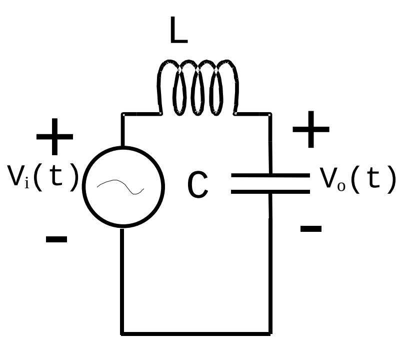
Sistemas Lineales 1
Primer parcial, 23 de mayo 2003

Recomendaciones generales:

- Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.
- En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar a otro y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.
- Justificar claramente los pasos realizados para resolver los problemas.
- **HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.**
- **Poner el nombre en todas las hojas.**
- En lo posible, usar las hojas de un solo lado
- Se recuerda que la prueba es **individual**.
- Al finalizar, colocar las hojas dentro del sobre amarillo y entregarlo al docente del salón.

Problema 1 **(10 puntos)**



a) Hallar la ecuación diferencial que vincula $v_o(t)$ con $v_i(t)$ en el circuito de la figura, con $w_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

b) Hallar una distribución T(t) tal que $v_i(t) = T(t) * v_o(t)$.

c) Hallar la inversa de T(t) en D'_+.

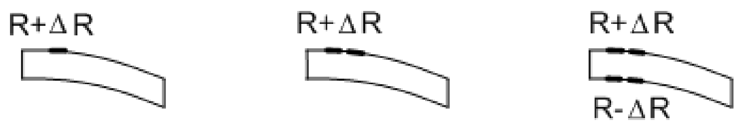
d) i – Hallar $v_o(t)$ si $v_i(t) = Y(t)$.

ii – idem **i** si $v_i(t) = Y(t)\mathrm{sen}\left(\dfrac{t}{\sqrt{LC}}\right)$.

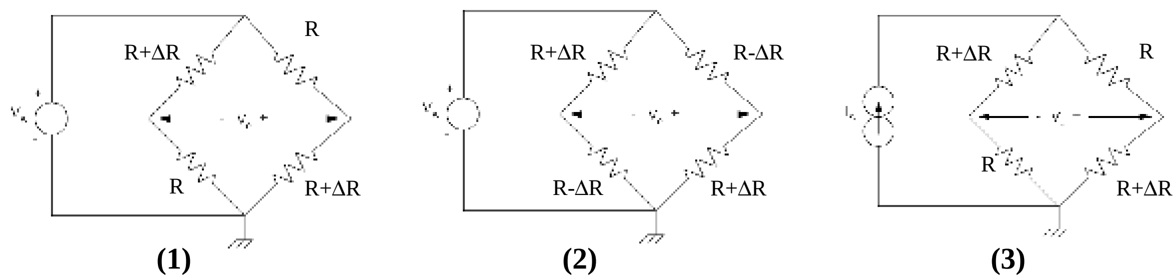
(Recordar que $\sin(a).\sin(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$).

Problema 2 **(7 puntos)**

Para medir deformaciones de estructuras se emplean "strain gages", que son resistores cuya resistencia varía con la deformación de la componente. Se suelen adherir a la estructura cuya deformación se desea medir en esquemas de 1, 2, o 4 strain gages, según se indica en el esquema.



Los resistores se conectan en un puente de Wheatstone, que puede ser alimentado por una fuente de voltaje o de corriente, en las siguientes tres configuraciones:



Para los casos anteriores:

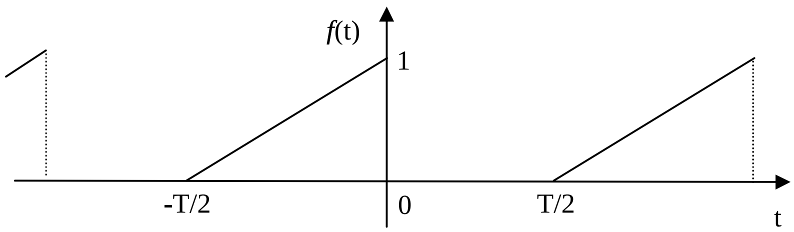
a) Calcular las transferencias que correspondan: $\frac{V_o}{V_A}$ $\frac{V_o}{I_A}$.

b) Si se desea que el circuito, para V_A ó I_A fijos, entregue un V_O que varíe linealmente con ΔR, ¿qué configuración(es) elegiría?

c) Si $RI_A = V_A$ y se desea máxima sensibilidad de ΔR a V_0 ¿qué configuración(es) elegiría? (Interpretar y responder la pregunta).

Problema 3 **(15 puntos)**

Se considera la siguiente función continua y periódica:



a) Hallar el valor medio de *f(t)*.

b) Sea la distribución periódica $\tilde{T}_f(t)$. Hallar $\tilde{T}_f'(t)$ y $\tilde{T}_f''(t)$, derivadas primera y segunda de *f* como distribución. En particular hallar $T_f''(s)$, distribución en D'_Γ asociada a $\tilde{T}_f''(t)$.

c) Hallar los coeficientes de Fourier de $\tilde{T}_f(t)$ a partir de los de $\tilde{T}_f''(t)$.

d) Hallar el número de primeros armónicos que aportan el 80% de la potencia media de la señal.

e) Sea *g(t)=f(t)+f(-t)* con *f(t)* cualquiera de periodo *T*. Mostrar que $c_n(g) = c_n\left[f(t)\right] + c_n\left[f(-t)\right]$ y deducir que los coeficientes de Fourier de *g*(*t)* son reales.

f) Aplicando la parte e) para la función f(t) de las partes anteriores, verificar la identidad $\sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{p^2}{8}$.

Problema 4 **(8 puntos)**

a) Definir distribución.

b) Definir derivada de una distribución.

c) A partir de la definición, hallar la derivada de la distribución $Y(t) + \mathrm{sen}(t).d(t)$.

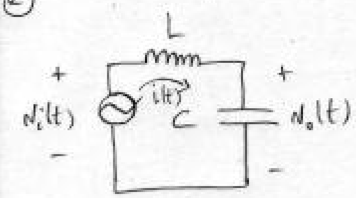
d) Demostrar la identidad $\left(a(t).T(t)\right)' = a'(t).T(t) + a(t).T'(t)$, siendo T una distribución y a una función infinitamente diferenciable..

e) Demostrar a partir de la definición de * que $T(t) * d(t-a)$ con *a>0.*

SISTEMAS LINEALES 1: PRIMER PARCIAL 2003 (1)

Problema 1:

(a)



$$v_i(t) = L\frac{di(t)}{dt} + v_o(t)$$

$$i(t) = C\frac{dv_o(t)}{dt} \Rightarrow v_i(t) = LC\frac{d^2v_o(t)}{dt^2} + v_o(t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2v_o(t)}{dt^2} + v_o(t) = v_i(t)}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

(b) $v_i(t) = T(t) * v_o(t)$

Si consideramos el operador diferencial lineal $D = \frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2}{dt^2} + 1$

$$\Rightarrow D v_o(t) = v_i(t) \Rightarrow D(\delta(t) * v_o(t)) = v_i(t)$$

$$\Rightarrow (D\delta(t)) * v_o(t) = v_i(t) \Rightarrow \boxed{T(t) = D\delta(t)}$$

(c) $T^{-1} = (D\delta)^{-1}$. Notando que el operador D no está normalizado, consideramos $\bar{D} = \omega_0^2 D = \frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2$. Ahora aplicamos el conocido resultado de que $(\bar{D}\delta)^{-1} = Y(t) f(t)$, siendo $f(t)$ la solución de la ecuación diferencial ordinaria:

$$\bar{D} f(t) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1$$

$$\Rightarrow f'' + \omega_0^2 f = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \left\langle \begin{array}{l} \lambda_1 = j\omega_0 \\ \lambda_2 = -j\omega_0 \end{array} \right. \Rightarrow f(t) = Ae^{j\omega_0 t} + Be^{-j\omega_0 t}$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow A = -B$$

$$f'(0) = 1 \Rightarrow j\omega_0(A - B) = 1 = j\omega_0 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2j\omega_0} = -B$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t), \quad (\bar{D}\delta)^{-1} = \frac{Y(t)}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow (D\delta)^{-1} = \omega_0^2(\bar{D}\delta)^{-1} \Rightarrow \boxed{(D\delta)^{-1} = Y(t)\omega_0\sin(\omega_0 t)}$$

(d) (i) $v_i(t) = Y(t)$

Sabemos de la parte anterior que $v_o(t) = Y(t)\omega_0\sin(\omega_0 t) * v_i(t)$

Siendo en este caso ambas distribuciones de D'_+, la integral de convolución resulta:

2

$$v_o(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(s)\,\omega_o \sin(\omega_o s)\, Y(t-s)\, ds = \int_0^t \omega_o \sin(\omega_o s)\, ds = -\cos(\omega_o s)\Big|_0^t$$

$$\Rightarrow \boxed{v_o(t) = Y(t)\left[1 - \cos(\omega_o t)\right]}$$

(ii) $v_i(t) = Y(t)\sin(\omega_o t)$, $v_o(t) = Y(t)\omega_o \sin(\omega_o t) * v_i(t)$

$$\Rightarrow v_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(s)\,\omega_o \sin(\omega_o s)\, Y(t-s)\sin(\omega_o(t-s))\, ds = \int_0^t \omega_o \sin(\omega_o s)\sin(\omega_o(t-s))\, ds$$

$$= \int_0^t \frac{\omega_o}{2}\left[\cos(\omega_o(2s-t)) - \cos(\omega_o t)\right] ds = \frac{\omega_o}{2}\left[-t\cos(\omega_o t) + \int_0^t \cos(\omega_o(2s-t))\, ds\right]$$

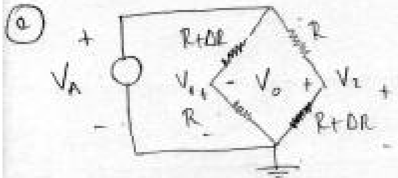
$$v_o(t) = \frac{\omega_o}{2}\left[-t\cos(\omega_o t) + \frac{\sin}{2\omega_o}(\omega_o(2s-t))\Big|_0^t\right] = \frac{\omega_o}{2}\left[-t\cos(\omega_o t) + \frac{\overbrace{\sin(\omega_o t) - \sin(-\omega_o t)}^{2\sin(\omega_o t)}}{2\omega_o}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{v_o(t) = \frac{Y(t)}{2}\left[\sin(\omega_o t) - t\cos(\omega_o t)\right]}$$

③

Problema 2:

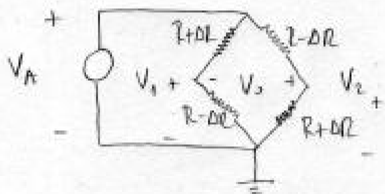
ⓐ



Por respectivos divisores de tensión tenemos:

$$V_1 = \frac{R}{2R+\Delta R} V_A \;,\quad V_2 = \frac{R+\Delta R}{2R+\Delta R} V_A$$

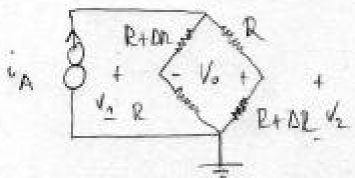
$$V_o = V_2 - V_1 = \frac{\Delta R}{2R+\Delta R} V_A \Rightarrow \boxed{\frac{V_o}{V_A}_{(1)} = \frac{\Delta R}{2R+\Delta R}}$$



Igual que antes:

$$V_1 = \frac{R-\Delta R}{2R} V_A \;,\quad V_2 = \frac{R+\Delta R}{2R} V_A$$

$$V_o = V_2 - V_1 = \frac{\Delta R}{R} V_A \Rightarrow \boxed{\frac{V_o}{V_A}_{(2)} = \frac{\Delta R}{R}}$$



En cada rama la resistencia es $2R+\Delta R$ por lo que la corriente en cada rama es $\frac{i_A}{2}$.

$$V_1 = \frac{R}{2} i_A \;,\quad V_2 = \frac{R+\Delta R}{2} i_A$$

$$V_o = V_2 - V_1 = \frac{\Delta R}{2} i_A \Rightarrow \boxed{\frac{V_o}{i_A}_{(3)} = \frac{\Delta R}{2}}$$

ⓑ Es claro que las transferencias lineales corresponden a los casos ② y ③.

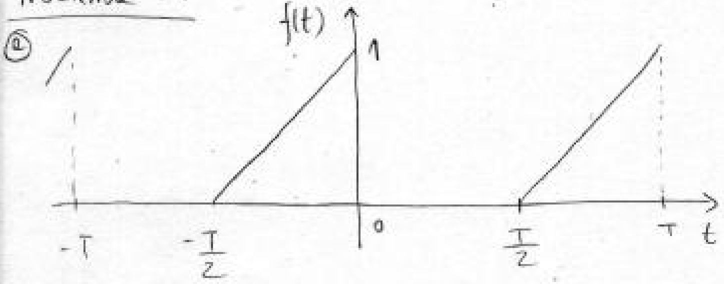
ⓒ Si $V_A = R i_A \Rightarrow \frac{V_o}{V_A}_{(3)} = \frac{\Delta R}{2R}$. La configuración no lineal no es conveniente.

Para máxima sensibilidad, busco que fijado V_A, pueda observar en V_o los cambios más pequeños en $\frac{\Delta R}{R}$. En el caso ② las variaciones relativas en la resistencia $\left(\frac{\Delta R}{R}\right)$ se observan a la salida con ganancia 1, mientras que en ③ se observan con ganancia $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, para máxima sensibilidad se debe usar la configuración ②

4

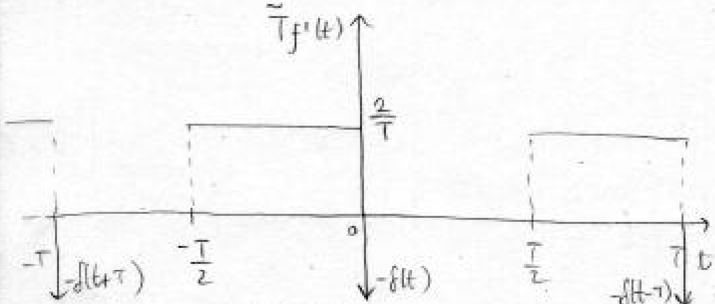
Problema 3:

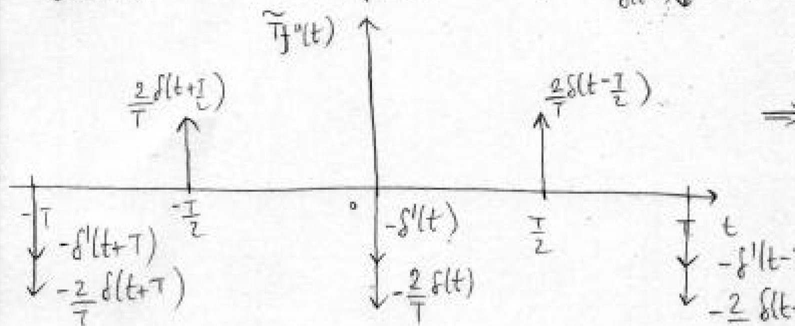
a)



$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)\,dt \Rightarrow \boxed{c_0 = \frac{1}{4}}$$

b) Derivando como distribución resulta:





$$\Rightarrow \boxed{T_f''(s) = \frac{2}{T}\left[\delta\left(s-\frac{T}{2}\right)-\delta(s)\right]-\delta'(s)}$$

c)
$$c_n(\tilde{T}_{f''}) = \frac{1}{T}\left\langle \frac{2}{T}\left[\delta\left(s-\frac{T}{2}\right)-\delta(s)\right]-\delta'(s),\ e^{-j\frac{2\pi}{T}ns}\right\rangle =$$

$$= \frac{2}{T^2}\left\langle \delta\left(s-\frac{T}{2}\right)-\delta(s),\ e^{-j\frac{2\pi}{T}ns}\right\rangle - \frac{1}{T}\left\langle \delta'(s),\ e^{-j\frac{2\pi}{T}ns}\right\rangle =$$

$$= \frac{2}{T^2}\left[(-1)^n-1\right] + \frac{1}{T}\left\langle \delta(s),\ -j\frac{2\pi}{T}n\,e^{-j\frac{2\pi}{T}ns}\right\rangle = \frac{2}{T^2}\left[(-1)^n-1\right] - j\frac{2\pi n}{T^2}$$

Utilizando la conocida propiedad: $c_n(\tilde{T}_f) = \dfrac{c_n(\tilde{T}_{f''})}{\left(jn\frac{2\pi}{T}\right)^2}$

$$\Rightarrow c_n(\tilde{T}_f) = \frac{\left[1-(-1)^n\right]}{2n^2\pi^2} + \frac{j}{2n\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{c_n(\tilde{T}_f) = \begin{cases} \dfrac{j}{2n\pi} & n \text{ par}, n\neq 0 \\ \dfrac{1}{n^2\pi^2} + \dfrac{j}{2n\pi} & n \text{ impar} \\ \dfrac{1}{4} & n=0 \end{cases}}$$

5

(d) Por un lado tenemos que la potencia media de f es $P_m = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2 dt$

$$P_m = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0} \left[\frac{2}{T}\left(t+\frac{T}{2}\right)\right]^2 dt = \frac{4}{T^3}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} t^2 dt + T\int_{-\frac{T}{2}}^{0} t\, dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{0} \frac{T^2}{4} dt\right] \Rightarrow \boxed{P_m = \frac{1}{6}}$$

Por otro lado, de la igualdad de Parseval tenemos que: $P_m = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n|^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 + |c_0|^2$

$\Rightarrow |c_0|^2 = \frac{1}{16}$ y $\frac{|c_0|^2}{P_m} \times 100 = 37,5\%$

$2|c_1|^2 = 0,1423$ y $\frac{|c_0|^2 + 2|c_1|^2}{P_m} \times 100 = 80,2\%$

El valor medio y el primer armónico aportan el 80% de la señal.

(e) Sea $g(t) = f(t) + f(-t)$, con $f(t)$ cualquiera de período T.

$g(t)$ es también periódica de período T, pues $\forall k \in \mathbb{Z}$ se cumple que

$$g(t+kT) = f(t+kT) + f(-t+kT) \underset{\substack{\uparrow \\ f\ T\ \text{periódica}}}{=} f(t) + f(-t) = g(t)$$

$$\Rightarrow c_n(g) = \frac{1}{T}\int_0^T [f(t) + f(-t)]e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}dt + \frac{1}{T}\int_0^T f(-t)e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}dt$$

$$\Rightarrow \boxed{c_n(g(t)) = c_n(f(t)) + c_n(f(-t))}$$

$$c_n(f(-t)) = \frac{1}{T}\int_0^T f(-t)e^{-j\frac{2\pi n}{T}t}dt \underset{s=-t}{=} \frac{1}{T}\int_0^{-T} f(s)e^{-j\frac{2\pi(-n)}{T}s}(-ds) = \frac{1}{T}\int_0^T f(s)e^{-j\frac{2\pi(-n)}{T}s}ds = c_{-n}(f(t))$$

$$\Rightarrow c_n(g(t)) = c_n(f(t)) + c_{-n}(f(t)) \underset{f\ \text{real}}{=} c_n(f(t)) + \overline{c_n(f(t))} \rightarrow \boxed{c_n(g(t)) = 2\,Re(c_n(f(t)))}$$

(f) Para la señal $f(t)$ de las partes anteriores:

$$c_n(g(t)) = \begin{cases} 0 & n \text{ par}, n \neq 0 \\ \frac{2}{n^2\pi^2} & n \text{ impar} \\ \frac{1}{2} & n = 0 \end{cases}$$

A partir de la expresión de $g(t)$ como Serie de Fourier tenemos que:

$$1 = \underset{f(0)}{g(0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\overbrace{-jn\frac{2\pi}{T}0}^{=1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{\text{impares} \\ \text{positivos y} \\ \text{negativos}}} \frac{2}{n^2\pi^2} = \frac{1}{2} + 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(2n+1)^2\pi^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

Problema 4: (6)

ⓐ Llamaremos distribución T, a una transformación lineal y continua de dominio D y codominio $\mathbb{C}$

$D = \{ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \varphi \in C^\infty,\ \varphi \text{ soporte acotado} \}$

$D' = \{ T : D \to \mathbb{C}, \text{ lineales y continuas} \}$ (Espacio de distribuciones)

La linealidad significa que para $\varphi_1, \varphi_2 \in D$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ se cumple que:

$\langle T(t), \lambda\varphi_1(t) + \mu\varphi_2(t) \rangle = \lambda \langle T(t), \varphi_1(t) \rangle + \mu \langle T(t), \varphi_2(t) \rangle$

La continuidad significa que si $\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi$ entonces $\lim_{n\to\infty} \langle T(t), \varphi_n(t) \rangle = \langle T(t), \varphi(t) \rangle$

ⓑ Llamaremos derivada de una distribución $T \in D'$ a la distribución T' dada por:

$\langle T', \varphi(t) \rangle = -\langle T(t), \varphi'(t) \rangle$

Es fácil ver que $T'(t)$ resulta lineal y continua. Además la definición coincide con los resultados esperados para funciones.

ⓒ $\langle (Y(t) + \sin(t)\delta(t))', \varphi(t) \rangle = -\langle Y(t) + \sin(t)\delta(t), \varphi'(t) \rangle$

$= -\langle Y(t), \varphi'(t) \rangle - \langle \sin(t)\delta(t), \varphi'(t) \rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(t)\,dt - \langle \delta(t), \sin(t)\varphi'(t) \rangle$

$= \varphi(0) - \overbrace{\sin(0)}^{0}\,\varphi'(0) = \varphi(0)$

Por otro lado $\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle = \varphi(0)$ y siendo $\varphi(t)$ arbitraria, se tiene la identidad en distribuciones $\boxed{(Y(t) + \sin(t)\delta(t))' = \delta(t)}$

ⓓ Sea T una distribución y α una función C^∞.

$\langle (\alpha T)', \varphi \rangle = -\langle \alpha T, \varphi' \rangle = -\langle T, \alpha\varphi' \rangle$

Siendo α' también infinitamente diferenciable se tiene que:

$\langle \alpha' T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha'\varphi \rangle$ y $\langle \alpha T', \varphi \rangle = \langle T', \alpha\varphi \rangle = -\langle T, (\alpha\varphi)' \rangle$

Sabemos que vale: $-\langle T, (\alpha\varphi)' \rangle = -\langle T, \alpha\varphi' \rangle - \langle T, \alpha'\varphi \rangle$

pues la identidad $(\alpha\varphi)' = \alpha'\varphi + \alpha'\varphi$ es válida para funciones C^∞

7

Por lo tanto, se tiene la identidad en distribuciones:

$\boxed{(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T'}$ donde α se deriva como función y T como distribución

d) $< \delta(t-a) * T(t), \varphi(t) > = < \delta(x-a) \otimes T(y), \varphi(x+y) >$

$= < T(y), < \delta(x-a), \varphi(x+y) > > = < T(y), \varphi(a+y) >$

$\underset{\substack{CV \\ a+y=t}}{=} < T(t-a), \varphi(t) >$

Siendo $\varphi(t)$ arbitraria, se tiene la identidad en distribuciones $\boxed{T(t) * \delta(t-a) = T(t-a)}$