EXAMEN DE SISTEMAS LINEALES 1 – Febrero, 2000

Problema 1

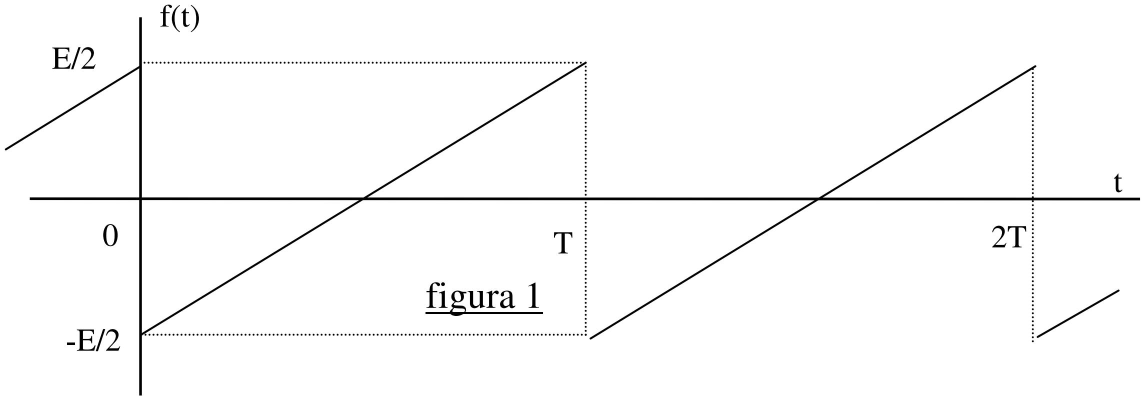


figura 1

a) Hallar los coeficientes de Fourier c_n de la distribución periódica f(t) de la figura 1. (Sugerencia: derivar f(t) dos veces como distribución)

b) Hallar N tal que

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 > 0.9 * \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

c) i) Hallar la transferencia en régimen del circuito de la figura 2:

$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(jw)}$$

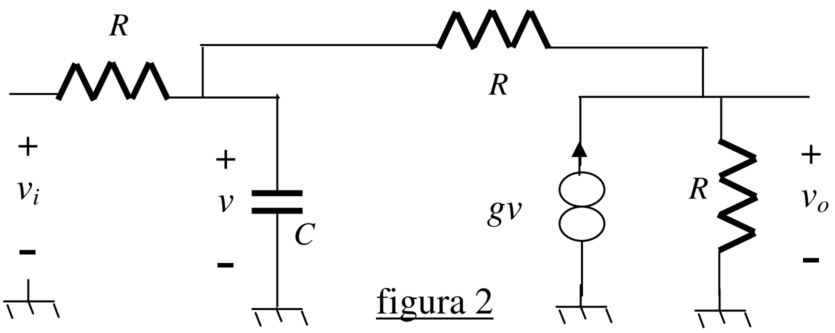
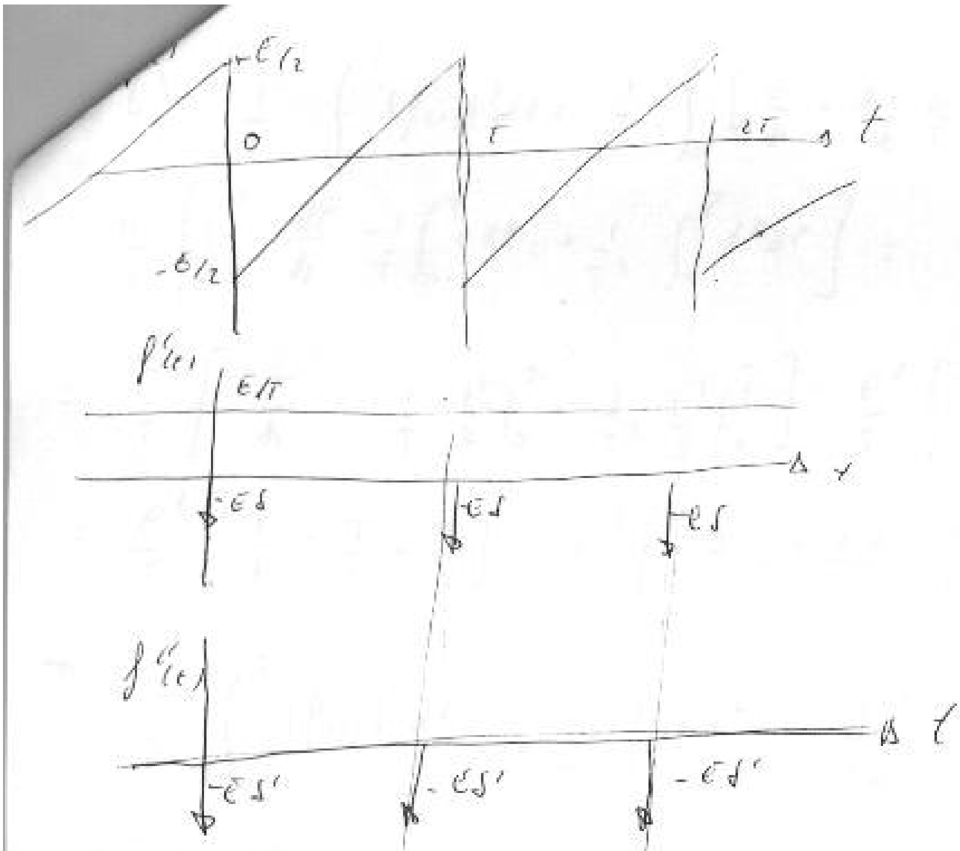


figura 2

ii) Para $Rg = 1$ dibujar los diagramas de Bode asintóticos correspondientes.

d) Para $Rg = 1$, y tomando f(t) como señal de entrada al circuito, hallar una relación entre RC y T que asegure que los N primeros armónicos de la señal de entrada se atenúen en régimen, a la salida, menos de 1dB.



$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$c_n(f'') = \frac{1}{T} \langle f'', e^{-jn\omega t} \rangle = \frac{1}{T} \langle -E\delta', e^{-jn\omega t} \rangle =$$

$$= -\frac{E}{T}\left[- \langle \delta, (e^{-jn\omega t})' \rangle \right] = +\frac{E}{T} \langle \delta, (-jn\omega)\, e^{-jn\omega t} \rangle = \frac{-jn\omega E}{T}$$

$$c_n(f'') = (-jn\omega)^2 c_n(f) \Rightarrow c_n(f) = \frac{(\cancel{-jn\omega})E}{T} \cdot \frac{1}{(-jn\omega)^2} = \frac{-E}{Tjn\omega}$$

$$c_n(f) = \frac{jE}{2n\pi} \quad ; \quad c_0(f) = 0$$

Otra forma: $c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(-\frac{E}{2} + \frac{E}{T} t\right) e^{-jn\omega t} dt = \underbrace{\frac{-E}{2T} \frac{e^{-jn\omega t}}{(-jn\omega)} \Big|_0^T}_{0} +$

$$+ \frac{E}{T^2} \int_0^T t e^{-jn\omega t} dt = \frac{E}{T^2} \left[\frac{t e^{-jn\omega t}}{(-jn\omega)} \Big|_0^T - \underbrace{\int_0^T \frac{e^{-jn\omega t}}{(-jn\omega)} dt}_{0} \right] = \frac{E}{T^2} \left[\frac{T}{-jn\omega} - \overbrace{\frac{e^{-jn\omega t}}{(-jn\omega)^2} \Big|_0^T}^{0} \right]$$

$$c_n(f) = \frac{E}{-jn\omega T} = \frac{jE}{2n\pi}$$

$$c_0(f) = 0$$

b) $\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{E^2}{4} - 2\frac{E}{2}\frac{E}{T}t + \frac{E^2}{T^2}t^2\right] dt$

$= \frac{E^2}{T}\left[\int_0^T \frac{dt}{4} - \frac{1}{T}\int_0^T t\,dt + \frac{1}{T^2}\int_0^T t^2 dt\right] =$

$= \frac{E^2}{T}\left[\frac{T}{4} - \frac{1}{T}\frac{t^2}{2}\Big|_0^T + \frac{1}{T^2}\frac{t^3}{3}\Big|_0^T\right] = \frac{E^2}{T}\left[\frac{T}{4} - \frac{1}{T}\frac{T^2}{2} + \frac{1}{T^2}\frac{T^3}{3}\right]$

$= \frac{E^2}{T}\left[\frac{T}{4} - \frac{T}{2} + \frac{T}{3}\right] = E^2\left[\frac{3-6+4}{12}\right] = \frac{E^2}{12}$

$\Rightarrow \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{E^2}{12}$

Hallar N /

$\sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 = 2\sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 > 0{,}9\frac{E^2}{12}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 > 0{,}9\frac{E^2}{24}$

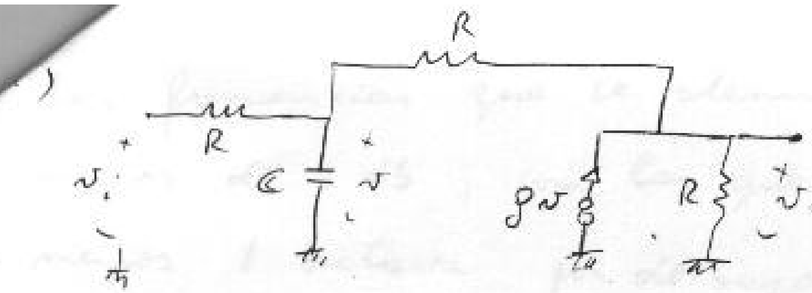
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} \frac{E^2}{4n^2\pi^2} = \frac{E^2}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} > \frac{0{,}9\,E^2}{24} \Rightarrow \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} > \frac{0{,}9 \cdot \pi^2}{6}$

N debe ser tal que $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} > 1{,}48$.

$N=$	1	2	3	4	5	6	7
$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}=$	1	1,25	1,36	1,42	1,46	1,49	1,51

$\Rightarrow \boxed{N=6}$

i)



Trabajando en régimen sinusoidal

$$\frac{v_i - v}{R} = v C j\omega + \frac{v - v_o}{R} \Rightarrow v_i - v = v RCj\omega + v - v_o \quad (1)$$

$$g v = \frac{v_o}{R} + \frac{v_o - v}{R} \Rightarrow Rgv = 2v_o - v$$

$$\boxed{v = \frac{2v_o}{1+Rg}} \quad (2)$$

De (1): $v_i = v\left[2 + RCj\omega\right] - v_o$

$\Rightarrow$ (1) y (2)

$$v_i = v_o\left[\frac{2}{1+Rg}(2+RCj\omega) - 1\right] = v_o\left[\frac{4+2RCj\omega-1-Rg}{1+Rg}\right]$$

$$\frac{v_o}{v_i} = \boxed{H(j\omega) = \frac{1+Rg}{3-Rg+2RCj\omega}}$$

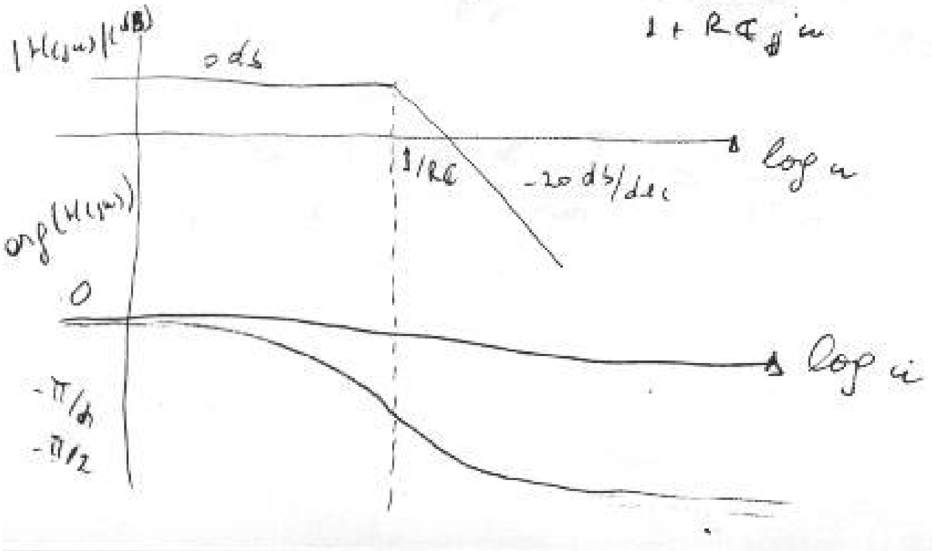
ii) $Rg = 1 \Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{1+RCj\omega} \Rightarrow$

$\omega \ll \frac{1}{RC}$

$H(j\omega) \simeq 1$

$\omega \gg \frac{1}{RC}$

$H(j\omega) \simeq \frac{1}{RCj\omega}$



Las frecuencias que se atenúan, en régimen, menos de 1 dB, son las que están por lo menos 1 octava por debajo de la frecuencia de corte del filtro pasabajos de primer orden

$$\Rightarrow \quad N \cdot \frac{2\pi}{T} < \frac{1}{2RC} \overset{N=6}{\Rightarrow} 24\pi \cdot RC < T$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{RC < \frac{T}{24\pi}}$$

Otra forma:
La atenuación en régimen está dada por $|H(j\omega)|$
$H(0) = 1$, luego decrece monótonamente

Hallar ω_1 / $|H(j\omega_1)| > -1\,dB$

$$\Rightarrow \quad 20 \log|H(j\omega_1)| > -1$$

$$\Rightarrow \quad -\log\sqrt{1+R^2C^2\omega_1^2} > -\frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{2}\log(1+R^2C^2\omega_1^2) < \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow \quad 1+R^2C^2\omega_1^2 < 10^{1/10} \Rightarrow \omega_1^2 < \frac{10^{1/10}-1}{R^2C^2}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_1 < \frac{\sqrt{10^{1/10}-1}}{RC} \simeq \frac{0,5}{RC} = \frac{1}{2RC}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{RC < \frac{T}{24\cdot\pi} \simeq \frac{T}{75,4} \simeq 0,0133 \cdot T}$$

EXAMEN DE SISTEMAS LINEALES 1 – Febrero, 2000

Problema 2

a) Sea el circuito de la figura 1.

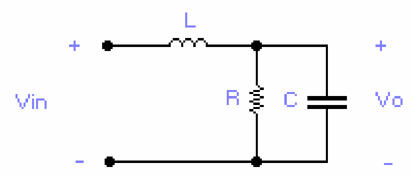


figura 1

i) Calcular impedancia vista $Z_v(jw)$ y la transferencia $H(jw) = \dfrac{V_o(jw)}{V_{in}(jw)}$

ii) Realizar los diagramas de bode de $H(jw)$, considerando :

$$\frac{1}{RC} = \frac{2}{\tau} \qquad \frac{1}{LC} = \frac{1}{\tau^2}$$

iii) Evaluar $H(jw)$ para $w_0 = \dfrac{1}{\tau}$, $w_1 = 3w_0$ y $w_2 = 5w_0$.

b) Sea la señal periódica de la figura 2.

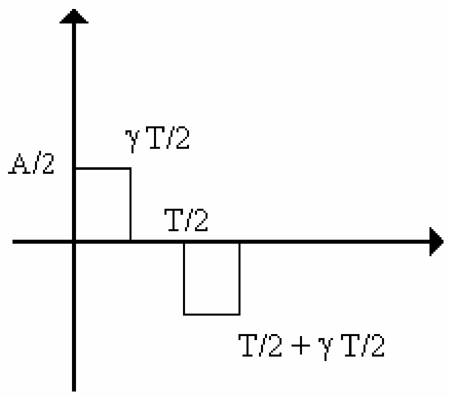


figura 2

Sea $\gamma = \dfrac{2}{3}$ y $c_n = \dfrac{-A}{4jn\pi}\left[(-1)^n - 1\right]\left(1 - e^{-jn\pi\gamma}\right)$ $\forall$n $\neq$ 0, los coeficientes de Fourier de la señal de la figura 2.

i) Hallar c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 y c_5.

ii) Se utiliza la señal de la figura 2 como entrada del circuito de la figura 1. Hallar una expresión la salida del circuito de la figura 1 en función de $H(jw)$ y de los coeficientes de Fourier de la señal de entrada, calcular k_n los coeficientes de Fourier de la salida.

iii) Para $\frac{1}{\tau}=\frac{1}{T}$ evaluar k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 y k_5.

En función de los resultados anteriores hacer las simplificaciones del caso asumiendo 1<<10, $A\sqrt{3}\pi = 311$ y $2\pi * 50 = \frac{1}{\tau}$.

Sugerencia: dejarlo expresado en función de señales sinusoidales.

c) Sea S la señal que se obtiene de la parte b) iii). En la figura 3 se encuentra el modelo del motor de inducción monofásico; éste es alimentado por una fuente de señal de valor S.

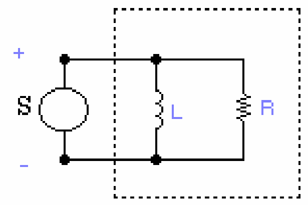


figura 3

i) Realizar un diagrama fasorial
ii) Calcular potencia activa y reactiva.
iii) Compensar la potencia reactiva para que el factor de potencia sea 1.

R = 127 Ω
L = 700 mHy

a)

i) $R \parallel \frac{1}{C\omega j} = \frac{\frac{R}{C\omega j}}{R + \frac{1}{C\omega j}} = \frac{R}{RC\omega j + 1}$

$$\boxed{Z_V(j\omega) = L\omega j + \frac{R}{RC\omega j + 1}}$$

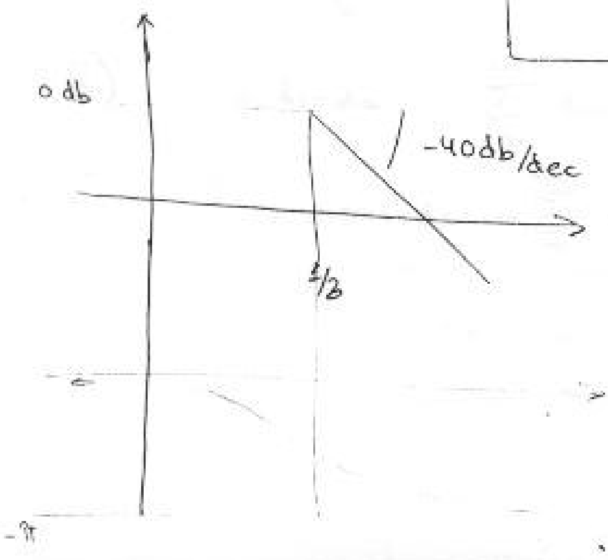
$$H(j\omega) = \frac{\frac{R}{RC\omega j+1}\,\cancel{(RC\omega j+1)}}{L\omega j(RC\omega j+1) + R}$$

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{R}{LRC(\omega j)^2 + L\omega j + R}}$$

ii) $H(j\omega) = \frac{1}{LC(\omega j)^2 + \frac{L}{R}\omega j + 1} = \frac{1}{\tau^2(\omega j)^2 + 2\tau\omega j + 1}$

$LC = \tau^2$, $RC = \tau$ $\Rightarrow \frac{L}{R} = 2\tau$

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{1}{(\tau\omega j + 1)^2}}$$



iii) $\omega_0 = 1/\tau$

$|H(j\omega_0)| = 1/2$

$\text{Arg}\, H(j\omega_0) = -90°$

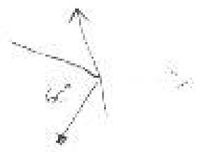
$\omega = \omega_1$

$|H(j\omega_1)| = \frac{1}{10}$

$\text{Arg}\, H(j\omega_1) = -2\,\text{Arctg}\, 3$

$$\begin{cases} |H(j\omega 2)| = \dfrac{1}{26} \\ \operatorname{Arg} H(j\omega 2) = -2\,\operatorname{Arctg} 5 \end{cases}$$

b) i) $c_0 = 0$



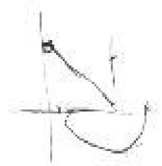
$$c_1 = \frac{+2A}{4j\pi}\left(1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right)$$

$$c_1 = +\frac{A}{2j\pi}\left[1 - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\right)\right] = \frac{+A}{2j\pi}\left[\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right]$$

$$c_2 = c_4 = 0$$

$$c_3 = \frac{A}{6j\pi}\left[1 - e^{-j2\pi}\right] = \phi$$

$$c_5 = \frac{A}{10j\pi}\left[1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}\times 5}\right] \qquad \frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$$



$$c_5 = \frac{A}{10j\pi}\left[1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right)\right]$$

$$c_5 = \frac{A}{10j\pi}\left[\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\right]$$

ii) entrada $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$ Entrada periódica salida periódica

salida $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n H\left(jn\frac{2\pi}{T}\right) e^{jn\frac{2\pi t}{T}}$

$$\boxed{K_n = c_n H\left(jn\frac{2\pi}{T}\right)}$$

iii) $K_0 = \phi$

$K_1 = \dfrac{\mathbb{C}_1}{(j+1)^2}$ $\qquad K_1 = \dfrac{A}{(2j\pi)}\left[\dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}j\right]\dfrac{1}{(j+1)^2}$

$K_2 = K_3 = K_4 = \phi$

$K_5 = \dfrac{\mathbb{C}_5}{(5j+1)^2}$ $\qquad K_5 = \dfrac{A}{10j\pi}\left[\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}j\right]\dfrac{1}{(5j+1)^2}$

$|K_1| = \dfrac{A}{2\times\pi\times 2\times 2}\sqrt{12}$ $\qquad |K_5| = \dfrac{A\sqrt{12}}{\underbrace{2\times\pi\times 2\times 2}_{=|K_1|}\times 5\times 13}$

$|K_5| = \dfrac{|K_1|}{65}$

$|K_1| >> |K_5| \geqslant |K_n|$ válido para $n \geqslant 5$

esto sale del diagrama de bode y de la forma de los coeficientes $\mathbb{C}_n$

Me queda solo el primer armónico

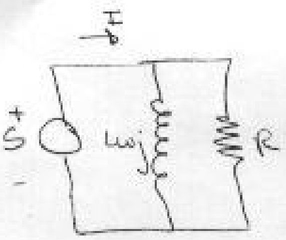
$\mathbb{C}_{-1} = \dfrac{-2A}{4j\pi}\left[1 - e^{j\frac{2\pi}{3}}\right] = \dfrac{-A}{2j\pi}\left[1 - \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}j\right)\right] = \bar{\mathbb{C}}_1$

$s(t) = \mathbb{C}_1 e^{j\omega_0 t} + \bar{\mathbb{C}}_1 e^{-j\omega_0 t} = 2\,\mathrm{Re}\,(\mathbb{C}_1 e^{j\omega_0 t})$

$\mathbb{C}_1 = \dfrac{+A}{2\pi}\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}j\right]$ $\qquad \varphi = -\mathrm{Arctg}\,\sqrt{3} \simeq -60^\circ$

$$\boxed{s(t) = \dfrac{A\sqrt{3}}{\pi}\cos(\omega_0 t - 60)}$$

c)



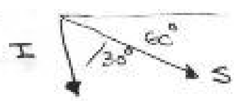
i) $$S = \frac{RL\omega j I}{R + L\omega j} \rightarrow \frac{S(R+L\omega j)}{RL\omega j} = I$$

$$I = \frac{-Sj(R+L\omega j)}{RL\omega} = \boxed{\frac{S}{RL\omega}(L\omega - Rj) = I}$$

$$\begin{cases} |I| = \dfrac{S}{RL\omega}\sqrt{(L\omega)^2 + R^2} \\ \arg I = \arg S - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{R}{L\omega}\right) \end{cases}$$

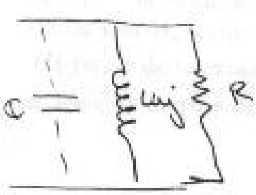
$$\begin{cases} R = 127 \\ L = 700\,mHy \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} |I| \simeq 2\,A \\ \arg I = \arg(S) - 30^\circ \end{array}}$$



ii) $$\begin{cases} P = \dfrac{|V|^2}{R} = 381\ \text{Watt} \\ Q = \dfrac{|V|^2}{L\omega} = 220\ \text{Vars} \\ \uparrow \\ S = VI \end{cases}$$

iii)



$$\left.\begin{array}{l} Q_C + Q_L = Q = 0 \\ Q_L = -Q_C \\ Q_C = -|V|^2 C\omega \end{array}\right\} \boxed{C = 14{,}47\,\mu F}$$