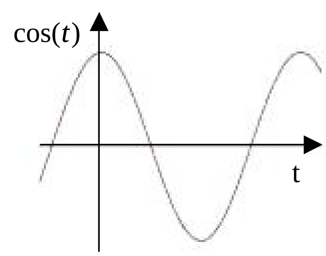
Sistemas Lineales 1
Primer parcial, 8 de mayo 2004

Recomendaciones generales:

- **Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.**
- **En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.**
- **Justificar claramente los pasos realizados para resolver los problemas.**
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.**
- **En lo posible, usar las hojas de un solo lado**
- **Se recuerda que la prueba es individual.**
- **Al finalizar, colocar las hojas dentro del sobre amarillo y entregarlo al docente del salón.**

Problema 1 **(7 puntos)**

a) Dibujar el esquema de las siguientes distribuciones:



1) $S = Y(t).\cos(t)$

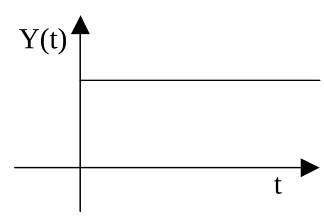
2) $T = S_{t-p}$

3) $U = S + T$

4) $V = U'$

5) $W = U''$

6) $X = U + W$



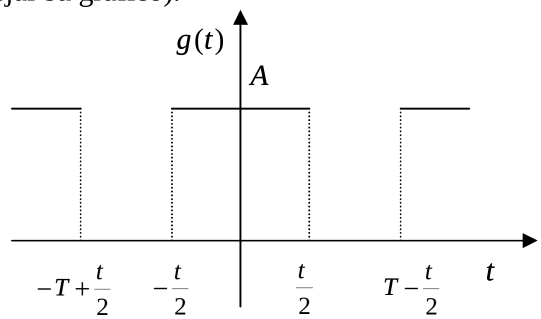
b) Indicar cuáles de las distribuciones anteriores se pueden aplicar a una $\varphi \in C^{\infty}$, sin restricciones de soporte.

c) i) Probar la identidad $\alpha(t)\delta'(t) = \alpha(0)\delta'(t) - \alpha'(0)\delta(t)$.

ii) Calcular el producto $sen(t).X(t)$

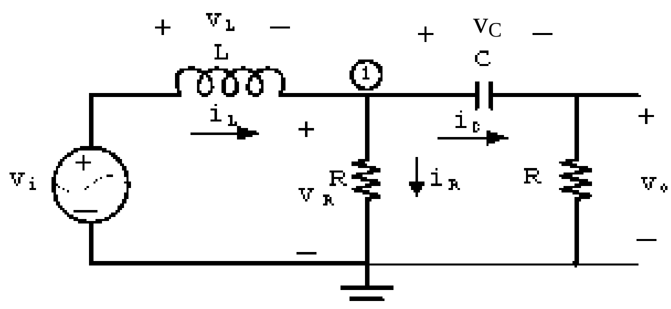
Problema 2 **(9 puntos)**

1. Consideremos la función $h(x) = \dfrac{\sin(px)}{x}$, que es continua y derivable en todo punto (la aparente discontinuidad en $x = 0$ no es tal; $h(0) = p$, $h'(0) = 0$). Mostrar que esta función se anula para todo entero no nulo (se recomienda bosquejar su grafico).
2. Se considera la función periódica $g(t)$ de la figura.
   - **i)** Calcular los coeficientes de Fourier de $g(t)$ y expresarlos en función de h.
   - **ii)** Hallar t en función de T de manera tal que $g(t)$ no tenga armónicos pares.
   - **iii)** Hallar t en función de T de manera tal que $g(t)$ no tenga armónicos múltiplos de 3.



3. Calcular $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

Problema 3 **(11 puntos)**



a) Hallar una ecuación diferencial que vincule $v_o(t)$ con $v_i(t)$, sabiendo que se cumple L/R = R.C = t.

Sugerencias:

- Plantear el nudo 1.
- Escribir la ecuación diferencial que vincula el voltaje y la corriente en la bobina, y en el condensador.
- Eliminar las variables intermedias y verificar que la relación se puede escribir como:

$$\dot{v}_i(t) = 2\tau \cdot \ddot{v}_o(t) + 2 \cdot \dot{v}_o(t) + \frac{1}{\tau} v_o(t)$$

DE AQUÍ EN ADELANTE SE TRABAJARÁ CON LA ECUACIÓN QUE APARECE ARRIBA.

b) Dar dos distribuciones T y S tales que $T*v_i = S*v_o$.

c) Hallar las inversas de S y T en D'_+ (recordar que la solución homogénea de una ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden es de la forma $A.e^{l_1 t} + B.e^{l_2 t}$, donde $l_1, l_2 \in C$ son dos raíces distintas del polinomio característico y A y B son constantes).

d) 1 – Encontrar v_1 para que la salida sea $v_0(t) = Y(t).E.\frac{t}{\tau}$

2 – Encontrar v_o si la entrada es $v_i(t) = E.Y(t)$.

Problema 4 **(13 puntos)**

a) Se considera el circuito de la figura 1. Hallar la impedancia vista en régimen sinusoidal Z_v entre los puntos A y B, en función de n (relación de vueltas del transformador ideal), C, R_1 y w (frecuencia de trabajo).

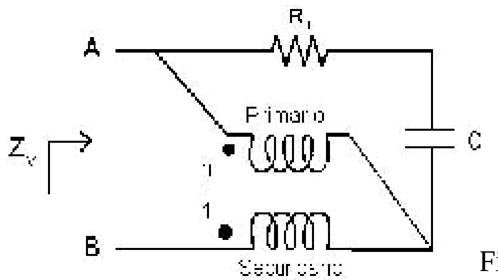
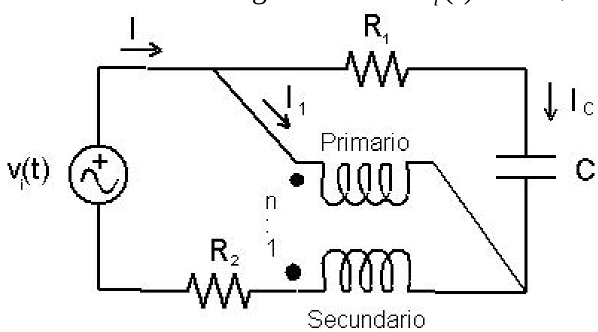


Figura 1

b) Sea el circuito de la figura 2 donde $v_i(t) = 220\sqrt{2}\cos(w\,t)$ y :



$w = 100p$
$n = 3$
$C = 33mF$
$R_1 = 22\Omega$
$R_2 = 100\Omega$

Figura 2

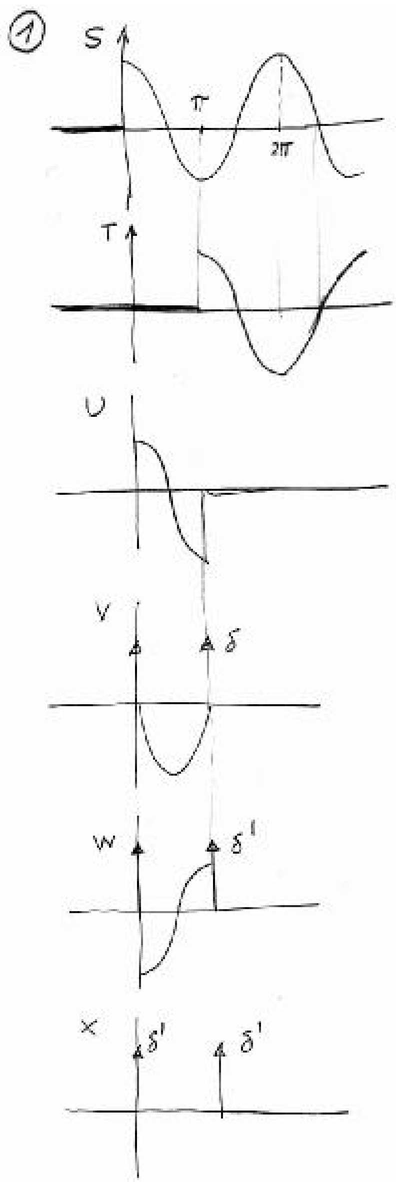
- **i)** **Justificar** mediante argumentos circuitales que los fasores asociados a todas las corrientes en el circuito deben ser colineales.
- **ii)** Calcular I (fasor de corriente por R_2) e I_C (fasor de corriente por el condensador C).

c) **i)** Realizar un diagrama fasorial que involucre a V_i (fasor de la fuente $v_i(t)$), I (fasor de corriente por R_2) e I_C (fasor de corriente por el condensador C) .

ii) Ubicar “a grandes rasgos (darle importancia al sentido)” a I_1 (fasor de corriente por el primario del transformador ideal), V_C (fasor de voltaje en C), V_R (fasor de voltaje en R_1). **Justificar.**

d) **i)** Calcular las potencias activa y reactiva consumidas a la fuente.

ii) Se desea compensar el factor de potencia mediante la adición de una componente y de tal forma de que no se modifique la potencia activa consumida a la fuente. Indicar que componente utilizaría, como la conectaría y su valor. **Justificar.**



7) A una $\varphi \in C^\infty$ se pueden aplicar las de soporte acotado, es decir todas menos S y T

8) $\underline{\langle \alpha(t)\delta'(t), \varphi(t)\rangle} = \langle \delta', \alpha\varphi\rangle = -(\alpha\varphi)'_0 = -\alpha(0)\varphi'(0) - \alpha'(0)\varphi(0)$

$= \langle \underline{\alpha(0)\delta'(t) - \alpha'(0)\delta(t)}, \varphi(t)\rangle$

luego

$$\underline{\alpha(t)\delta'(t) = \alpha(0)\delta'(t) - \alpha'(0)\delta(t)}$$

$\operatorname{sen} t . X = \operatorname{sen} t . [\delta'(t) + \delta'(t-\pi)]$

$\alpha(t) = \operatorname{sen} t \qquad \alpha(0) = \alpha(\pi) = 0$

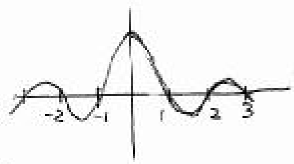
$\alpha'(t) = \cos t \qquad \alpha'(0) = 1 \quad \alpha'(\pi) = -1$

Luego:

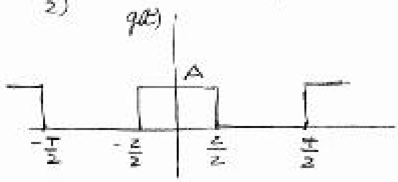
$\operatorname{sen} t . X = -\delta(t) + \delta(t-\pi)$

②

1) $h(x) = \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x}$ $\quad h(0) = \pi$ $\quad$ Es par $\quad$ Se anula en $\pi x = n\pi \Rightarrow x = n$



2)



i) $g(t)$ es par $\Rightarrow$ desarrollo sólo en cosenos

$$a_0 = \frac{2A}{T}$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos n\omega x\,dx = \int_0^{\frac{\tau}{2}} A\cos\frac{2\pi n}{T}x\,dx = \frac{AT}{2\pi n}\operatorname{sen}\frac{2\pi n}{T}\frac{\tau}{2}$$

$$a_n = \frac{4}{T}\cdot\frac{AT}{2\pi n}\operatorname{sen}\frac{\pi n\tau}{T} = \frac{2A}{\pi n}\operatorname{sen}\frac{\pi n\tau}{T} = \frac{2A}{\pi}\frac{T}{n\tau}\cdot\frac{\tau}{T}\operatorname{sen}\frac{\pi n\tau}{T} = \frac{2A}{\pi}\frac{\tau}{T}\,h\!\left(\frac{n\tau}{T}\right)$$

ii) $a_n = 0$ para n par $\underset{n=2k}{\Rightarrow}$ $2k\frac{\tau}{T}\pi = N\pi \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{T}{2}}$ Confirma que es simetría de media onda

iii) $a_n = 0$ con n múltiplo de 3

$$n = 3k \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi 3k\tau}{T} = 0 \Rightarrow \frac{3k\tau}{T} = N \qquad 3\tau k = NT \qquad \begin{cases}\boxed{\tau = \frac{T}{3}}\\ \boxed{\tau = \frac{2T}{3}}\end{cases}$$

3) Con $\tau = \frac{T}{2}$ $\quad a_n = \frac{2A}{\pi n}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$ $\quad$ $a_n = 0$ para n par, n alterna 1 y -1 para n impar

$$g(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\left[\cos\omega t - \frac{1}{3}\cos 3\omega t + \frac{1}{5}\cos 5\omega t - \frac{1}{7}\cos 7\omega t + \cdots\right]$$

Parseval

$$V_{ef}^2 = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} A^2\,dt = \frac{A^2}{2}$$

$$\frac{A^2}{2} = \frac{A^2}{4} + \frac{4A^2}{\pi^2 (2)}\underbrace{\left[1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots\right]}_{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2}\Sigma$$

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{\pi^2}\Sigma \Rightarrow \boxed{\sum_0^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

3

$i_L = i_R + i_C \Longrightarrow L\frac{di_L}{dt} = L\frac{di_R}{dt} + L\frac{di_C}{dt}$ $\qquad V_L = L\frac{di_L}{dt} \qquad i_C = C\frac{dv_C}{dt}$

$$V_L = \frac{L}{R}\frac{dV_R}{dt} + LC\frac{d^2V_C}{dt}$$

$V_L = \frac{L}{R}\dot{V}_R + LC\ddot{V}_C \longrightarrow V_L = \frac{L}{R}\dot{V}_R + \frac{L}{R}\dot{V}_0$

$V_0 = Ri_C = RC\dot{V}_C \rightarrow \ddot{V}_C = \frac{\dot{V}_0}{RC}$

$V_i = V_L + V_C + V_0 \Longrightarrow \dot{V}_i = \dot{V}_L + \frac{V_0}{RC} + \dot{V}_0 = \frac{L}{R}\left(\ddot{V}_C + \ddot{V}_0\right) + \frac{L}{R}\ddot{V}_0 + \frac{V_0}{RC} + \dot{V}_0$

$\dot{V}_i = \frac{L}{R}\frac{\dot{V}_0}{RC} + \underline{\frac{2L}{R}}\ddot{V}_0 + \frac{V_0}{RC} + \dot{V}_0 = 2\frac{L}{R}\ddot{V}_0 + \left(1 + \frac{L}{R}\cdot\frac{L}{RC}\right)\dot{V}_0 + \frac{V_0}{RC}$

Con $\frac{L}{R} = RC = \tau$ $\qquad \boxed{\dot{V}_i = 2\tau\ddot{V}_0 + 2\dot{V}_0 + \frac{V_0}{\tau}}$

$$\underbrace{\delta'}_{T} * v_i = \underbrace{\left(2\tau\delta'' + 2\delta' + \frac{1}{\tau}\delta\right)}_{S} * V_0$$

$T^{-1} = Y(t)$

$S = 2\tau\delta'' + 2\delta' + \frac{1}{\tau}\delta \qquad$ Hallar S^{-1}

Se propone $S^{-1} = Y(t)Ae^{at}\cos\omega t + Y(t)Be^{at}\operatorname{sen}\omega t$

$(S^{-1})' = Y(t)Ae^{at}[a\cos\omega t - \omega\operatorname{sen}\omega t] + Y(t)Be^{at}[a\operatorname{sen}\omega t + \omega\cos\omega t] + A\delta$

$(S^{-1})'' = Y(t)Ae^{at}[a^2\cos\omega t - 2a\omega\operatorname{sen}\omega t - \omega^2\cos\omega t] + Y(t)Be^{at}[a^2\operatorname{sen}\omega t + 2a\omega\cos\omega t - \omega^2\operatorname{sen}\omega t] + aA\delta + B\omega\delta + A\delta'$

Debe ser: $\underline{(S^{-1}) * S = 2\tau(S^{-1})'' + 2(S^{-1})' + \frac{1}{\tau}(S^{-1}) \equiv \delta}$

Para empezar: coeficientes de δ': $\underline{A = 0}$

Coeficientes en δ: $\boxed{2\tau B\omega = 1}$ (α)

Coeficientes función: $2\tau\cancel{B}e^{at}[(a^2-\omega^2)\operatorname{sen}\omega t + 2a\omega\cos\omega t] + 2\cancel{B}e^{at}[a\operatorname{sen}\omega t + \omega\cos\omega t] + \frac{B}{\tau}e^{at}\operatorname{sen}\omega t \equiv 0$

$$\underbrace{\left(2\tau(a^2-\omega^2) + 2a + \frac{1}{\tau}\right)}\operatorname{sen}\omega t + \left[\underbrace{4\tau a\omega + 2\omega}\right]\cos\omega t = 0$$

$2\tau a + 1 = 0 \longrightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2\tau}}$

$2\tau(a^2-\omega^2) + 2a + \frac{1}{\tau} = 0$

$2\tau^2a^2 - 2\tau^2\omega^2 + \cancel{2a\tau + 1} = 0 \qquad a^2 = \omega^2 \Rightarrow \omega = \pm a \qquad$ Debe ser $-a$ $\qquad \boxed{\omega = \frac{1}{2\tau}}$ $\quad$ En (α) $\boxed{B=1}$

$$\boxed{S^{-1} = Y(t)e^{-\frac{t}{2\tau}}\operatorname{sen}\frac{t}{2\tau}}$$

1) 1) $V_0 = Y(t)E\frac{t}{\tau} \qquad \delta' * V_i = \left(2\tau\delta'' + 2\delta' + \frac{1}{\tau}\delta\right) * V_0$

$$\underbrace{(Y * \delta')}_{\delta} * V_i = Y * \left(2\tau\delta'' + 2\delta' + \frac{1}{\tau}\delta\right) * V_0 = \left(2\tau\delta' + 2\delta + \frac{1}{\tau}Y\right) * V_0$$

$2\tau\delta' * V_0 = 2\tau V_0' = 2\tau Y(t)\frac{E}{\tau}$

$2\delta * V_0 = 2V_0 = 2Y(t)E\frac{t}{\tau}$

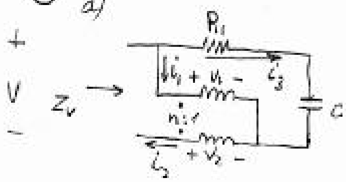
$\frac{1}{\tau}Y(t) * V_0 = \frac{1}{\tau}\int_0^t \frac{Et}{\tau}dt = \frac{Y(t)}{\tau^2}\frac{t^2}{2}$

$$V_i = Y(t)E\left[2 + 2\frac{t}{\tau} + \frac{t^2}{2\tau^2}\right]$$

2) $V_i = Y(t)E \Longrightarrow \delta' * V_i = E\delta(t)$

$$V_0 = E\delta * (S^{-1}) = E\delta * Y(t)e^{-\frac{t}{2\tau}}\operatorname{sen}\frac{t}{2\tau} = Y(t)Ee^{-\frac{t}{2\tau}}\operatorname{sen}\frac{t}{2\tau}$$

4) a)



$$Z_v = \frac{V}{i_2}$$

$$\begin{cases} V = V_1 - V_2 \\ V_1 = n V_2 \\ n i_1 = i_2 \longrightarrow i_1 = \frac{i_2}{n} \\ V_1 = \left(R + \frac{1}{C\omega j}\right) i_3 = \frac{1 + RC\omega j}{C\omega j}\, i_3 \longrightarrow i_3 = \frac{C\omega j\, V_1}{1 + RC\omega j} \\ i_1 + i_3 = i_2 \end{cases}$$

Eliminamos las otras variables:

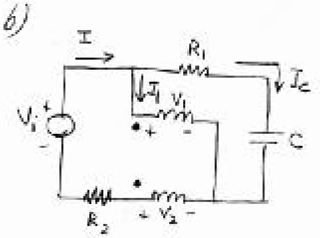
$$V = V_1 - V_2 = (n-1)V_2 \longrightarrow V = \frac{(n-1)}{n} V_1 \longrightarrow V_1 = \frac{n}{n-1} V$$

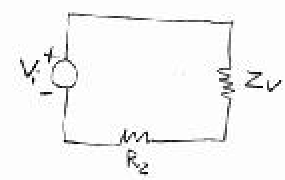
$$i_2 = \frac{i_2}{n} + \frac{C\omega j}{1+RC\omega j} V_1 \qquad i_2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{C\omega j}{1+RC\omega j}\,\frac{n}{n-1} V$$

$$\frac{n-1}{n}\, i_2 = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{C\omega j}{1+RC\omega j} V \Rightarrow \frac{V}{i_2} = \boxed{Z_v = \frac{(n-1)^2}{n^2}\cdot\frac{1+R_1 C\omega j}{C\omega j}}$$

$$\text{O bien: } Z_v = \frac{(n-1)^2}{n^2}\Big[\underbrace{R_1 + \frac{1}{C\omega j}}_{Z}\Big]$$

b)





i) Por el 2ario circula I

Como es proporcional a I_1, ambos deben ser colineales.

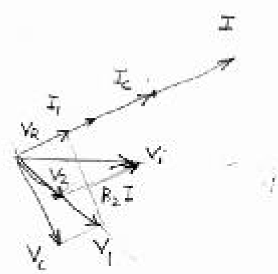
$I_C = I - I_1$ también lo será.

$$I = \frac{V_i}{R_2 + Z_v} \qquad Z_v = \frac{(n-1)^2}{n^2}\left[R_1 + \frac{1}{C\omega j}\right] = \frac{4}{9}\left[22 + \frac{10^6}{33\times 100\pi j}\right] = \frac{4}{9}\left[22 - 96{,}4 j\right]$$

$$I = \frac{220}{100 + 9{,}778 - 42{,}87j} = \frac{220}{109{,}78 - 42{,}87j} = \frac{220}{117{,}85\angle{-21'33}} \qquad \simeq 9{,}777..-$$

$$I = 1{,}87\angle{21'33} = 1{,}74 + j\,0{,}68$$

$$I_1 = \frac{I}{n} = \frac{I}{3} \qquad I_C = \frac{2}{3} I$$



ii)

$$P = \mathrm{Re}\left[V_{ef}\,\overline{I_{ef}}\right] = 220 \times 1{,}74 = 383\ \mathrm{W}$$

$$Q = \mathrm{Im}\left[V_{ef}\,\overline{I_{ef}}\right] = 220 \times 0{,}68 = 149.6\ \mathrm{VAr}$$

Ojo: el Q de la carga es negativo (capacitivo)

Puedo poner una self en serie o en paralelo

Para simplificar los cálculos, la pongo en paralelo

$$Q = \frac{V^2}{L\omega} \Longrightarrow L\omega = \frac{V^2}{Q} \Rightarrow L = \frac{V^2}{Q\omega} = \frac{220^2}{149{,}6\times 100\pi} = 1{,}02\ \mathrm{Hy}$$