Sistemas Lineales 1
Segundo parcial, 17 de julio, 2000

Problema 1 **(18 puntos)**

a) Enunciar y demostrar el teorema de Blondell, para el caso de un sistema polifásico con N = 3 (cantidad de fases). Explicar los conceptos manejados.

b) Explicar el método de los dos vatímetros, en un sistema trifásico.

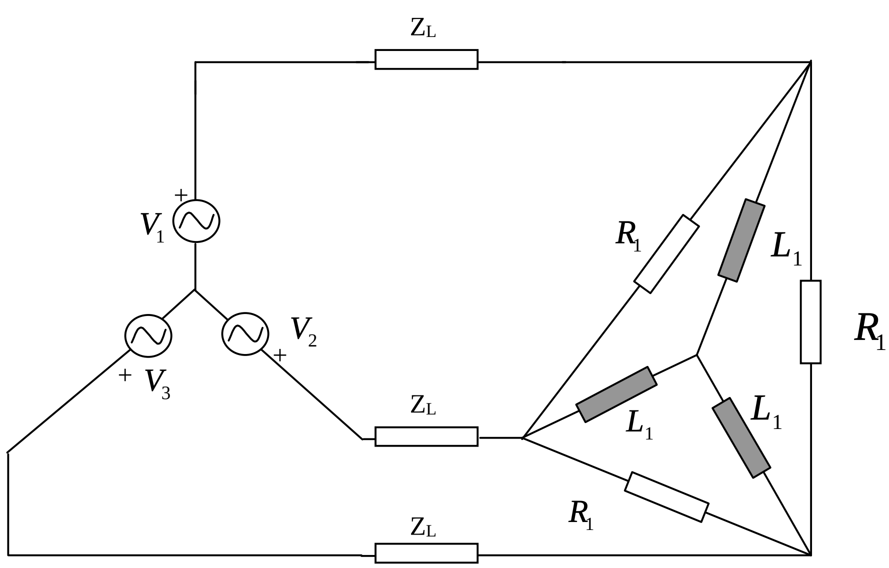
c) Para el circuito de la figura, con valores:

$V_1 = 6000\,V$	$V_2 = 6000e^{j120^\circ}\ V$	$V_3 = 6000e^{j240^\circ}\ V$
$w = 100*p$		
$Z_L = R + jLw$	$R = 3\,\Omega$	$L = 6.82\ Hy$
$R_1 = 2700\ \Omega$	$L_1 = 4.96\ Hy$	

Se pide:

i) las tres corrientes de líneas (fasores).
ii) las tres tensiones entre líneas (fasores).
iii) potencia activa y reactiva consumida a la fuente.

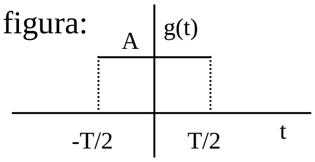
d) Describir como compensaría la reactiva consumida por la carga (factor de potencia igual a 1) en el circuito. ¿Qué elementos pondría? ¿Dónde? ¿Qué valor tendrían?



<u>Problema 2</u> **(13 puntos)**

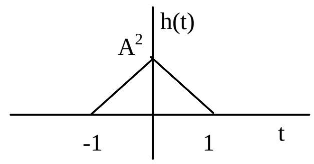
a) Verificar que la Transformada de Fourier de g, $F[g]$, es

$AT\,\dfrac{\mathbf{sen(}p\ f\,T\mathbf{)}}{p\ f\,T} = AT\ sinc\mathbf{(}\ f\ T\mathbf{)}$, siendo *g(t)* el pulso de la figura:

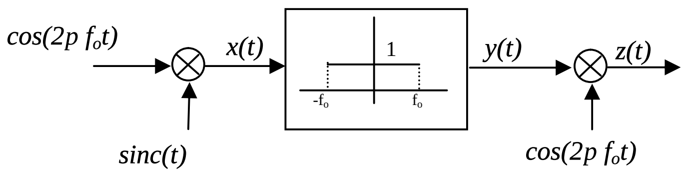


Para T=1 y sabiendo que *h(t)=g(t)*g(t)* es:

hallar $\int_{-\infty}^{+\infty} sinc^2(f)df$.

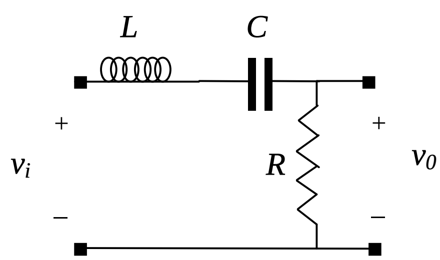


b) Sabiendo que $f_o >> 1$, hallar los espectros de cada una de las señales indicadas



c) Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} |z(t)|^2\,dt$

<u>Problema 3</u> **(18 puntos)**



a) Sea el circuito de la figura, hallar $H(jw) = \dfrac{V_o(jw)}{V_i(jw)}$

b) Sean $w_2 = \dfrac{R}{L}$ y $w_1 = \dfrac{1}{R.C}$, probar que si $\omega_2 >> \omega_1$ entonces *H(jw)* se puede aproximar por: $H(jw) = \dfrac{w_2.jw}{(jw+w_1)(jw+w_2)}$

Sugerencia: recordar $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ **para obtener la raíz de menor módulo.**

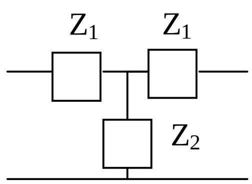
c) Realizar los diagramas de Bode asintóticos para *H(jw)*.

d)
i) Hallar *L* y *C* en función de *R* para que el sistema no atenúe la entrada en más de 3 db en el rango de frecuencias de 20 Hz a 20 kHz.
ii) ¿A cuántas décadas queda ω_2 de ω_1? ¿Diría Ud. que estamos en las condiciones de la parte b).

e) Hallar la respuesta en régimen cuando la entrada es $v_i(t)=sen(\omega_2 t)$.

<u>Problema 4</u> **(11 puntos)**

Dado el cuadripolo T de la figura,



1) Calcular la impedancia Z_V vista desde la entrada, cuando la salida se carga con Z_L.

2) Calcular la impedancia iterativa Z_o del cuadripolo T.

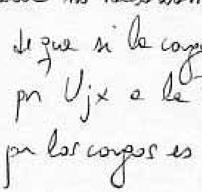
3) Sea $Z_1 = Lwj$ y $Z_2 = \dfrac{1}{Cwj}$, (con lo que el cuadripolo puede ser el modelo de un elemento de línea de transmisión)

   a) Dados R_o, L y C, hallar una condición que asegure la existencia de una ω para la cual se cumple que $Z_o=R_o$ (Z_o resistiva pura) y hallar dicha ω.
   b) Se desea que el cuadripolo funcione como adaptador de impedancias resistivas (carga R_L, vista R_V, no necesariamente iguales).
   Hallar ω y relación entre R_L, R_V, L, C.
   Aplicación: $R_L=100\Omega$ $R_V=100\ R_L$ L=1mHy
   Hallar ω y C.

SISTEMAS LINEALES 1: SEGUNDO PARCIAL 2000 (1)

Problema 1:

(a) Sea un sistema trifásico alimentado por una fuente en estrella no necesariamente equilibrada ni perfecta y con una carga cualquiera, con la única condición de que si la carga está en estrella, no existe hilo neutro. Sea X un punto cualquiera y denotemos por U_{jX} a la tensión entre la línea j y el punto X. Entonces la potencia total consumida por las cargas es: $P=\sum_{j=1}^{3} Re[U_{jX}\bar{I}_j]$ donde I_j es la corriente por la línea j.



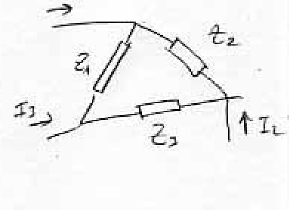
Dem: Carga en estrella (sin neutro)

Como no hay neutro, la suma de las corrientes de fase es nula. Además, como coinciden con las corrientes de línea: $\sum_{j=1}^{3} I'_j = \sum_{j=1}^{3} I_j = 0$

La potencia total consumida a la carga vale: $P=\sum_{j=1}^{3} Re[V'_j \bar{I}'_j]$ y como $V'_j = V_{jX}+V_{XN}$ tenemos que

$$P=\sum_{j=1}^{3} Re[(V_{jX}+V_{XN}).\bar{I}_j] = \sum_{j=1}^{3} Re[V_{jX}\bar{I}_j] + Re[V_{XN}\underbrace{\sum_{j=1}^{3}\bar{I}_j}_{=0}] \Rightarrow P=\sum_{j=1}^{3} Re[V_{jX}\bar{I}_j]$$

Carga en triángulo. La tensión de línea coincide con la de fase.



La potencia activa total es: $P=\sum_{j=1}^{3} Re[V'_j \bar{I}'_j] = \sum_{j=1}^{3} Re[U_{jj+1}\bar{I}'_j]$

$$\Rightarrow P=\sum_{j=1}^{3} Re[(V_{jX}-V_{j+1X})\bar{I}'_j] = Re\Big[\sum_{j=1}^{3} V_{jX}\bar{I}'_j - \sum_{j=1}^{3} V_{j+1X}\bar{I}'_j\Big]$$

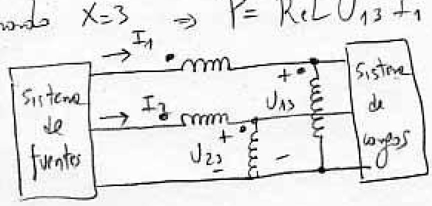
Notando que: $\sum_{j=1}^{3} V_{j+1X}\bar{I}'_j = V_{2X}\bar{I}'_1 + V_{3X}\bar{I}'_2 + V_{1X}\bar{I}'_3 = \sum_{j=1}^{3} V_{jX}\bar{I}'_{j-1}$

$$\Rightarrow P = Re\Big[\sum_{j=1}^{3} V_{jX}\bar{I}'_j - \sum_{j=1}^{3} V_{jX}\bar{I}'_{j-1}\Big] = Re\Big[\sum_{j=1}^{3} V_{jX}(\bar{I}'_j - \bar{I}'_{j-1})\Big] = Re\Big[\sum_{j=1}^{3} V_{jX}\bar{I}_j\Big]$$

ya que $I_j = I'_j - I'_{j-1} \Rightarrow P=\sum_{j=1}^{3} Re[V_{jX}\bar{I}_j]$ como se quería.

(b) Notando que en un sistema trifásico, si se elige el punto de referencia X coincidente con una de las líneas, se elimina uno de los tres términos de la suma de Blondell ($U_{XX}=0$)

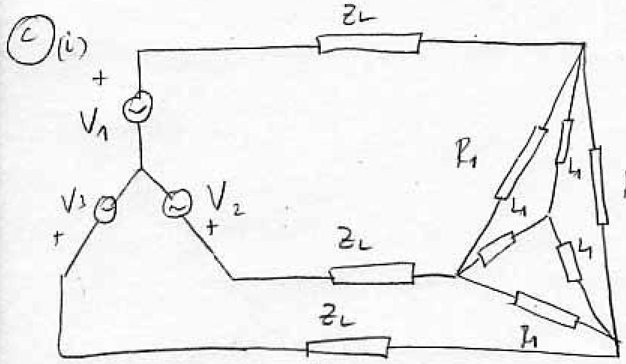
Tomando $X=3 \Rightarrow P=Re[U_{13}\bar{I}_1 + U_{23}\bar{I}_2]$



Por lo tanto, si conecto los vatímetros como en el dibujo puedo medir la potencia activa total consumida por la carga trifásica.

(2)

(c) (i)

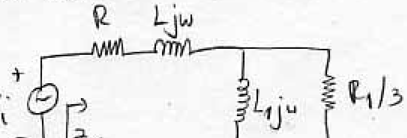


$V_1 = 6000V$, $V_2 = 6000V\angle 120°$, $V_3 = 6000V\angle 240°$

$\omega = 100\pi$, $Z_L = R + Lj\omega$, $R = 3\Omega$, $L = 6{,}82Hy$

$R_1 = 2{,}7k\Omega$, $L_1 = 9{,}96Hy$

Transformamos las resistencias R_1 en triángulo a una estrella. El equivalente monofásico de la instalación resulta:



$$Z_v = R + Lj\omega + L_1 j\omega // \frac{R_1}{3} \Rightarrow Z_v = (678 + j2532)\Omega = 2622\Omega\angle 75°$$

$$\Rightarrow I_i = \frac{V_i}{Z_v} \Rightarrow I_1 = (0{,}59 - j2{,}2)A = 2{,}29A\angle -75°$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} I_1 &= 2{,}29A\angle -75° \\ I_2 &= 2{,}29A\angle -75° + 120° \\ I_3 &= 2{,}29A\angle -75° + 240° \end{aligned}}$$

(ii) $U_{12} = V_1 - V_2$

$U_{23} = V_2 - V_3$

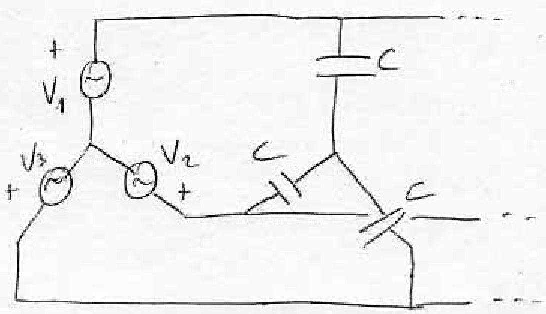
$U_{31} = V_3 - V_1$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} U_{12} &= \sqrt{3}\,6000V\angle -30° \\ U_{23} &= \sqrt{3}\,6000V\angle 90° \\ U_{31} &= \sqrt{3}\,6000V\angle 210° \end{aligned}}$$

(iii) $P = 3\,\mathrm{Re}\,[V_1 \bar{I}_1] \Rightarrow P = 10653\ W$

$Q = 3\,\mathrm{Im}\,[V_1 \bar{I}_1] \Rightarrow Q = 39797\ Var$

(d) Conecto un banco de condensadores en triángulo en paralelo con el sistema de fuentes, de forma tal que entreguen la potencia reactiva consumida por la carga.



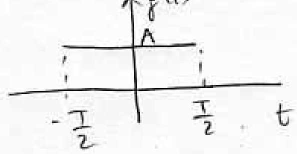
$Q_c + Q = 0$

$\Rightarrow -3C\omega|V_i|^2 + Q = 0$

$\Rightarrow C = \frac{Q}{3\omega|V_i|^2} \Rightarrow \boxed{C = 1{,}17\mu F}$

Problema 2: (3)

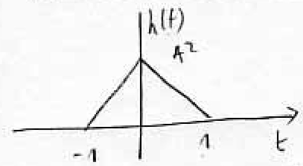
a)



$g(t) = A\,p_T(t)$ $\quad \mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi f t}\,dt = A \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi f t}\,dt$

$\Rightarrow \mathcal{F}[g(t)] = -\dfrac{A e^{-j2\pi f t}}{j2\pi f}\Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = A\left[\dfrac{e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}}{j2\pi f}\right] = A\dfrac{\sin(\pi f T)}{\pi f}$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}[g(t)] = AT\,\mathrm{sinc}(fT)}$$

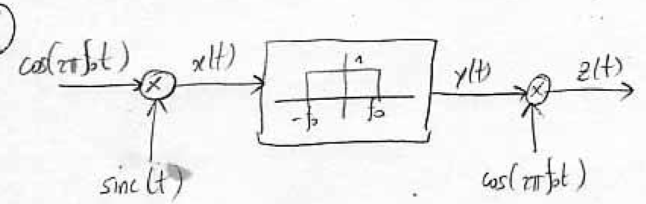


$h(t) = g(t) * g(t) \Rightarrow \mathcal{F}[h(t)] = \mathcal{F}[g(t)]^2 \underset{T=1}{=} A^2\mathrm{sinc}^2(f)$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} A^2 \mathrm{sinc}^2(f)\,df = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 \mathrm{sinc}^2(f) e^{j2\pi f t}\Big|_{t=0} df = h(0) = A^2$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2(f)\,df = 1}$$

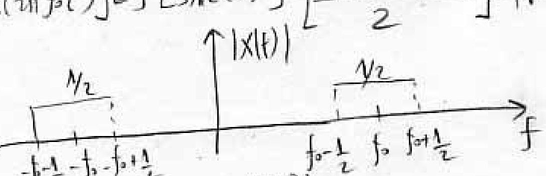
b)



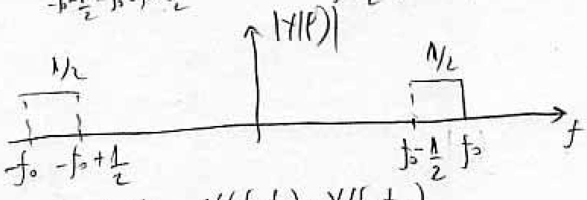
$f_0 \gg 1$

$\Rightarrow x(t) = \cos(2\pi f_0 t)\,\mathrm{sinc}(t) \Rightarrow \mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{F}[\cos(2\pi f_0 t)] * \mathcal{F}[\mathrm{sinc}(t)] = \left[\dfrac{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)}{2}\right] * p_1(f)$

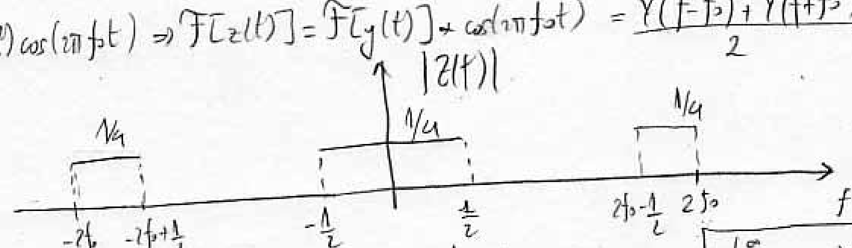
$\Rightarrow \mathcal{F}[x(t)] = \dfrac{p_1(f-f_0) + p_1(f+f_0)}{2}$



Tras el filtrado pasabajos, tenemos:



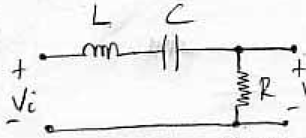
$z(t) = y(t)\cos(2\pi f_0 t) \Rightarrow \mathcal{F}[z(t)] = \mathcal{F}[y(t)] * \cos(2\pi f_0 t) = \dfrac{Y(f-f_0) + Y(f+f_0)}{2}$



c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |z(t)|^2 dt \underset{\text{Parseval}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |Z(f)|^2 df = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}\right)^2 df = \frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |z(t)|^2 dt = \frac{1}{8}}$

Problema 3: (4)

(a)



Del divisor de tensiones: $H(j\omega) = \dfrac{R}{R + L(j\omega) + \dfrac{1}{C(j\omega)}}$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{RC(j\omega)}{LC(j\omega)^2 + RC(j\omega) + 1} \rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{R}{L}\,\frac{j\omega}{(j\omega)^2 + \frac{R}{L}(j\omega) + \frac{1}{LC}}}$$

(b) $\omega_1 = \dfrac{1}{RC}$, $\omega_2 = \dfrac{R}{L}$ y se sabe que $\omega_2 \gg \omega_1 \Rightarrow \dfrac{R}{L} \gg \dfrac{1}{RC} \Rightarrow \left(\dfrac{R}{L}\right)^2 \gg \dfrac{1}{LC}$

Los polos son: $s = \dfrac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2}$

$$\rightarrow \frac{-\frac{R}{L} - \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2} \simeq \frac{-\frac{R}{L} - \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2}}{2} \simeq -\omega_2$$

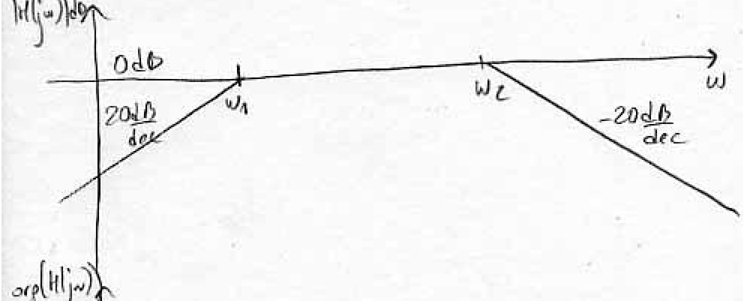
$$\rightarrow \frac{-\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2} = \frac{\cancel{\left(\frac{R}{L}\right)^2} - \frac{4}{LC} - \cancel{\left(\frac{R}{L}\right)^2}}{2\left[\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2}\right]} \simeq \frac{-\frac{4}{LC}}{4\frac{R}{L}} = -\omega_1$$

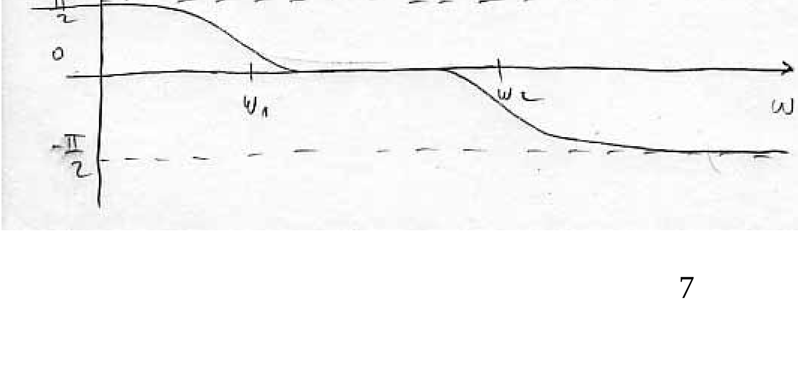
$$\Rightarrow \boxed{H(j\omega) \simeq \omega_2 \frac{j\omega}{(j\omega + \omega_1)(j\omega + \omega_2)}}$$ como se quería

(c) Para $\omega \ll \omega_1 \Rightarrow H(j\omega) \simeq \dfrac{j\omega}{\omega_1} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} = -20\log\omega_1 + 20\log\omega \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) \simeq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Para $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2 \Rightarrow H(j\omega) \simeq 1 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq 0 \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) \simeq 0 \end{cases}$

Para $\omega \gg \omega_2 \Rightarrow H(j\omega) \simeq \dfrac{\omega_2}{j\omega} \rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq 20\log\omega_2 - 20\log\omega \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) \simeq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$





d) (i) Como por la letra ω_1 y ω_2 están muy separados, puedo aproximar un poco en que $|H(j\omega_1)|_{dB} = |H(j\omega_2)|_{dB} \simeq -3dB$

$\Rightarrow \frac{\omega_1}{2\pi} \leq 20Hz$ y $\frac{\omega_2}{2\pi} \geq 20KHz$. Como quiero la mínima atenuación fuera del intervalo, tomo las igualdades $\Rightarrow \frac{1}{RC} = 2\pi 20 Hz \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{40Hz\pi R}}$

$\frac{R}{L} = 2\pi 20KHz \Rightarrow \boxed{L = \frac{R}{40KHz\pi}}$

(ii) Quedan a tres décadas, la aproximación es buena pues claramente $\omega_2 >> \omega_1$

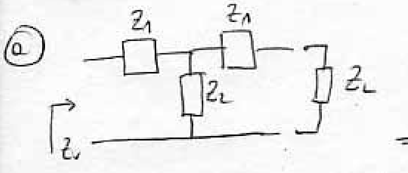
e) $v_i(t) = \sin(\omega_2 t)$

$\Rightarrow v_o(t) = |H(j\omega_2)| \sin(\omega_2 t + \arg(H(j\omega_2)))$

$|H(j\omega_2)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $(-3dB)$, $\arg(H(j\omega_2)) = \frac{-\pi}{4}$

$$\Rightarrow \boxed{v_o(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{4}\right)}$$

Problema 4: (6)

a) 

$$\Rightarrow Z_v = Z_1 + Z_2 // (Z_1+Z_L) = Z_1 + \frac{Z_2(Z_1+Z_L)}{Z_1+Z_2+Z_L}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_v = \frac{Z_1(Z_1+Z_2+Z_L)+Z_2(Z_1+Z_L)}{Z_1+Z_2+Z_L}}$$

b) En la impedancia iterativa, cuando cargo con Z_0, veo Z_0 $\Rightarrow Z_L = Z_0,\ Z_v = Z_0$

$$\Rightarrow Z_0(\cancel{Z_1}+\cancel{Z_2}+Z_0) = Z_1^2 + Z_1Z_2 + \cancel{Z_1Z_0} + Z_2Z_1 + \cancel{Z_2Z_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_0^2 = Z_1(Z_1+2Z_2)}$$

c) $Z_1 = Lj\omega$, $Z_2 = \frac{1}{Cj\omega}$

(i) $Z_0 = R_0 \Rightarrow R_0^2 = -L^2\omega^2 + \frac{2L}{C} \Rightarrow L^2\omega^2 = \frac{2L}{C} - R_0^2 \Rightarrow \boxed{\frac{2L}{C} > R_0^2}$ es la condición

$$\boxed{\omega = \frac{1}{L}\sqrt{\left(\frac{2L}{C} - R_0^2\right)}}$$

(ii) $R_v = Z_1 + \frac{Z_2(Z_1+R_L)}{Z_1+Z_2+Z_L} \Rightarrow (Z_1+Z_2)R_v + R_vR_L = Z_1(Z_1+Z_2) + Z_1R_L + Z_1Z_2 + Z_2R_L$

$\Rightarrow (Z_1+Z_2)R_v + R_vR_L = Z_1^2 + 2Z_1Z_2 + (Z_1+Z_2)R_L \Rightarrow \left(Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega}\right)R_v + R_vR_L = -L^2\omega^2 + \frac{2L}{C} + \left(Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega}\right)R_L$

Igualando partes reales: $R_vR_L = -L^2\omega^2 + \frac{2L}{C}$

Igualando partes imaginarias: $\left(Lj\omega + \frac{1}{Cj\omega}\right)(R_v - R_L) = 0 \Rightarrow LC\omega^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$

Eliminando ω^2 de la ecuación de las partes reales $\Rightarrow \boxed{R_vR_L = \frac{L}{C}}$

$R_L = 100\Omega$, $R_v = 100R_L$, $L = 1\,mHy$

$$\Rightarrow C = \frac{L}{R_vR_L} \Rightarrow \boxed{C = 1\,nF}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \boxed{\omega = 10^6\ \frac{rad}{seg}}$$