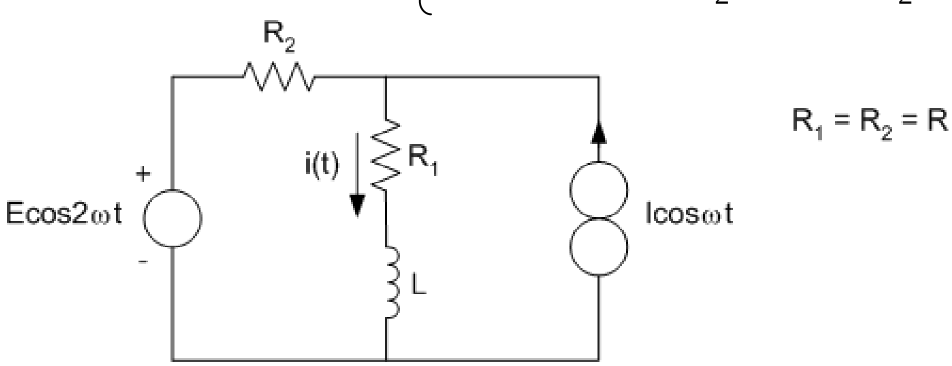
Sistemas Lineales 1
Segundo parcial, julio 2003

Recomendaciones generales:
Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.
En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar de problema y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.
Justificar claramente los pasos realizados para resolver los problemas.
Hacer problemas distintos en hojas separadas.
Poner el nombre en todas las hojas.
En lo posible usar las hojas de un solo lado.
Se recuerda que la prueba es **individual**.

Problema 1

En el circuito de la figura:
1) Hallar la corriente i(t), escrita como función del tiempo.
2) Calcular la potencia instantánea p(t) en R_1.
3) Mostrar que dicha potencia consta de términos constantes y términos periódicos, cuya frecuencia se determinará.
4) Deducir el valor medio de dicha potencia (potencia activa en R_1).

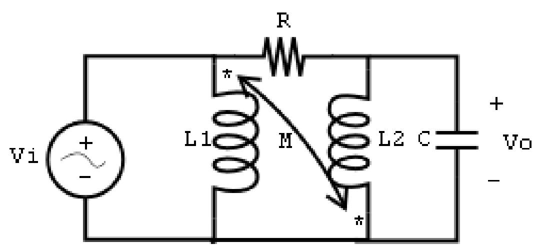
Nota: se recuerdan las fórmulas:
$$\begin{cases} \cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2} \\ \cos a \cdot \cos b = \dfrac{1}{2}\cos(a-b) + \dfrac{1}{2}\cos(a+b) \end{cases}$$



Problema 2

a) En el circuito de la figura, calcular la transferencia $H(j\omega)=\dfrac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$, sabiendo que

$$\begin{cases} L_2 = R^2.C+\dfrac{M}{10} \\ L_1 = 10.M \end{cases}$$



b) Asumiendo que la transferencia de la parte anterior da:

$$H(jw)=10w_0.\frac{jw-w_0}{(jw)^2+10w_0\,jw+100w_0^2}$$

donde $w_0=\dfrac{1}{10R.C}$, se pide realizar los diagramas asintóticos de Bode de $H(jw)$.
Bosquejar el diagrama real.

c) Calcular el módulo de $H(jw_o)$ y $H(j10w_o)$ en decibeles y sus argumentos.

d) Hallar $v_0(t)$ si la entrada es $v_i(t)=1V.(\cos(w_0t)+\cos(10w_0t))$.

Problema 3

Dado el circuito de la figura, en donde:

$w = 100p$

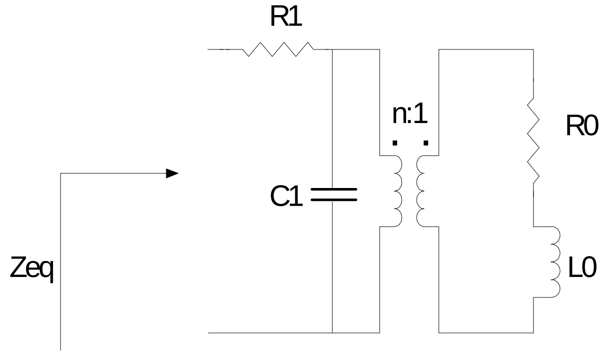
$n = 5$

$R_0 = 5\Omega$

$R_1 = 12\Omega$

$C_1 = 1mf$

$L_0 = 100mHy$



a) Hallar Z_{eq} en función de los parametros del circuito. Justificar debidamente el trabajo con el transformador. (Verificar que numéricamente $Z_{eq} \approx 1057\angle 77$ º).

b) Se conecta una fuente sinusoidal $v(t) = 220\sqrt{2}\cos(100p\ t)$ a Z_{eq} .

i) Hallar V_C (fasor de tensión en bornes del condensador), V_{R1} (fasor de tensión en bornes de R_1), I_C (fasor de corriente por el condensador) e I_{R1} (fasor de corriente en R_1).

ii) Realizar un diagrama fasorial que involucre a los fasores V (fasor de tensión de entrada), V_C , V_{R1} , I_C e I_{R1} .

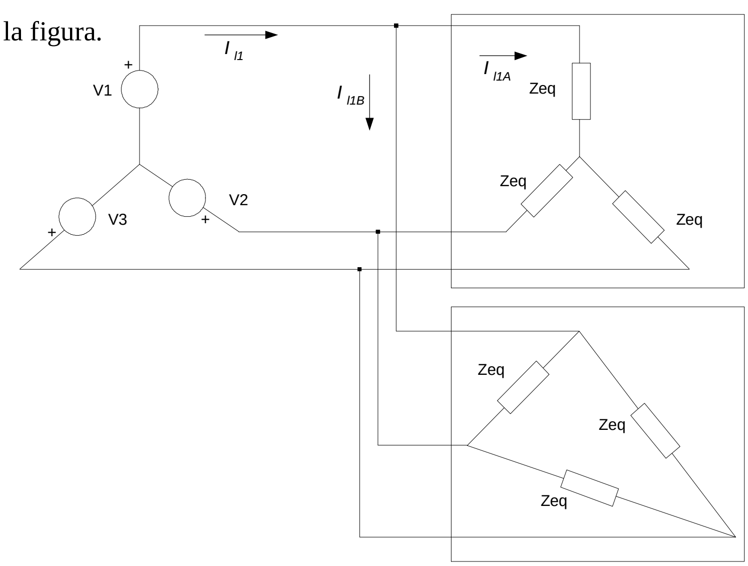
iii) Calcular la potencia activa y reactiva que se consume a la fuente de entrada.

c) Dado el circuito trifásico de la figura.

$v_1(t) = 220\sqrt{2}\cos(100p\ t)$

$v_2(t) = 220\sqrt{2}\cos(100p\ t + 2p/3)$

$v_3(t) = 220\sqrt{2}\cos(100p\ t + 4p/3)$



i) Hallar I_{l1A} (fasor de corriente de línea 1 en el circuito en estrella), I_{l1B} (fasor de corriente de línea 1 en el circuito en triángulo) e I_{l1} (fasor de corriente total de línea 1).

ii) Hallar las expresiones temporales de las corrientes de línea $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $i_3(t)$.

iii) Hallar la potencia activa y reactiva **consumidas al sistema de fuentes**.

iv) Compensar el factor de potencia, indicar qué elementos colocar, dónde y sus valores correspondiente. **Justificar.**

Problema 4

a) Hallar la distancia **exacta** en decibeles entre el Diagrama de Bode de módulo real y el asintótico de la transferencia $H(jw) = \dfrac{1}{\left(1 + j\dfrac{w}{a}\right)^2}$, para la frecuencia $w = 10.a$ (*a>0*).

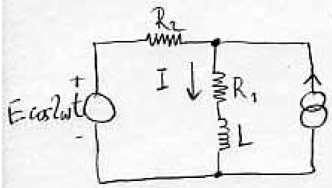
b) i.- Hallar la TdF de $Y(t).e^{-at}$, *a>0.*

ii.- **Utilizando la parte anterior** hallar la TdF de $Y(t).e^{-at} * Y(t).e^{-at}$, *a>0*

c) **Aplicando la Identidad de Parseval** calcular la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} T^2 .\sin c^2 (T\,x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen^2(p\;T\;x)}{(p\;x)^2}dx$, *T>0.*

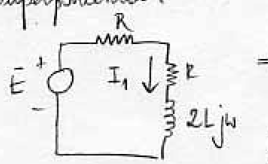
SISTEMAS LINEALES 1 : SEGUNDO PARCIAL 2003 (1)

Problema 1:



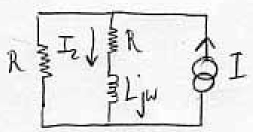
$R_1 = R_2 = R$

(1) Superponiendo:



$$\Rightarrow I_1 = \frac{E}{2R+2Lj\omega} = \frac{E}{2}\,\frac{1}{R+Lj\omega} = \frac{E}{2}\,\frac{1}{\sqrt{R^2+L^2\omega^2}} \angle -\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

En el tiempo resulta: $i_1(t) = \underbrace{\frac{E}{2\sqrt{R^2+L^2\omega^2}}}_{A} \cos\left(2\omega t - \underbrace{\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)}_{\alpha}\right) = A\cos(2\omega t - \alpha)$



Planteando el divisor de corriente: $I_2 = \frac{\frac{1}{R+Lj\omega}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R+Lj\omega}}\, I = \frac{R}{2R+Lj\omega}\, I$

En el tiempo resulta: $i_2(t) = \underbrace{\frac{R\,I}{\sqrt{4R^2+L^2\omega^2}}}_{B} \cos\left(\omega t - \underbrace{\arctan\left(\frac{L\omega}{2R}\right)}_{\beta}\right) = B\cos(\omega t - \beta)$

$$\Rightarrow \boxed{i(t) = i_1(t) + i_2(t)}$$

(2) $\boxed{p(t) = Ri^2 = R\left[A^2\cos^2(2\omega t - \alpha) + B^2\cos^2(\omega t - \beta) + 2AB\cos(2\omega t - \alpha)\cos(\omega t - \beta)\right]}$

(3) Expandiendo la expresión anterior mediante las identidades trigonométricas siguientes:

$$p(t) = R\left[\frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2} + \frac{A^2}{2}\cos(4\omega t - 2\alpha) + \frac{B^2}{2}\cos(2\omega t - 2\alpha) + AB\cos(\omega t \quad) + AB\cos(3\omega t - 2\alpha)\right]$$

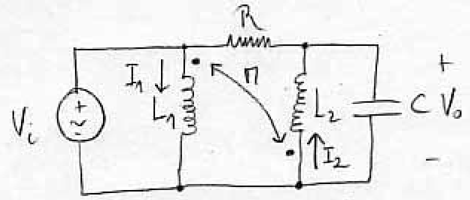
Por lo tanto, tiene términos constantes y periódicos de pulsación $\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega$.

(4) $P = R\left[\frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2}\right]$ pues las demás integrales se anulan:

$$\Rightarrow \boxed{P = \frac{R\,E^2}{8(R^2+L^2\omega^2)} + \frac{R^3 I^2}{2(4R^2+L^2\omega^2)}}$$

Problema 2: (2)

(a)



$L_2 = R^2C + \frac{\Pi}{10}$

$L_1 = 10\Pi$

Planteando las ecuaciones del transformador:

$V_i = L_1(j\omega)I_1 + \Pi(j\omega)I_2 \Rightarrow I_1 = \frac{V_i}{L_1(j\omega)} - \frac{\Pi}{L_1}I_2$

$-V_o = L_2(j\omega)I_2 + \Pi(j\omega)I_1$ y eliminando I_1 resulta: $-V_o = \left(L_2 - \frac{\Pi^2}{L_1}\right)(j\omega)I_2 + \frac{\Pi}{L_1}V_i$

Planteando el nudo de salida: $\frac{V_i - V_o}{R} + I_2 = V_oC(j\omega) \Rightarrow I_2 = V_o\left(\frac{RC(j\omega)+1}{R}\right) - \frac{V_i}{R}$

Notando que $L_2 - \frac{\Pi^2}{L_1} = R^2C$ y eliminando I_2: $-10V_o\left[(RC)^2(j\omega)^2 + RC(j\omega) + 1\right] = V_i(1 - 10RC(j\omega))$

$$\Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{1}{10}\,\frac{10RC(j\omega) - 1}{(RC)^2(j\omega)^2 + RC(j\omega) + 1}}$$

(b) $\omega_o = \frac{1}{10RC}$, $H(j\omega) = \frac{1}{RC}\,\frac{\left(j\omega - \frac{1}{10RC}\right)}{(j\omega)^2 + \frac{j\omega}{RC} + \frac{1}{(RC)^2}} \Rightarrow H(j\omega) = 10\omega_o\,\frac{(j\omega - \omega_o)}{(j\omega)^2 + 10\omega_o(j\omega) + 100\omega_o^2}$

El denominador tiene raíces complejas conjugadas con $\xi = \frac{1}{2}$, $\omega_n = 10\omega_o$

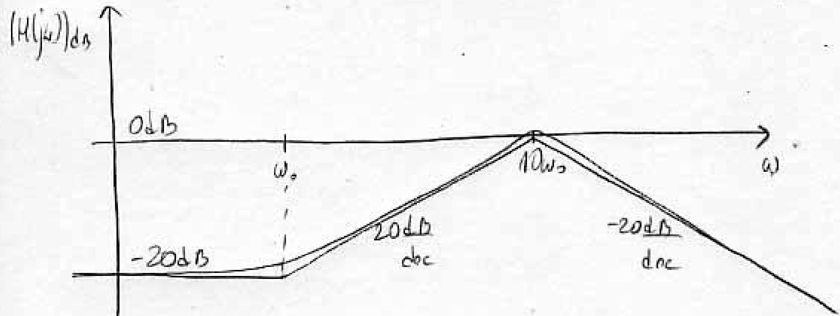
Para $\omega \ll \omega_o \Rightarrow H(j\omega) \simeq -\frac{1}{10} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq -20dB \\ \arg(H(j\omega)) \simeq \pi \end{cases}$

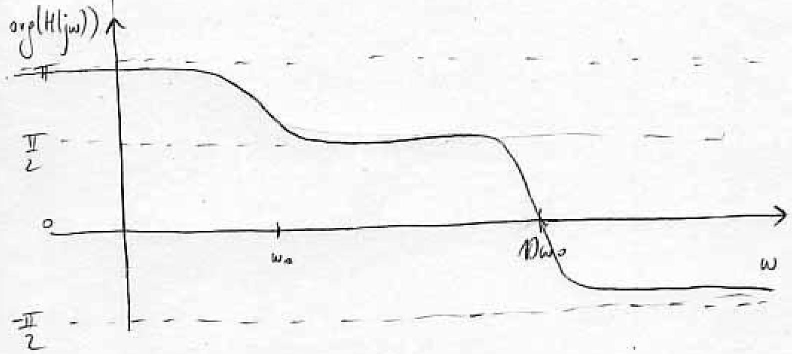
Para $\omega_o \ll \omega \ll 10\omega_o \Rightarrow H(j\omega) \simeq \frac{j\omega}{10\omega_o} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq -20\log 10\omega_o + 20\log\omega \ dB \\ \arg(H(j\omega)) \simeq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Para $\omega \gg 10\omega_o \Rightarrow H(j\omega) \simeq \frac{10\omega_o}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq 20\log 10\omega_o - 20\log\omega \ dB \\ \arg(H(j\omega)) \simeq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Siendo $\xi > 0$ sabemos que el término de segundo orden en el denominador introduce un retardo de fase de π.

3





c) $H(j\omega_0) = \dfrac{10(j-1)}{99+10j} \Rightarrow |H(j\omega_0)| = \dfrac{10\sqrt{2}}{\sqrt{100+99^2}} \simeq 0{,}142 \Rightarrow \boxed{|H(j\omega_0)|_{dB} \simeq -16{,}9\,dB}$

$arg(H(j\omega_0)) = \frac{3\pi}{4} - arctan\left(\frac{10}{99}\right) \simeq 2{,}45 \Rightarrow \boxed{arg(H(j\omega_0)) \simeq 2{,}45\,rad}$

$H(j10\omega_0) = \dfrac{10(10j-1)}{100j} \Rightarrow |H(j10\omega_0)| = \dfrac{\sqrt{101}}{10} \simeq 1{,}00499 \Rightarrow \boxed{|H(j10\omega_0)| \simeq 0{,}043\,dB}$

$arg(H(j10\omega_0)) = arctan(10) - \frac{\pi}{2} \simeq -0{,}099 \Rightarrow \boxed{arg(H(j10\omega_0)) \simeq -0{,}099\,rad}$

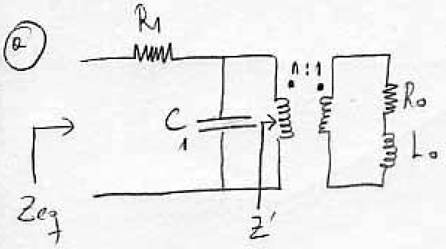
d) $v_i(t) = 1V\,[\cos(\omega_0 t) + \cos(10\omega_0 t)]$

la salida en régimen será $v_o(t) = |H(j\omega_0)|\cos(\omega_0 t + arg(H(j\omega_0))) + |H(j10\omega_0)|\cos(10\omega_0 t + arg(H(j10\omega_0)))$

$\Rightarrow \boxed{v_o(t) = 0{,}142\,V\cos(\omega_0 t + 2{,}45) + 1{,}00499\,V\cos(10\omega_0 t - 0{,}099)}$

Problema 3: (4)

a)



$\omega = 100\pi$, $n = 5$, $R_o = 5\Omega$, $R_1 = 12\Omega$

$C_1 = 1uF$, $L_o = 100mHy$

Sabemos que la impedancia vista en bornes del primario del transformador ideal es: $Z' = n^2(R_o + L_o(j\omega))$

$$\Rightarrow Z_{eq} = R_1 + \frac{1}{C_1 j\omega} \| n^2(R_o + L_o j\omega) = R_1 + \frac{n^2(R_o + Lj\omega)}{n^2 L_o C_1 (j\omega)^2 + n^2 R_o C_1 (j\omega) + 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_{eq} = \frac{R_1[n^2(L_o C_1 (j\omega)^2 + n^2 R_o C_1 (j\omega) + 1] + n^2(R_o + Lj\omega)}{n^2 L_o C_1 (j\omega)^2 + n^2 R_o C_1 (j\omega) + 1}}$$

$$\boxed{Z_{eq} = (231{,}7 + j1031)\Omega = 1057\Omega\angle 77°}$$

b) $v(t) = 220\sqrt{2}\cos(100\pi t)$ conectado a Z_{eq}:

i) Del divisor de tensión: $V_c = \dfrac{\frac{1}{C_1 j\omega} \| n^2(R_o + L_o j\omega)}{R_1 + \frac{1}{C_1 j\omega} \| n^2(R_o + L_o j\omega)} V_i = \dfrac{Z_{eq} - R_1}{Z_{eq}} V_i$

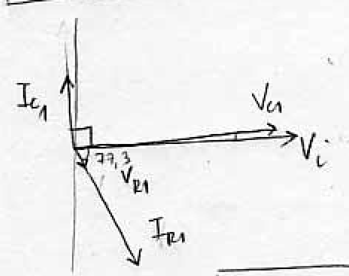
Tomando $V_i = 220V\angle 0°$ $\Rightarrow \boxed{V_{C_1} = (219{,}5 + 2{,}44j)V = 219{,}46V\angle 0{,}636°}$

$V_{R_1} = V_i - V_c \Rightarrow \boxed{V_{R_1} = (0{,}548 - j2{,}44)V = 2{,}49\,V\angle -77{,}3°}$

$I_{C_1} = C_1 j\omega V_{C_1} \Rightarrow \boxed{I_{C_1} = (-0{,}765 + 68{,}9j)mA = 68{,}94mA\angle 90{,}636°}$

$I_{R_1} = \dfrac{V_{R_1}}{R_1} \Rightarrow \boxed{I_{R_1} = 0{,}207A\angle -77{,}3°}$

(ii)



V_{R_1} colineal a I_{R_1}

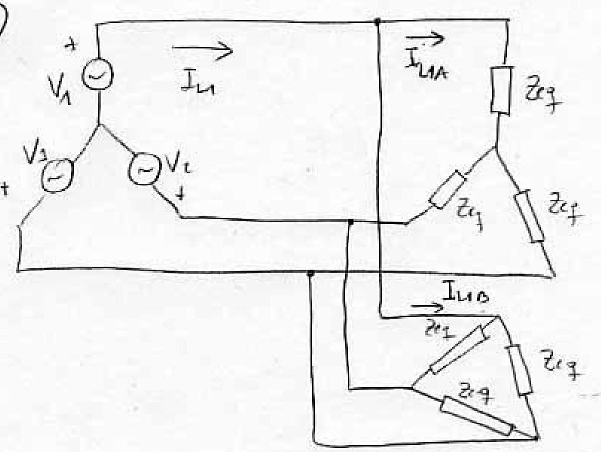
I_{C_1}, 90° en adelanto de V_{C_1}

(iii) $P = Re[V_i \overline{I_{R_1}}] \Rightarrow \boxed{P = 10W}$

$Q = Im[V_i \overline{I_{R_1}}] \Rightarrow \boxed{Q = 44{,}7Var}$

(5)

(c)



$V_1(t) = 220\sqrt{2}\cos(100\pi t)$

$V_2(t) = 220\sqrt{2}\cos(100\pi t + \frac{2\pi}{3})$

$V_3(t) = 220\sqrt{2}\cos(100\pi t + \frac{4\pi}{3})$

(i) Transfigurando la carga en triángulo, obtenemos una estrella con impedancias de valores $\frac{Z_{eq}}{3}$. Tenemos, dos estrellas en paralelo al sistema de fuentes. Considerando el equivalente monofásico, observamos que V_i se aplica a Z_{eq} en una estrella ó a $\frac{Z_{eq}}{3}$ en la otra estrella $\Rightarrow$ $\boxed{I_{L1A} = I_{R1}}$, $\boxed{I_{L1B} = 3 I_{R1}}$, $\boxed{I_{L1} = 4 I_{R1}}$

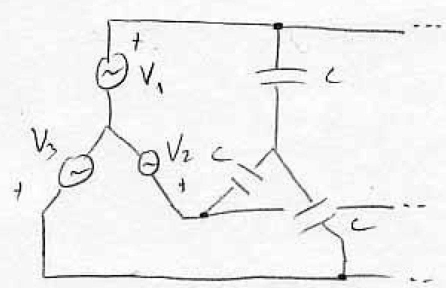
(ii)

$$\boxed{\begin{aligned} i_{L1}(t) &= \sqrt{2}\times 4\times 0{,}207A\cos(100\pi t - 1{,}35) \\ i_{L2}(t) &= \sqrt{2}\times 4\times 0{,}207A\cos(100\pi t + \tfrac{2\pi}{3} - 1{,}35) \\ i_{L3}(t) &= \sqrt{2}\times 4\times 0{,}207A\cos(100\pi t + \tfrac{4\pi}{3} - 1{,}35) \end{aligned}}$$

(iii) $P_{Tri} = 3\,\mathrm{Re}[V_i \bar{I}_i] = 12\,\mathrm{Re}[V_i \bar{I}_{R1}] = 12\,P \Rightarrow \boxed{P_{Tri} = 120{,}47W}$

$Q_{Tri} = 12\,Q \Rightarrow \boxed{Q_{Tri} = 536{,}2\,VAr}$

(iv) Coloco un banco de condensadores en estrella en paralelo con el sistema de fuentes, de forma de que entreguen la potencia reactiva consumida por la carga.



$\Rightarrow Q_C + Q = 0,\ -3C\omega|V_i|^2 + Q = 0$

$\Rightarrow C = \frac{Q}{3\omega|V_i|^2} \Rightarrow \boxed{C = 11{,}75\mu F}$

Problema 4: 6

a) $H(j\omega) = \dfrac{1}{\left(1+j\frac{\omega}{a}\right)^2}$, $\omega_s = 10a$

En el asintótico, para frecuencias mayores que a, se tiene una caída a $-40\frac{dB}{dec}$. Entonces estoy a una década, por lo tanto caigo $-40dB$ respecto del valor a bajas frecuencias que es $0\,dB$ $\Rightarrow |H(j\omega_s)|_{asin\,dB} = -40dB$

$|H(j\omega_s)|_{real} = \dfrac{1}{101} \Rightarrow |H(j\omega_s)|_{real\,dB} = -20\log(101) = -40{,}0864\,dB$

$\Rightarrow \boxed{Dist_{\omega_s} = 0{,}0864\,dB}$

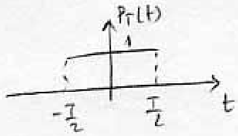
b) (i) $\mathcal{F}[Y(t)e^{-at}] = \int_{-\infty}^{\infty} Y(t)e^{-at}e^{-j2\pi ft}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(j2\pi f+a)t}dt = \left.\dfrac{e^{-(j2\pi f+a)t}}{-(j2\pi f+a)}\right|_0^{+\infty}$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}[Y(t)e^{-at}] = \dfrac{1}{j2\pi f+a}}$

(ii) $\mathcal{F}[Y(t)e^{-at} * Y(t)e^{-at}] = \mathcal{F}[Y(t)e^{-at}]\,\mathcal{F}[Y(t)e^{-at}] = \mathcal{F}[Y(t)e^{-at}]^2$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}[Y(t)e^{-at} * Y(t)e^{-at}] = \dfrac{1}{(j2\pi f+a)^2}}$

c)



$\mathcal{F}[p_T(t)] = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi ft}dt = \left.\dfrac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f}\right|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \dfrac{\sin(\pi Tf)}{\pi f}$

De la identidad de Parseval sabemos que $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\sin^2(\pi Tf)}{(\pi f)^2}df = \int_{-\infty}^{\infty} p_T^2(t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = T$

$\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} T^2 \operatorname{sinc}^2(Tx)\,dx = T}$