-periódica, de la Fig. 3:

v) Hallar su representación en Series de Fourier.

vi) Si dicha señal se inyecta al sistema de transferencia $H(jw)$, hallar T para que la fundamental se amplifique lo más posible.

vii) Dar una expresión para la salida en régimen $v_o(t)$. **Justificar claramente las aproximaciones realizadas.**

viii) Calcular la relación entre las potencias medias de $v_o(t)$ y $v_i(t)$.

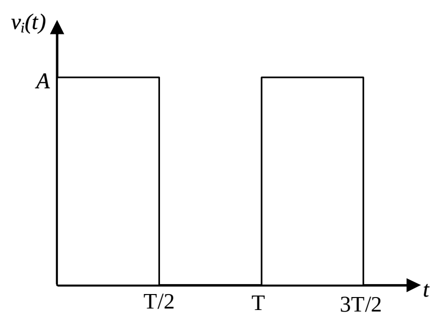


Figura 3

Examen de Sistemas Lineales 1
3 de febrero del 2004

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

a) En el divisor de voltaje de la Figura 1, en régimen sinusoidal (pulsación ω). A una pulsación ω dada, ¿qué condición deben cumplir Z_1 o Z_2 para que en P, el voltaje sea nulo?

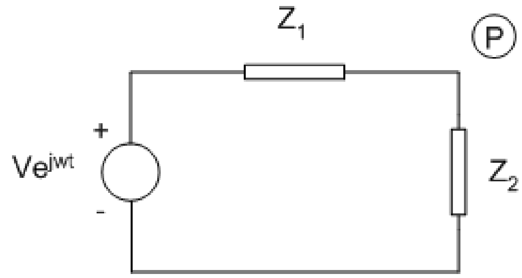


Figura 1

b) Se considera el circuito de la Figura 2, con fuentes sinusoidales de pulsaciones distintas ω_1 y ω_2. ¿Qué condiciones deben cumplir Z_1, Z_2, Z_3, o combinaciones sencillas de éstas (series, paralelos), para que el voltaje en P sea nulo?

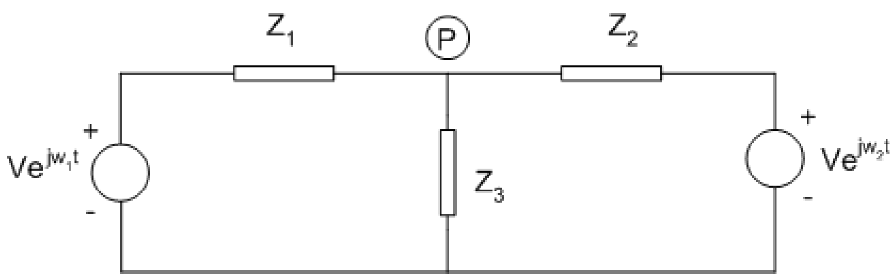


Figura 2

Se considera el circuito de la Figura 3.

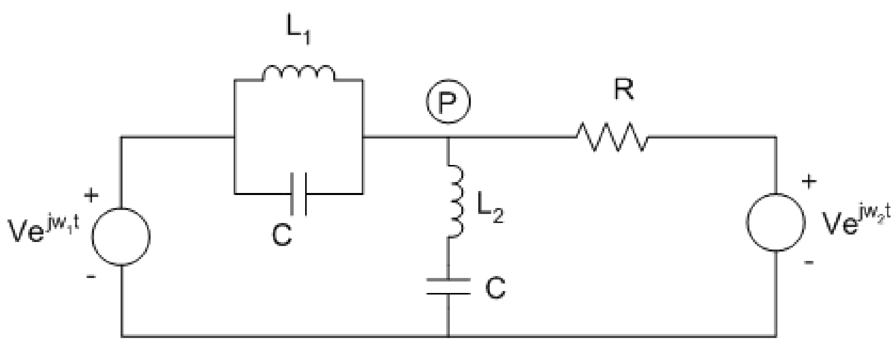


Figura 3

c) Verificar que es posible cumplir alguna de las condiciones de **b)**.

d) Si $\omega_2 = 2\omega_1$, y se dan ω_1 y C, hallar L_1 y L_2 para que el voltaje en P sea nulo.

Pregunta 2

a) Enunciar (sin demostrar) el teorema de la regularizada para el producto convolución de una distribución T y una función α. **Establecer con claridad las hipótesis y la tesis**.

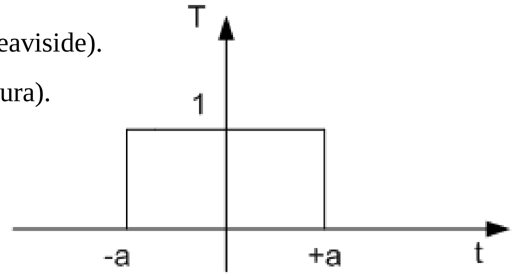
b) En los siguientes casos, decir en cuáles es aplicable dicho teorema.

$T * 1$ (Y es el escalón de Heaviside).

$T * Y$ (T es la dada en la figura).

$d * 1$

$d * Y$



c) En los 4 casos, hallar el producto convolución..

Pregunta 3

$$H(jw) = -\frac{(jw-1)^2}{(jw+0.1)\left(\frac{jw}{10}+1\right)}$$

a) Dibujar los Diagramas de Bode asintóticos de la siguiente transferencia, explicando claramente los pasos seguidos, **con particular énfasis en la determinación de las variaciones del Diagrama de fase**.

b) Deducir si existe o no una frecuencia de trabajo a la cual la salida en régimen se encuentre en fase con la señal de entrada y, en caso de existir, estimar su valor y plantear la ecuación que permitiría hallarla exactamente. **Justificar**.

Pregunta 4

a) Hallar la Transformada de Fourier (TdF) y la Transformada de Fourier Conjugada (TdFC) de la delta de Dirac, a partir de la definición para distribuciones cualesquiera.

b) A partir de la fórmula de inversión hallar la TdF de la función idénticamente igual a 1.

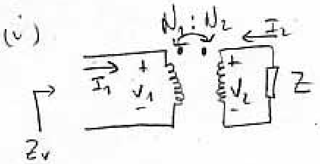
c) Sean *G(f)* la TdF de la función *g(t) y q* y f_C reales positivos. Hallar, **de al menos dos maneras diferentes**, la TdF de $g(t).cos(w_C\, t + q)$, $w_C=2pf_C$.

d) Calcuar la TdF de $Y(t).\ e^{-t}.sen(w_C\, t)$.

SISTEMAS LINEALES 1: FEBRERO 2004

Ejercicio 1:

a) (i)



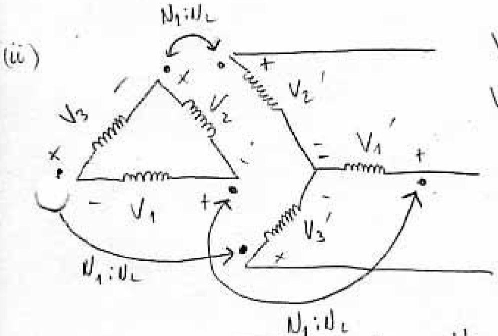
$Z_v = \frac{V_1}{I_1}$

Las relaciones del transformador ideal quedan: $\frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2}$

$I_1 N_1 = -I_2 N_2$

Por otro lado $V_2 = -I_2 Z \Rightarrow V_1 = \frac{N_1}{N_2} V_2 = \frac{N_1}{N_2} (-I_2 Z) = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z I_1 \Rightarrow \boxed{Z_v = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z}$

(ii)



$V_1 = V\angle 0°$

$V_2 = V\angle 120°$

$V_3 = V\angle 240°$

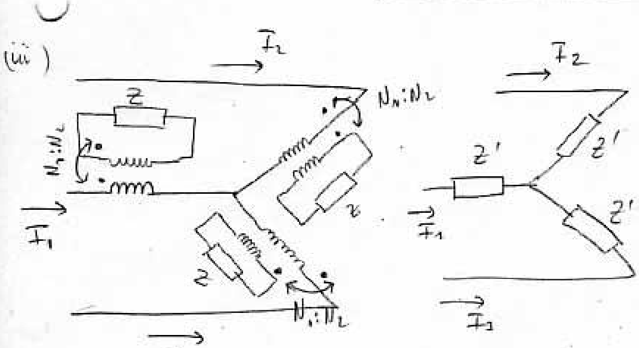
Nuevamente a partir de las ecuaciones del transformador ideal: $\frac{V_i'}{N_2} = \frac{V_i}{N_1}$ $i = 1, 2, 3$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} V_1' &= \frac{N_2}{N_1} V\angle 0 \\ V_2' &= \frac{N_2}{N_1} V\angle 120° \\ V_3' &= \frac{N_2}{N_1} V\angle 240° \end{aligned}}$$

Los voltajes entre líneas se obtienen directamente a partir de los de fase: $U_{ij} = V_i - V_j$

$$\boxed{\begin{aligned} U_{12} &= \sqrt{3}\,\frac{N_2}{N_1} V\angle 30° \\ U_{23} &= \sqrt{3}\,\frac{N_2}{N_1} V\angle 150° \\ U_{31} &= \sqrt{3}\,\frac{N_2}{N_1} V\angle 270° \end{aligned}}$$

(iii)

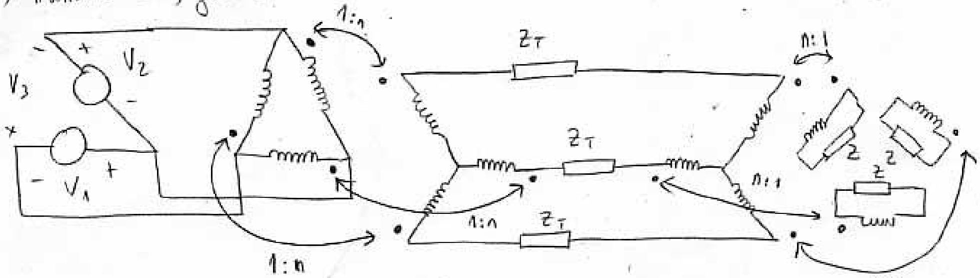


Si son equivalente $V_i = Z' I_i$ $i = 1, 2, 3$ debe ser igual a la tensión de fase en el primario de cada uno de los transformadores.

Como dichos bobinados están en estrella, estamos en la misma situación que en la parte a)(i)

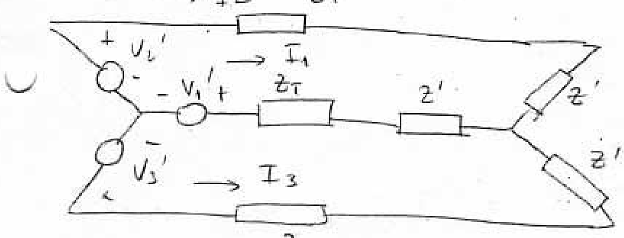
$$\Rightarrow \boxed{Z' = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z}$$

(b) (i) Primera configuración : ②



Notar en primer lugar, que aunque no haya una tercer fuente, debe tenerse por Kirchoff una tensión $V_3 = V\angle 240°$.

Usando las dos partes anteriores, el circuito es equivalente a:



con $V_1' = nV\angle 0°$

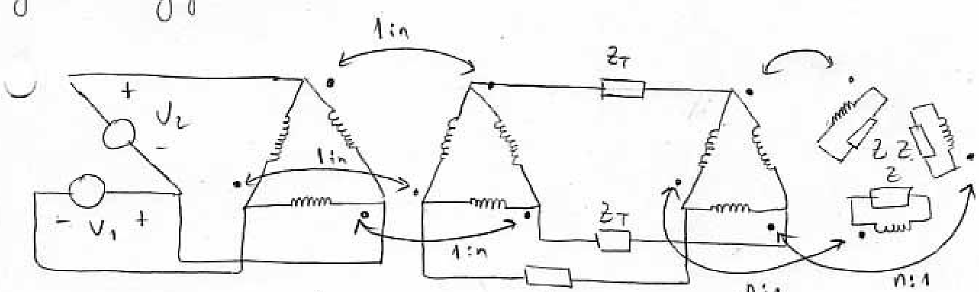
$V_2' = nV\angle 120°$

$V_3' = nV\angle 240°$

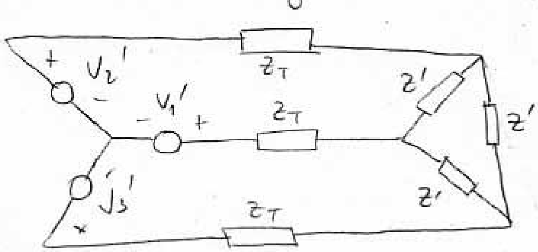
y $Z' = n^2 Z$

Del divisor de tensiones : $V_{Z_{T_i}} = \dfrac{Z_T}{Z_T + n^2 Z}\, n V_i \Rightarrow \boxed{|V_{Z_{T_i}}| = \left|\dfrac{Z_T}{Z_T+n^2 Z}\right| nV \quad i=1,2,3}$ ①

Segunda configuración :



Razonando de manera análoga al caso anterior, el circuito es equivalente a:



con $V_1' = \dfrac{nV}{\sqrt{3}} \angle -30°$

$V_2' = \dfrac{nV}{\sqrt{3}} \angle 90°$

$V_3' = \dfrac{nV}{\sqrt{3}} \angle 210°$

y $Z' = n^2 Z$

3

Transfigurando la carga Z' a una estrella y mediante el divisor de tensiones, obtenemos la caída de tensión en la impedancia Z_T

$$V_{Z_{T_i}} = \frac{Z_T}{Z_T + \frac{n^2 Z}{3}} \frac{n}{\sqrt{3}} V_i \Rightarrow \boxed{\left|V_{Z_{T_i}}\right|^{②} = \left|\frac{Z_T}{Z_T + \frac{n^2 Z}{3}}\right| \frac{nV}{\sqrt{3}} \quad i=1,2,3}$$

(ii) Si $n \gg 1$ y $|Z| \gg |Z_T|$

$$\Rightarrow \left|V_{Z_{T_i}}\right|^{①} \approx \left|\frac{Z_T}{Z}\right| \frac{V}{n}$$

$$\left|V_{Z_{T_i}}\right|^{②} \approx \left|\frac{Z_T}{Z/3}\right| \frac{V}{n\sqrt{3}} = \sqrt{3}\left|\frac{Z_T}{Z}\right|\frac{V}{n} = \sqrt{3}\left|V_{Z_{T_i}}\right|^{①} \Rightarrow \left|V_{Z_{T_i}}\right|^{①} < \left|V_{Z_{T_i}}\right|^{②}$$

La caída es menor para la primera configuración, por lo cual es más adecuada para la transmisión de potencia a la carga.

SISTEMAS LINEALES 1: FEBRERO 2004 (1)

Ejercicio 2:

(a) Para un sistema lineal e invariante en el tiempo de respuesta en frecuencia $H(j\omega)$, sabemos que la respuesta en régimen ante una entrada de la forma $v_i(t) = V_o \cos(\omega_o t + \varphi)$ es $v_o(t) = V_o |H(j\omega_o)| \cos(\omega_o t + \varphi + \arg(H(j\omega_o)))$

Por lo tanto, el cociente de amplitudes entre las señales resulta ser $|H(j\omega_o)|$ y el desfasaje entre ambas $\arg(H(j\omega_o))$.

Para hacer un relevamiento de $H(j\omega)$ basta con inyectar señales de la forma de $v_i(t)$ al sistema. Con el osciloscopio, se mide su amplitud. Luego en el otro canal del osciloscopio se conecta la salida del sistema $v_o(t)$. De igual forma se mide su amplitud y tomando el cociente de ambas medidas se tiene $|H(j\omega)|_{\omega=\omega_o}$. Variando ω_o con el generador de señales en un importante rango y repitiendo el proceso se obtiene un relevamiento de $|H(j\omega)|$ para dicho rango de frecuencias.

Para relevar el $\arg(H(j\omega))$ se hace algo similar, salvo que al ir variando la frecuencia se mide con el osciloscopio el desfasaje entre las señales en cada canal ($v_o(t)$ y $v_i(t)$). Sabemos que dicho desfasaje corresponde a $\arg(H(j\omega))$ en la frecuencia de trabajo.

(b) (i) $H(j\omega) = G_o \dfrac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n j\omega + \omega_n^2}$ $\quad \xi, \omega_n \geq 0, \quad G_o \in \mathbb{R}$

Para el pico de resonancia, busco un máximo en $|H(j\omega)|$. Notar que en los diagramas de Bode, también se observa un máximo pues $20 \log(x)$ es una función monótona.

En particular voy a buscar maximizar $|H(j\omega)|^2 = G_o^2 \dfrac{\omega_n^4}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2}$ lo que es equivalente a minimizar el denominador $D(\omega)$ como función de ω:

$$\Rightarrow D(\omega) = (\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2$$

$$\frac{dD(\omega)}{d\omega} = -4\omega(\omega_n^2 - \omega^2) + 8\xi^2\omega_n^2\omega^2 = 4\omega(2\xi^2\omega_n^2 - \omega_n^2 + \omega^2) = 0$$

$$\Rightarrow -\omega^2 = \omega_n^2(2\xi^2 - 1) \Rightarrow \boxed{\omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\xi^2}}$$

No es difícil verificar que efectivamente corresponde a un máximo. (2)

Para que exista dicho pico de resonancia se debe tener $1-2\zeta^2>0 \Rightarrow \boxed{\zeta<\frac{1}{\sqrt{2}}}$

Calculemos ahora el valor de dicho pico de resonancia, $M_r = |H(j\omega)|_{\omega=\omega_r}$

$$\Rightarrow M_r = \frac{G_0\,\omega_n^2}{\sqrt{\left(\cancel{\omega_n^2}+\omega_n^2(2\zeta^2-\cancel{1})\right)^2-4\zeta^2\omega_n^4(2\zeta^2-1)}} = \frac{G_0\,\omega_n^2}{\sqrt{-4\zeta^4\omega_n^4+4\zeta^2\omega_n^4}} = \frac{G_0\,\omega_n^2}{\sqrt{4\zeta^2\omega_n^4(1-\zeta^2)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_r = \frac{G_0}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

(ii) Observamos de los diagramas de Bode relevados que $H(j\omega)$ presenta un pico de resonancia, y por la parte anterior se deberá cumplir que $\zeta<\frac{1}{\sqrt{2}}$ (I)

Por otro lado, calculemos los polos del sistema: $s = \dfrac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2-4\omega_n^2}}{2}$

$\Rightarrow s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$

Para tener polos reales debe cumplirse $\zeta \geq 1$ (II).

(I) y (II) son incompatibles por lo cual el sistema debe tener polos complejos conjugados

(iii) Del Bode de módulo, vemos que $\omega_r = 10\,\frac{rad}{s}$ y $M_{r_{dB}} = 3\,dB \Rightarrow M_r = \sqrt{2}$

$\lim_{\omega\to 0}|H(j\omega)| = 0\,dB = 20\log G_0 \Rightarrow \boxed{G_0 = 1}$.

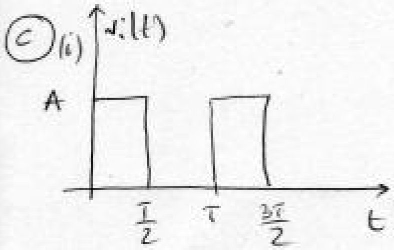
De las fórmulas obtenidas para M_r y ω_r, y operando un poco se obtienen los valores para ζ y ω_n (sistema de ecuaciones no lineales)

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\zeta = 0{,}382\\ \omega_n = 11{,}89\ rad/s\end{array}}$$

Notar que $\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$ como era de esperarse.

3

(c) (i)



Hallemos la representación de $v_i(t)$ en Series de Fourier.

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T v_i(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\,dt = \frac{A}{2} \Rightarrow \boxed{c_0 = \frac{A}{2}}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T v_i(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A\, e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}\,dt = -A\frac{e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}}{j2\pi n}\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{A}{j2\pi n}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{c_n = \begin{cases} \frac{A}{j\pi n} & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par}, n\neq 0 \end{cases}} \qquad \Rightarrow \boxed{v_i(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}}$$

(ii) Sabemos que la salida en régimen será de la forma $v_o(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n H(jn\frac{2\pi}{T}) e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$

El n-ésimo armónico se amplifica según $|H(j\frac{2\pi}{T}n)|$, por lo que hago coincidir el primer armónico con el pico de resonancia ω_r para tener máxima amplificación.

$$\Rightarrow \omega_r = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_r}}$$

(iii) Observamos que se trata de un filtro esencialmente pasabajos de 2° orden (caída a $-40\ \frac{dB}{déc}$), por lo cual podremos suponer que únicamente pasan la componente de continua de la señal y la fundamental.

Notando que $\arg(H(j\underbrace{\tfrac{2\pi}{T}}_{\omega_r})) \simeq -1{,}14 \text{ rad} = -66°$ tenemos que $H(j\omega_r) = \sqrt{2}\angle -1{,}14 \text{ rad}$

$$v_o(t) \simeq c_0 G_0 + c_1 H(j\omega_r)e^{j\omega_r t} + c_{-1} H(-j\omega_r)e^{-j\omega_r t}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_o(t) \simeq \frac{A}{2} + \frac{2\sqrt{2}A}{\pi}\sin(\omega_r t - 1{,}14)}$$

(iv) $P_{m\,v_i(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T v_i(t)^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A^2\,dt \Rightarrow \boxed{P_{m\,v_i(t)} = \frac{A^2}{2}}$

$$P_{m\,v_o(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T v_o(t)^2\,dt \overset{\text{Parseval}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 \simeq \sum_{n=-1}^{1} |c_n|^2 = \frac{A^2}{4} + 2\left(\frac{\sqrt{2}A}{\pi}\right)^2$$

de la serie de $v_o(t)$

$$\Rightarrow \boxed{P_{m\,v_o(t)} = A^2\left(\frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\right)} \qquad \Rightarrow \boxed{\frac{P_{m\,v_o(t)}}{P_{m\,v_i(t)}} = 1{,}31}$$

Por la resonancia, la salida $v_o(t)$ (aproximada) tiene un 30% más de potencia que $v_i(t)$.