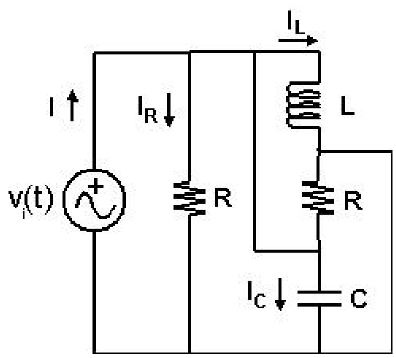
Examen de Sistemas Lineales 1
8 de diciembre del 2004

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos un ejercicio completo. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente.

Ejercicio 1

a) Sea el circuito de la figura 1 donde $v_i(t) = 220\sqrt{2}\cos(wt)$ y :



$$w = 100p$$
$$L = 50\ mHy$$
$$R = 75\Omega$$

Figura 1

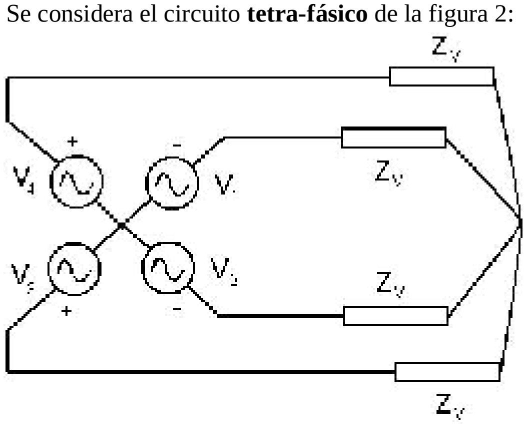
i) Hallar una expresión para la impedancia Z_v vista por la fuente.

ii) Calcular el valor del condensador C, si se sabe que $|I_L| = 3|I_C|$ donde I_L e I_C son los fasores de corriente por L y C respectivamente.

iii) Ubicar en un diagrama fasorial a V_i (fasor de la fuente), I (fasor de corriente entregada por la fuente), I_R (fasor de corriente por la resistencia R), I_L e I_C .

iv) Hallar las potencias activa y reactiva consumidas a la fuente.

b) Se considera el circuito **tetra-fásico** de la figura 2:



$$v_1(t) = 220\sqrt{2}\cos(wt)$$
$$v_2(t) = 220\sqrt{2}\cos\left(wt - \frac{p}{2}\right)$$
$$v_3(t) = 220\sqrt{2}\cos(wt - p)$$
$$v_4(t) = 220\sqrt{2}\cos\left(wt - \frac{3p}{2}\right)$$

i) Hallar los fasores de corrientes de línea I_1, I_2, I_3, I_4 y realizar un diagrama fasorial que los involucre junto a los fasores de la fuente V_1, V_2, V_3, V_4 .

ii) Calcular **gráficamente** las siguientes tensiones compuestas: U_{12}, U_{32} y U_{42}. Agregarlas al diagrama fasorial y dar sus expresiones temporales.

iii) Hallar las potencias totales activa y reactiva consumidas al sistema de fuentes **aplicando el Teorema de Blondell**.

iv) Hallar el valor de los condensadores C^*, que conectados en estrella compensan el factor de potencia del sistema tetra-fásico. Mostrar que debe cumplirse $C^* = n.C$ para n natural que se hallará.

Ejercicio 2

a) En el circuito de la figura 1 hallar la transferencia en régimen sinusoidal $H(j\omega)=V_o(j\omega)/V_i(j\omega)$ y la impedancia vista desde la entrada.

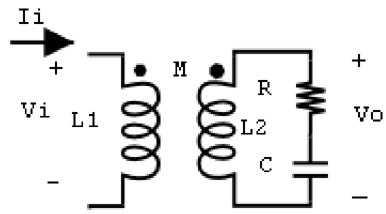


figura 1

b) Simplificar ambas expresiones para el caso en que el transformador es perfecto.

c) Calcular la transferencia en el circuito de la figura 3 (el transformador es perfecto).

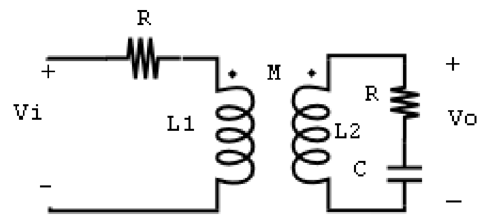


figura 2

d) Realizar los Diagramas de Bode de la transferencia de la parte anterior sabiendo que L2 = 9999.L1 y que $L1 = R^2.C$

e) Calcular $v_o(t)$ para las siguientes entradas:

i. $$v_i(t) = 1V.\cos\left(\frac{t}{100\sqrt{L_1 C}}\right)$$

ii. $$v_i(t) = 1V.\cos\left(\frac{t}{RC}\right)$$

Examen de Sistemas Lineales 1

8 de diciembre del 2004

Se recuerda que para aprobar la prueba es necesario tener al menos dos preguntas completas. Se sugiere justificar o explicar cada uno de los pasos realizados. Se pide justificar debidamente las afirmaciones realizadas. Si utiliza algún resultado o propiedad, enúncielo correctamente. Si tiene dudas respecto a si debe probar o no determinado resultado o propiedad que utiliza, consulte al docente. Fuera de este tipo de consultas, sólo se responderán dudas sobre la letra.

Pregunta 1

Los conceptos de circuitos pueden aplicarse a sistemas mecánicos a partir de las siguientes observaciones:

W = v.i	Potencia eléctrica W	Tensión v	Corriente i
W=f.u	Potencia mecánica W	Fuerza f	Velocidad u

Esto sugiere establecer por ejemplo la correspondencia Voltaje-Fuerza y Corriente-Velocidad. Adoptando esta correspondencia, y recordando las siguientes tres leyes básicas de la mecánica:

Ley de Newton:

f=m.a	Fuerza f	Masa m	Aceleración a

Ley de Hooke:

f=k.x	Fuerza f	Constante elástica k	Posición x

Ley de fricción viscosa:

f= ν.u	Fuerza f	Constante de fricción ν	Velocidad u

a) Indica a qué componente eléctrica se pueden asociar la masa, el resorte y la fricción viscosa respectivamente.

b) En el caso de que el sistema mecánico se encuentre en régimen sinusoidal, hallar las relaciones básicas entre los fasores F y U (Fuerza y Velocidad) para cada uno de los tres casos.

c) Dibujas los diagramas fasoriales correspondientes a cada caso.

Pregunta 2

a) Demostrar la regla de derivación del producto de una función infinitamente diferenciable por una distribución: $\left(a\,(t).T(t)\right)'$.

b) Mostrar la identidad $a\,(t).d\,(t) = a\,(0).d\,(t)$ para toda función α infinitamente diferenciable.

c) Consideremos el escalón de Heaviside. Analizar los pasos que siguen e indicar claramente **cuáles** son erróneos y **por qué**:

1) $Y^2(t) = Y(t)$

2) $2.Y(t).Y'(t) = Y'(t)$

3) $2.Y(t).d\,(t) = d\,(t)$

4) $2Y(t) = 1$

5) $Y(t) = \frac{1}{2}$

Pregunta 3

a) Definir el concepto de *distribución temperada*.

b) Sea *g(t)* una función periódica localmente integrable de periodo *T*. Mostrar que su distribución asociada es temperada. (Sugerencia: recordar que $c_n(g) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$).

c) Sea $g_1(t) = g(t).[Y(t) - Y(t-T)]$. Mostrar que $c_n(g) = \frac{1}{T}.G_1\left(n\frac{2p}{T}\right)$, siendo G_1 la Transformada de Fourier de g_1.

d) Mostrar que $g(t) = g_1(t) * \sum_{n\in Z} d(t - nT)$.

e) Mostrar que $G(f) = \frac{1}{T}.\sum_{n\in Z} G_1\left(n\frac{2p}{T}\right).d\left(f - n\frac{2p}{T}\right)$.

Pregunta 4

Consideremos un sistema lineal de transferencia en régimen $H(jw) = \frac{w_0}{jw + w_0}$, siendo $w_0 > 0$.

Sabemos que para una entrada periódica de periodo *T*, de la forma $e(t) = \sum_{n\in Z} c_n . e^{jnw_1 t}$, $w_1 = \frac{2p}{T}$,

la respuesta en régimen es de la forma $r(t) = \sum_{n\in Z} c_n . H(jnw_1) . e^{jnw_1 t}$.

a) **Hallar** la respuesta en régimen (exacta) del sistema para la entrada $e(t) = A.\sin(\overline{w}\, t)$. **Señalar** particularmente la relación de fase entre la entrada y la respuesta.

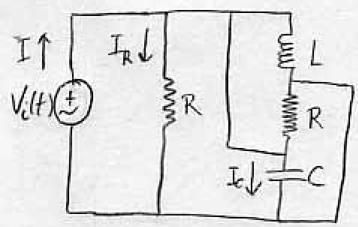
b) Comparar las potencia medias de la entrada y la respuesta.

c) ¿Es posible encontrar una entrada sinusoidal cuya respectiva respuesta en régimen (exacta) esté en cuadratura? **JUSTIFICAR**.

SISTEMAS LINEALES 1: DICIEMBRE 2004 (1)

Ejercicio 1:

ⓐ



$v_i(t) = \sqrt{2}\, 220 \cos(\omega t)$

$\omega = 100\pi$

$L = 50\, mHy$

$R = 75\,\Omega$

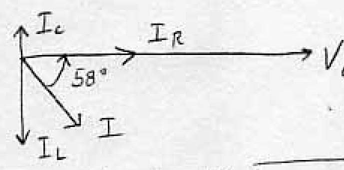
(i) $Z_V = R \| R \| Lj\omega \| \frac{1}{Cj\omega}$. Operando con los paralelos resulta $\boxed{Z_V = \frac{RL(j\omega)}{R[LC(j\omega)^2+1]+2L(j\omega)}}$

(ii) $|I_L| = \frac{V_i}{L\omega} = 3|I_c| = 3V_i C\omega \Rightarrow C = \frac{1}{3L\omega^2} \Rightarrow \boxed{C = 67{,}5\,\mu F}$

(iii) $I = \frac{V_i}{Z_V} \Rightarrow \boxed{I = (5{,}86 - j\,9{,}33)A = 11A\angle -58^\circ}$

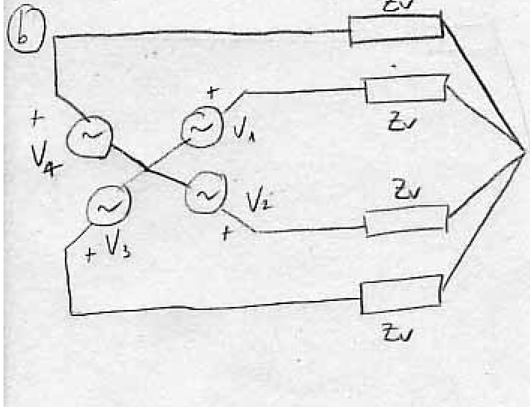
$I_R = \frac{V_i}{R} \Rightarrow \boxed{I_R = 2{,}93A\angle 0^\circ}$, $I_L = \frac{V_i}{Lj\omega} \Rightarrow \boxed{I_L = -14j\,A = 14A\angle -90^\circ}$

$I_c = V_i C j\omega \Rightarrow \boxed{I_c = 4{,}66j\,A = 4{,}66A\angle 90^\circ}$



(iv) $P = Re[V\bar{I}] = \frac{V_i^2}{R/2} \Rightarrow \boxed{P = 1289W}$, $Q = Im[V\bar{I}] = \frac{V_i^2}{L\omega} - C\omega V_i^2 \Rightarrow \boxed{Q = 2053\,VAr}$

ⓑ



$v_1(t) = \sqrt{2}\; 220 \cos(\omega t)$

$v_2(t) = \sqrt{2}\; 220 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$

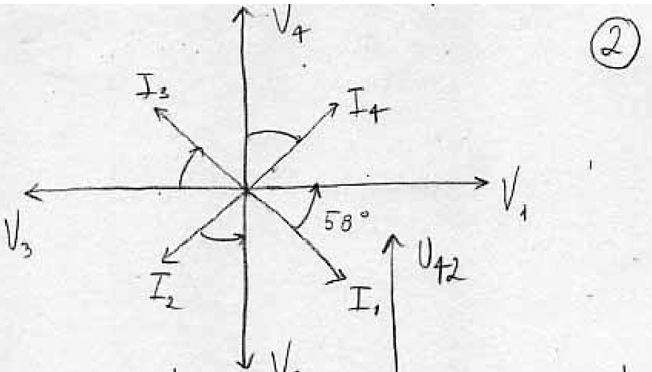
$v_3(t) = \sqrt{2}\; 220 \cos(\omega t - \pi)$

$v_4(t) = \sqrt{2}\, 220 \cos(\omega t - \frac{3\pi}{2})$

Sistema tetra-fásico equilibrado perfecto. Puede estudiarse por fase y la versión monofásica coincide con la ya estudiada.

(2)

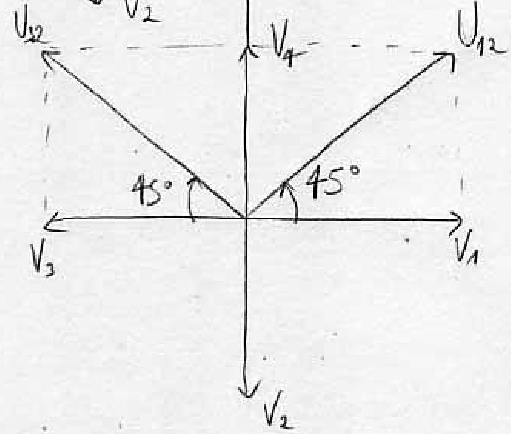
(i)
$$\boxed{\begin{aligned} I_1 &= I = 11A\angle -58^\circ \\ I_2 &= 11A\angle -58^\circ - 90^\circ \\ I_3 &= 11A\angle -58^\circ - 180^\circ \\ I_4 &= 11A\angle -58^\circ - 270^\circ \end{aligned}}$$



(ii) $U_{12} = V_1 - V_2$ Realizo los restas gráficamente

$U_{32} = V_3 - V_2$

$U_{42} = V_4 - V_2$



$$\boxed{\begin{aligned} U_{12} &= \sqrt{2}(\sqrt{2}\,220V)\cos(\omega t + 45^\circ) \\ U_{32} &= \sqrt{2}(\sqrt{2}\,220V)\cos(\omega t + 135^\circ) \\ U_{42} &= \sqrt{2}(2 \cdot 220V)\cos(\omega t + 90^\circ) \end{aligned}}$$

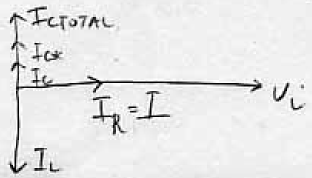
(iii) Aplico el Teorema de Blondell y tomo como referencia la línea 2. Ya conozco las tensiones compuestas y corrientes de línea necesarias para el cálculo.

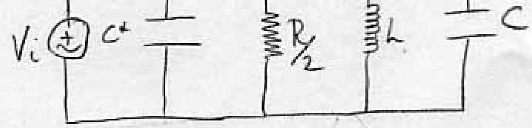
$$P = Re\left[U_{12}\bar{I}_1 + U_{32}\bar{I}_3 + U_{42}\bar{I}_4\right] \Rightarrow \boxed{P = 5156\,W}$$

$$Q = Im\left[U_{12}\bar{I}_1 + U_{32}\bar{I}_3 + U_{42}\bar{I}_4\right] \Rightarrow \boxed{Q = 8212\,Var}$$

(iv) Busco agregar una corriente en fase con I_c y que sumada a ella sean iguales a I_L ⇒ De esta forma I queda en fase con V_i y no hay consumo de reactiva.

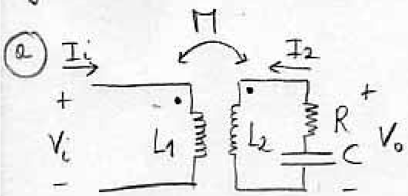
Sabemos que $|I_L| = 3|I_c|$ y como condensadores en paralelo se suman si $C^* = 2C \Rightarrow C_{TOTAL} = C^* + C = 3C$ y la corriente se triplica como se quería. El circuito en una fase queda:





Ejercicio 2: ③

ⓐ



La corriente por el secundario es $I_2 = -\dfrac{V_o}{R+\frac{1}{Cj\omega}}$

Las relaciones del transformador: $V_i = L_1 j\omega I_i - Mj\omega \dfrac{V_o}{R+\frac{1}{Cj\omega}}$

$$V_o = -L_2 j\omega \frac{V_o}{R+\frac{1}{Cj\omega}} + Mj\omega I_i$$

$$\Rightarrow I_i = \frac{V_i}{L_1 j\omega} + \frac{MCj\omega V_o}{L_1(RCj\omega+1)}$$

Eliminando I_i: $V_o\left[1 + \dfrac{L_2C(j\omega)^2}{RC(j\omega)+1} - \dfrac{M^2C(j\omega)^2}{L_1(RCj\omega+1)}\right] = \dfrac{M}{L_1}V_i$, y operando se llega a.

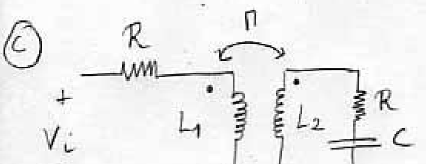
$$\boxed{H(j\omega) = \frac{M(RCj\omega+1)}{L_1(RCj\omega+1)+(L_1L_2-M^2)C(j\omega)^2}}$$

Para la impedancia vista, elimino V_o en vez de I_i: $V_o = \dfrac{Mj\omega(RCj\omega+1)}{L_2C(j\omega)^2+RCj\omega+1}$

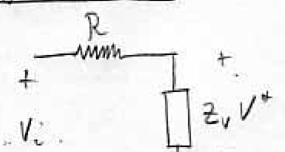
$$V_i = \left[L_1 j\omega - \frac{M^2C(j\omega)^2}{L_2C(j\omega)^2+RC(j\omega)+1}\right]I_i \Rightarrow \boxed{Z_V = \frac{(L_1L_2-M^2)C(j\omega)^3 + RL_1C(j\omega)^2 + L_1 j\omega}{L_2C(j\omega)^2+RCj\omega+1}}$$

ⓑ Si es perfecto $L_1L_2 = M^2 \Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \dfrac{M}{L_1}}$ $\boxed{Z_V = \dfrac{RL_1C(j\omega)^2 + L_1(j\omega)}{L_2C(j\omega)^2+RCj\omega+1}}$

ⓒ



Estudio en dos etapas, primero



y luego la etapa ya estudiada en ⓐ y ⓑ

$$H'(j\omega) = \frac{V^*}{V_i}H(j\omega) = \frac{Z_V}{R+Z_V}\frac{M}{L_1} \Rightarrow \boxed{H'(j\omega) = \frac{\sqrt{L_2L_1}\,(j\omega)(j\omega + 1/_{RC})}{(L_1+L_2)(j\omega)^2 + \left(\frac{R^2C+L_1}{RC}\right)j\omega + \frac{1}{C}}}$$

ⓓ $L_2 = 9999L_1$, $L_1 = R^2C \Rightarrow L_2L_1 \approx 10000L_1^2$, $\sqrt{L_1C} = RC$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{100}\,\frac{j\omega(j\omega + \frac{1}{RC})}{(j\omega)^2 + \frac{2}{10000\sqrt{L_1C}}j\omega + \frac{1}{100\sqrt{L_1C}}}$$

Definiendo $\omega_1 = \dfrac{1}{100\sqrt{L_1C}}$

$$\omega_2 = \frac{1}{RC} \Rightarrow \omega_1 = \frac{\omega_2}{100}$$

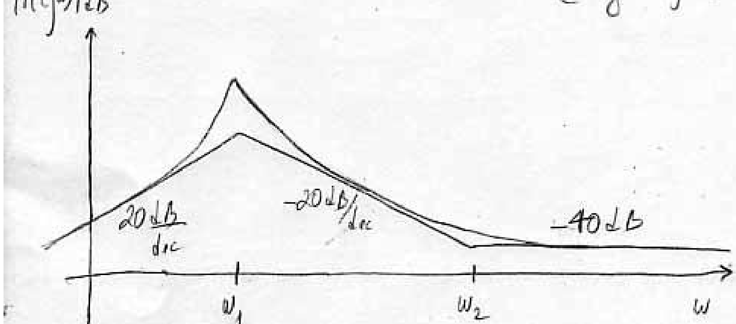
$$H'(j\omega) = \frac{1}{100}\,\frac{j\omega\,(j\omega + \omega_2)}{(j\omega)^2 + \frac{2}{100}\omega_1 (j\omega) + \omega_1^2}$$

Polos complejos conjugados con $\zeta = \frac{1}{100}$ ④

Si $\omega \ll \omega_1 \Rightarrow H'(j\omega) \approx \frac{j\omega\,\omega_2}{100\,\omega_1^2} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq 20\log\left(\frac{\omega_2}{100\omega_1^2}\right) + 20\log\omega \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) \simeq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Si $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2 \Rightarrow H'(j\omega) \simeq \frac{\omega_2}{100\,j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq 20\log\left(\frac{\omega_2}{100}\right) - 20\log\omega \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) \simeq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

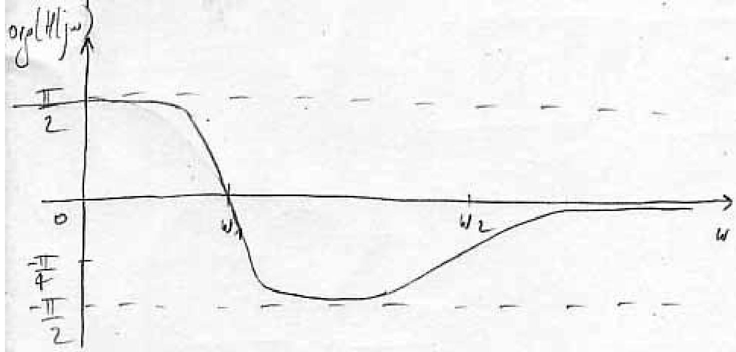
Si $\omega \gg \omega_2 \Rightarrow H'(j\omega) \simeq \frac{1}{100} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)|_{dB} \simeq -40 \text{ dB} \\ \arg(H(j\omega)) \simeq 0 \end{cases}$



Se que en ω_1 hay retardo de fase de π, pues los polos complejos tienen parte real negativa por ser ζ positivo.

Otra forma era:

$H(j\omega_1) \simeq \frac{\omega_2}{2\omega_1} = 50 \angle 0$



(e) $v_i(t) = 1V\cos(\omega_1 t) \Rightarrow v_o(t) = |H(j\omega_1)|\,V\cos(\omega_1 t + \arg(H(j\omega_1)))$

$$\Rightarrow \boxed{v_o(t) = 50V\cos(\omega_1 t)}$$

$v_i(t) = 1V\cos(\omega_2 t) \Rightarrow H(j\omega_2) \approx \frac{1}{100}\,\frac{(1+j)}{-1} = \frac{\sqrt{2}}{100} \angle -\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \boxed{v_o(t) = \sqrt{\frac{1}{5000}}\,V\cos\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{4}\right)}$

La aproximación es buena pues los polos están alejados dos décadas del cero.