Examen de Sistemas Lineales 1 (extraordinario)

21 de abril del 2003

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo y al menos dos preguntas completas. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. En las preguntas teóricas, se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Ejercicio 1

El siguiente es el modelo por fase de un motor de inducción trifásico. Por fase se tiene el circuito de la figura 1, en la figura 2 se tiene el equivalente trifásico del motor.

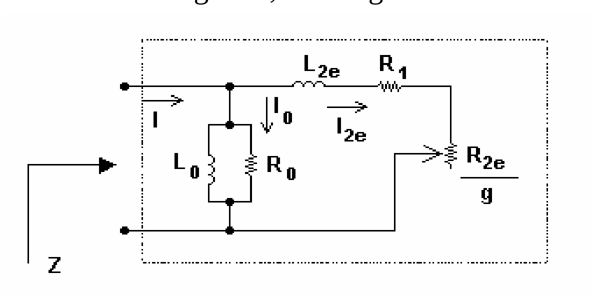


Figura 1

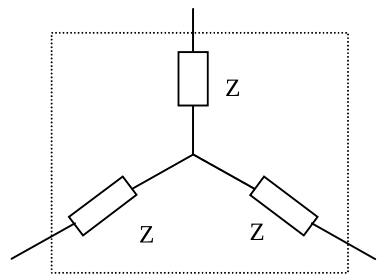
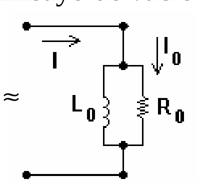


Figura 2

El parámetro g (deslizamiento) se define como $g = \dfrac{w_s - w}{w_s}$, en donde w_s es fija y se la llama frecuencia (angular) de sincronismo y w es la velocidad angular del eje del motor. Observar que g varía, y con ello Z, de acuerdo a dónde está el punto de funcionamiento del motor.

Se desconfía de los parámetros que aparecen en la hoja del fabricante, por lo cual se decide realizar los ensayos pertinentes. Ambos ensayos son realizados con un sistema equilibrado de fuentes conectadas en estrella. Se indican los valores eficaces de tensión o corriente.

- Ensayo de vacío ($g \approx 0$)

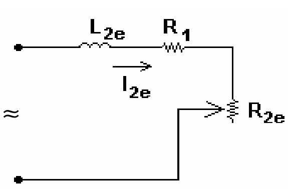
$Z \approx$ 

$P_{act} = 1140 watts$

$Q_{react} = 11990 \text{var}$

$S = V\,\overline{I}$, V_{eff} = 380 voltios

- Ensayo de rotor bloqueado ($g = 1$)

$Z \approx$ 

$P_{act} = 6732.9 watts$

$Q_{react} = 6768.7 \text{var}$

$R_1 = 1\Omega$, I2e$_{eff}$ = 33.5 A

a) **i)** Expresar I_{2e} (fasor de corriente) en función de R_0, L_0, R_1, R_{2e}, L_{2e}, w (frecuencia eléctrica), g (deslizamiento) y V_{in} (fasor de tensión en bornes de Z).

ii) Conociendo que $0 < g \leq 1$, graficar (bosquejar) $|I_{2e}|$ en función de g, considerando el resto de los parámetros constantes.

Observación: los valores de $g \approx 1$ implican que el motor no está casi girando; esta condición ocurre al menos en el arranque del mismo.

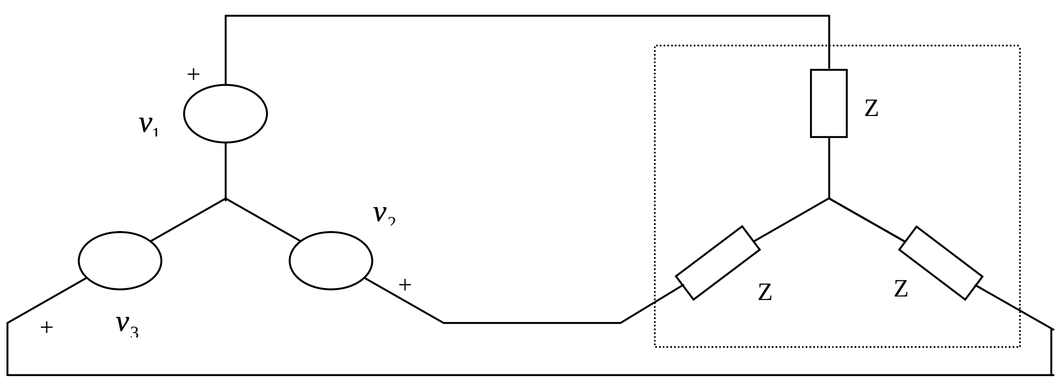
b) Al momento del arranque ($g \approx 1$) las corrientes involucradas son elevadas en comparación con las corrientes de régimen ($g << 1$) o punto de diseño. Por esta razón se buscan métodos de arranque con corrientes menores que comiencen a hacer girar el motor, luego mediante mecanismos eléctronicos se pasa a las condiciones de diseño.

Se dispone de 3 fuentes equilibradas, $v_1(t), v_2(t)$ y $v_3(t)$, de valor eficaz 380 voltios. Decidir que conexionado de fuentes (estrella o triángulo) minimiza las corrientes de arranque, teniendo presente que el modelo del motor es en estrella. **Justificar la decisión.**

c) Hallar los parámetros restantes del modelo, en base a los ensayos. Verificar que los valores aproximados son:

$R_0 \approx 380\Omega$ $L_0 \approx 115mHy$ $R_{2e} \approx 1\Omega$ $L_{2e} \approx 6,4mHy$

d) Se conecta el motor según se indica en la figura.



En donde: $g = 0,01$ y la tensión eficaz es 380 voltios.

i) Hallar los fasores de corrientes de líneas I_1, I_2 e I_3.

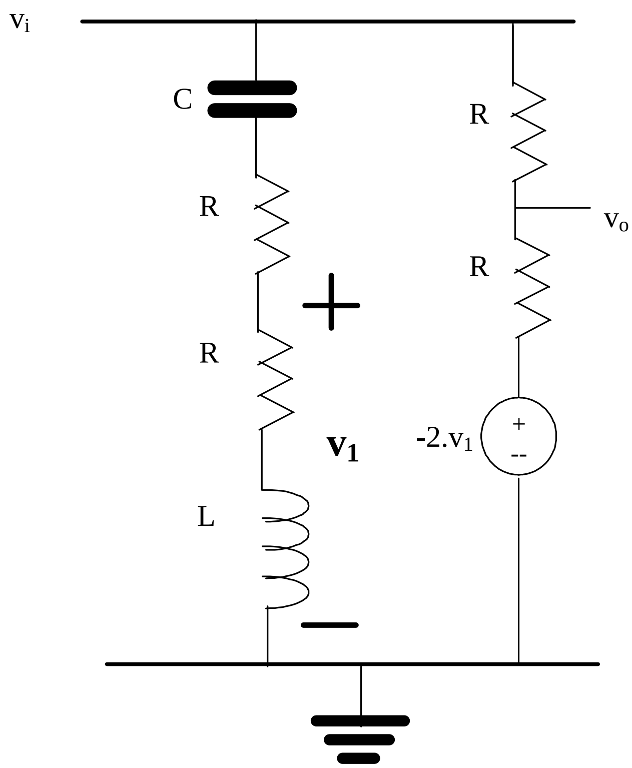
ii) Realizar un diagrama fasorial en donde se involucren I_1, I_2, I_3, V_1, V_2 y V_3.

iii) Hallar la potencia activa y reactiva consumida por el motor.

iv) Compensar la potencia reactiva del sistema; indicar qué componentes utilizaría, en dónde los ubicaria y el valor de los mismos.

Ejercicio 2

a) En el circuito de la figura hallar la transferencia $H(j\omega)=V_o(j\omega)/V_i(j\omega)$.



b) Realizar los diagramas asintóticos de Bode de $H(j\omega)$ y bosquejar los reales, sabiendo que se cumple $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}} = \frac{5}{R.C}$

c)

i) Según los diagramas de la parte anterior, determinar la frecuencia angular ω' a la cual se cumple que si la entrada es $v_i = 1V\cos(\omega' t)$, la respectiva salida es $v_o(t) = V_0 \cos(\omega' t - \frac{\pi}{4})$.

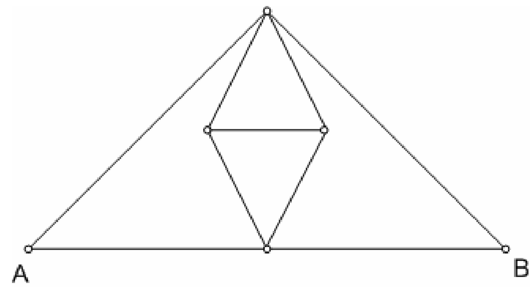
ii) Utilizar ahora la expresión de $H(j\omega)$ para obtener ω' y V_0; comparar resultados con parte anterior.

d) Calcular la salida $v_o(t)$ para las siguientes entradas:

i) $v_i = 1V\cos(\omega_0 t)$

ii) $v_i = 1V\cos(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{10}})$

Pregunta 1



En la estructura de la figura, cada segmento es un resistor r.
Calcular la resistencia equivalente entre A y B.
(Si quiere usar la transfiguración estrella triángulo, se la recordamos: la admitancia que en el polígono une los nudos i y j vale $Y_{ij} = \frac{Y_i Y_j}{\sum Y_h}$, siendo Y_i las admitancias de cada rama de la estrella).

Pregunta 2

Sea φ(x) una función de C^∞ (infinitamente derivable, **sin restricciones de soporte**).
Indicar en qué casos está bien definida <T,φ>:

a) T = Y(t) **b)** T = Y(-t) **c)** T = Y(t).Y(2-t) **d)** T = δ(t+a) **e)** T = $\frac{Y(t)}{\sqrt{t}}$

f) T = $\frac{Y(t).Y(2-t)}{\sqrt{t}}$ **g)** T = $\frac{Y(t)Y(2-t)}{t^2}$

(Se sugiere dibujar un esquema de los distintos T).

Pregunta 3

a) Sea *f(t)* la función idénticamente igual a 1. Mostrar que si T es una distribución cualquiera, entonces $\left\langle T_f(x) \otimes T(y), j(x,y) \right\rangle = \left\langle T(y), \int_{-\infty}^{+\infty} j(x,y)dx \right\rangle$.
b) Mostrar que si T_P es la distribución asociada a un pulso unitario cualquiera de ancho *L*, entonces $T_P * T_f$ es la distribución asociada a una constante, idénticamente igual a *L* (sugerencia: aplicar el Teorema de la regularizada o aplicar la definición de producto convolución).
c) **<u>Usando la definición del producto convolución</u>**, probar la identidad $\left\langle (S*T)', j \right\rangle = \left\langle S*T', j \right\rangle$, siendo *S* y *T* distribuciones cualesquiera y j una función cualquiera C^∞ y de soporte acotado.

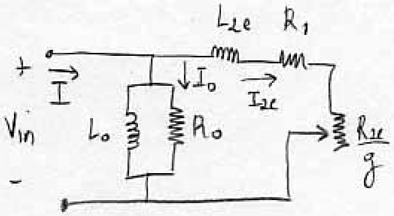
Pregunta 4

a) Definir el concepto de no distorsión para un sistema lineal.
b) Sea un sistema lineal de respuesta impulsiva *h(t).* Hallar la condición que debe cumplir la transferencia para que el sistema no distorsione.
c) Comentar los distintos tipos de distorsión que conoce.

SISTEMAS LINEALES 1 ABRIL 2003 (1)

Ejercicio 1:

(a) (i)



$$\boxed{I_{2e} = \frac{V_{in}}{R_1 + \frac{R_{2e}}{g} + L_{2e} j\omega}}$$

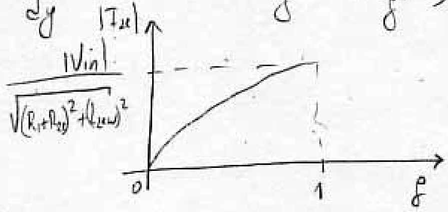
(ii) $|I_{2e}| = \dfrac{|V_{in}|}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R_{2e}}{g}\right)^2 + (L_{2e}\omega)^2}}$

Cuando $g \to 0 \Rightarrow I_{2e} \to 0$

Cuando $g \to 1 \Rightarrow I_{2e} \to \dfrac{|V_{in}|}{\sqrt{(R_1+R_{2e})^2 + (L_{2e}\omega)^2}}$

Veamos si tiene extremos. Para ello estudio el radicando:

$f(g) = \left(R_1 + \frac{R_{2e}}{g}\right)^2 + (L_{2e}\omega)^2 \Rightarrow \frac{df(g)}{dg} = 2\left(R_1 + \frac{R_{2e}}{g}\right)^2 \left(-\frac{R_{2e}}{g^2}\right)$ que no se anula nunca para $R_1, R_{2e} > 0$



(b) Motor en estrella y alimento con tres fuentes de valor eficaz 380V.

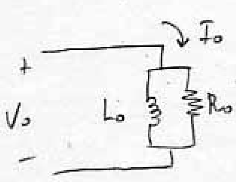
Si conecto en estrella la tensión de fase aplicada a la carga es 380V.

$\Rightarrow I_{2e\,\text{ARRANQUE}\,\lambda} \simeq \dfrac{380V}{|Z_{\text{ARRANQUE}}|}$

Si conecto en triángulo la tensión compuesta resulta ser 380V

$\Rightarrow I_{2e\,\text{ARRANQUE}\,\Delta} \simeq \dfrac{380V}{\sqrt{3}\,|Z_{\text{ARRANQUE}}|} \Rightarrow$ Es menor $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Conecto en triángulo}}$

(c) Ensayo de vacío ($g \simeq 0$)



$P = 1140\,W$

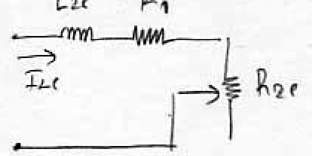
$Q = 11990\,Var$

$V_{eff} = 380V$

$\Rightarrow P = 3\dfrac{|V_{eff}|^2}{R_0} \Rightarrow R_0 = \dfrac{3V_{eff}}{P} \Rightarrow \boxed{R_0 = 380\Omega}$

$\Rightarrow Q = 3\dfrac{|V_{eff}|^2}{L_0\omega} \Rightarrow L_0 = \dfrac{3V_{eff}^2}{Q\omega} \Rightarrow \boxed{L_0 = 115\,mHy}$

Ensayo a rotor bloqueado ($s = 1$) (2)



$P = 6732,9 W$

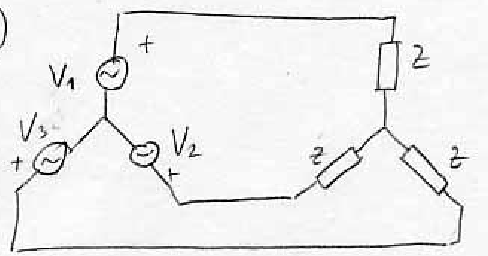
$Q = 6768,7 VAr$

$R_1 = 1\Omega$, $|I_{2eff}| = 33,5 A$

$\Rightarrow P = 3(R_{2e} + R_1)|I_{2eff}|^2 \Rightarrow R_{2e} = \frac{P}{3|I_{2eff}|^2} - R_1 \Rightarrow \boxed{R_{2e} = 1\Omega}$

$Q = 3L_{2e}\omega|I_{2e}|^2 \Rightarrow L_{2e} = \frac{Q}{3\omega|I_{2e}|^2} \Rightarrow \boxed{L_{2e} = 6,4 mHy}$

(1)



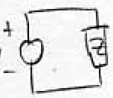
$v_1(t) = \sqrt{2}\, 380 \cos(\omega t)$

$v_2(t) = \sqrt{2}\, 380 \cos(\omega t + 120°)$

$v_3(t) = \sqrt{2}\, 380 \cos(\omega t + 240°)$

$s = 0,01$ en el punto de trabajo

(i) El equivalente por fase es:

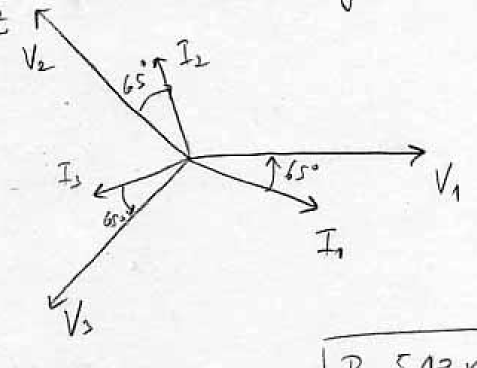


$Z = R_0 \| L_0 j\omega \| (R_1 + \frac{R_{2e}}{s} + L_{2e}\omega j) = (13,41 + 29,84j)\Omega = 32,7\Omega\angle 65,8°$

$\Rightarrow I_i = \frac{V_i}{Z} \Rightarrow I_1 = (4,76 - j10,6) A \Rightarrow$

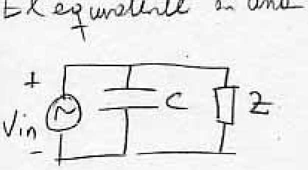
$$\boxed{\begin{aligned} I_1 &= 11,6A\angle -65° \\ I_2 &= 11,6A\angle -65+120° \\ I_3 &= 11,6A\angle -65+240° \end{aligned}}$$

(ii)



(iii) $P = 3\,\mathrm{Re}[V_1 \bar{I}_1] \Rightarrow \boxed{P = 5,43 kW}$, $Q = 3\,\mathrm{Im}[V_1 \bar{I}_1] \Rightarrow \boxed{Q = 12,1 kVAr}$

(iv) Conecto un banco de condensadores en estrella y en paralelo a la fuente. El equivalente en una fase resulta:

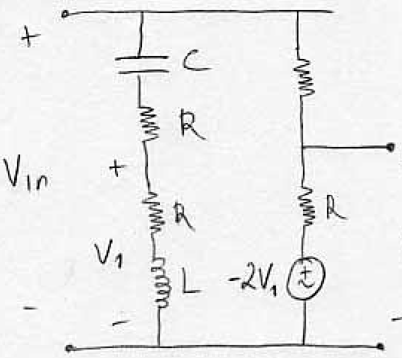


$Q_c + Q = 0 \Rightarrow -3C\omega|V_{in}|^2 + Q = 0$

$\Rightarrow C = \frac{Q}{3\omega|V_{in}|^2} \Rightarrow \boxed{C = 89 \mu F}$

Ejercicio 2: (3)

(a)



Planteando ecuaciones de nudos:

$$\frac{V_{in}-V_1}{R+\frac{1}{Cj\omega}} = \frac{V_1}{R+Lj\omega} \Rightarrow V_{in} = V_1\left(1 + \frac{RCj\omega+1}{Cj\omega(R+Lj\omega)}\right)$$

$$\frac{V_{in}-V_o}{R} = \frac{V_o+2V_1}{R} \Rightarrow V_1 = -V_o + \frac{V_{in}}{2}$$

Eliminando V_1:

$$\Rightarrow \frac{V_{in}}{2}\left[1 - \frac{RCj\omega+1}{Cj\omega(R+Lj\omega)}\right] = -V_o\left[1+\frac{RCj\omega+1}{Cj\omega(R+Lj\omega)}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{V_{in}}{2}\left(LC(j\omega)^2-1\right) = -V_o\left(LC(j\omega)^2+2RCj\omega+1\right) \Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{1}{2}\,\frac{\omega^2+\frac{1}{LC}}{(j\omega)^2+2\frac{R}{L}(j\omega)+\frac{1}{LC}}}$$

(b) $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{5}{RC} \Rightarrow \frac{R}{L} = 5\omega_o$

Busco raíces del denominador: $(j\omega)^2 + 10\omega_o j\omega + \omega_o^2$

$$\Rightarrow j\omega = \frac{-10\omega_o \pm\sqrt{100\omega_o^2-4\omega_o^2}}{2} = \omega_o\left(-5\pm2\sqrt{6}\right) \approx \begin{cases} -\frac{1}{10} \\ -10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{2}\,\frac{\omega^2+\omega_o^2}{\left(j\omega+\frac{\omega_o}{10}\right)\left(j\omega+10\omega_o\right)}$$

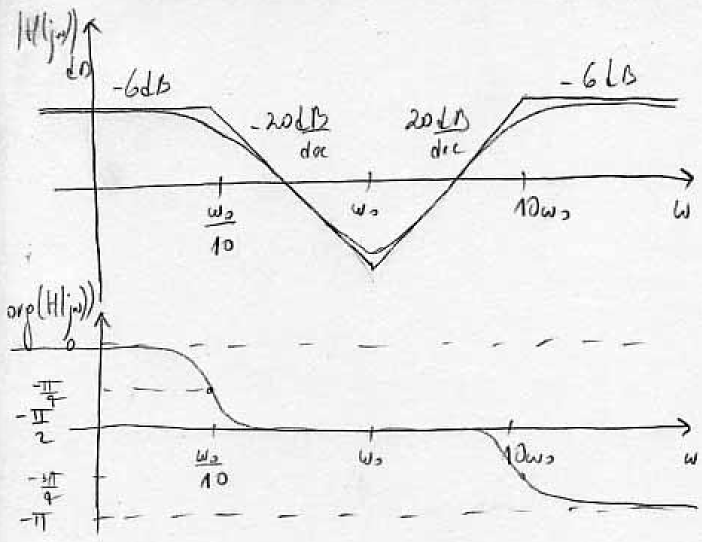
Para $\omega \ll \frac{\omega_o}{10} \Rightarrow H(j\omega) \simeq \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq -6\text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) \simeq 0 \end{cases}$

Para $\frac{\omega_o}{10} \ll \omega \ll \omega_o \Rightarrow H(j\omega) \simeq \frac{1}{20}\frac{\omega_o}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq 20\log\left(\frac{\omega_o}{20}\right) - 20\log\omega \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) \simeq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Para $\omega_o \ll \omega \ll 10\omega_o \Rightarrow H(j\omega) \simeq -\frac{j\omega}{20\omega_o} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq -20\log(20\omega_o) + 20\log\omega \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) \simeq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Para $\omega \gg 10\omega_o \Rightarrow H(j\omega) \simeq -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq -6\text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) \simeq -\pi \end{cases}$

(4)



(c) (i) Los polos y ceros se encuentran separados una década en lo cual el error deberá ser claro al aproximar del Bode. $\Rightarrow$ Si $\boxed{\omega = \frac{\omega_0}{10}}$ $\Rightarrow \arg(H(j\omega)) \approx -\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow V_0 \approx -9\,dB$

(ii) Impongo $\alpha(1-j) = \frac{1}{2}\frac{(\omega^2+\omega_0^2)}{\omega_0^2-\omega^2+10\omega_0 j\omega}$ $\quad (\alpha(1-j) = \alpha\angle -\frac{\pi}{4})$

$\Rightarrow \alpha\left[(\omega_0^2-\omega^2)+10\omega_0 j\omega + 10\omega_0\omega + (\omega^2-\omega_0^2)j\right] = \frac{1}{2}(\omega^2+\omega_0^2)$

Igualando partes imaginarias: $\alpha(\omega^2+10\omega_0\omega-\omega_0^2)=0$ y resolviendo el polinomio de segundo orden $\Rightarrow \boxed{\omega = 0{,}099\,\omega_0} \approx \frac{\omega_0}{10}$

Igualando partes reales: $\alpha\left[(\omega_0^2-\omega^2)+10\omega_0\omega\right] = \frac{1}{2}(\omega^2+\omega_0^2)$ Evaluando en la ω hallada y despejando α resulta: $\alpha = 0{,}255 \Rightarrow \alpha = \boxed{V_0 \approx -11{,}8\,dB}$

(d) En regimen sinusoidal, si $v_i(t) = A\cos(\omega_0 t) \Rightarrow v_0(t) = A|H(j\omega_0)|\cos(\omega_0 t + \arg(H(j\omega_0)))$

(i) $H(j\omega_0) = \frac{1}{10j} = 0{,}1\angle -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{v_0(t) = 0{,}1V\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)}$

(ii) $H\left(j\frac{\omega_0}{\sqrt{10}}\right) = 0{,}167\angle -1{,}29 \Rightarrow \boxed{v_0(t) = 0{,}167V\cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{10}}t - 1{,}29\right)}$