Práctico 9 (resultados)

Reportar al foro cualquier error que crea que exista en éstos resultados.

Ejercicio 1

Ver ejemplo 7.1 del capítulo 7 de las notas del curso (página 158). El resultado final de dicha página debe multiplicarse por A para obtenerse el resultado de este ejercicio.

Ejercicio 2

a) La linealidad de la transformada de Fourier viene dada por la linealidad de la integral que la define.

b) Una posible demostración consiste en plantear la definición de la tranasformada de Fourier y realizar el cambio de variable $u = at$. La demostración debe distinguirse según $a > 0$ o $a < 0$.

c) Aplicar el teorema de la transformada inversa de Fourier a la función g(t). Plantear la definición de la transformada de Fourier de g(t) y la de su transformada conjugada. Combinando los resultados anteriores y evaluando convenientemente en -f se obtiene el resultado deseado.

d) Definir la integral a transformar como una función h(t). Luego, aplicar el teorema fundamental del Cálculo. Por lo tanto, la derivada de h(t) coincide con g(t). Aplicar la transformada de Fourier a h(t) e integrar por partes. Notar que h se anula en menos infinito por definición, y se anula en infinito. El argumento de que h se anule en infinito es el siguiente: si la integral de g(t) entre menos infinito e infinito no fuese nula, entonces su primitiva no sería transformable, porque no tendería a cero con t yendo a infinito. Esta es una hipótesis que hay que hacer sobre h(t) para decir que existe su transformada.

e) Una posible demostración es expresar G(-f) aplicando la definición, utilizar que g(t) es real y por lo tanto g es un número real igual a su complejo conjugado.

f) Aplicar la definición de la transformada de Fourier a la función $g(t - t_0)$. Realizando el cambio de variable $u = t - t_0$ se obtiene el resultado deseado.

Ejercicio 3

a) Consultar las Propiedades de la página 161 de las notas del curso.

b) Visualizar en la figura 7.2 de las notas del curso (capítulo 7. página 159) dicha transformada de Fourier. Apreciar la "suavidad"de dicha función. La demostración analítica de que es C^∞ se puede probar como sigue: salvo en el origen, la función no presenta singularidad alguna, y por lo tanto es diferenciable infinitamente. La posible discontinuidad en el origen no es tal, dado que en el pasaje al límite se puede ver que es continua tanto la función como todas sus derivadas.

Ejercicio 4

a) La linealidad de la transformada de Fourier de distribuciones viene garantizada por la linealidad de las distribuciones.

b) Aplicando la definición de la transformada de Fourier y la definición de cambio de variable en distribuciones.

c) Es un razonamiento similar al de funciones.

f) Una forma de probar lo que se pide es la siguiente: plantear la definición de la transformada de Fourier y finalmente realizar el cambio de variable $u = t + t_0$.

g) Notar que el resultado es válido con m=0. El resultado también vale para m=1 y se puede probar utilizando la definición de la TdF e integrando por partes. Luego aplicar la definición de derivada de una distribución. Siguiendo este razonamiento al cabo de m etapas se tiene la tésis.

Ejercicio 5

La TdF es un pulso de ancho $\frac{1}{\tau}$ y amplitud $\frac{A}{T}$.

Ejercicio 6

Esta demostración se puede encontrar en las notas del curso de Funciones de Variable Compleja de Eleonora Catsígeras.

Ejercicio 7

Lo que se pide probar es consecuencia inmediata de la proposición 7.1 de las notas del curso (página 164)

Ejercicio 8

a) Lo probado en el ejercicio 7 también vale para la transformada conjugada de Fourier. Hallar la transformada inversa de Fourier de una delta centrada en f_0. Luego aplicar la transformada de Fourier a ambos lados de esa igualdad. Esta demostración puede completarse con la parte 3 del Corolario 7.3 de las notas del curso (página 167).

b) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-j2n\pi fT}$

c) $\frac{A}{10}\delta(f) + \sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0} \frac{A}{10n\pi fT}\delta(f - nf_0)$

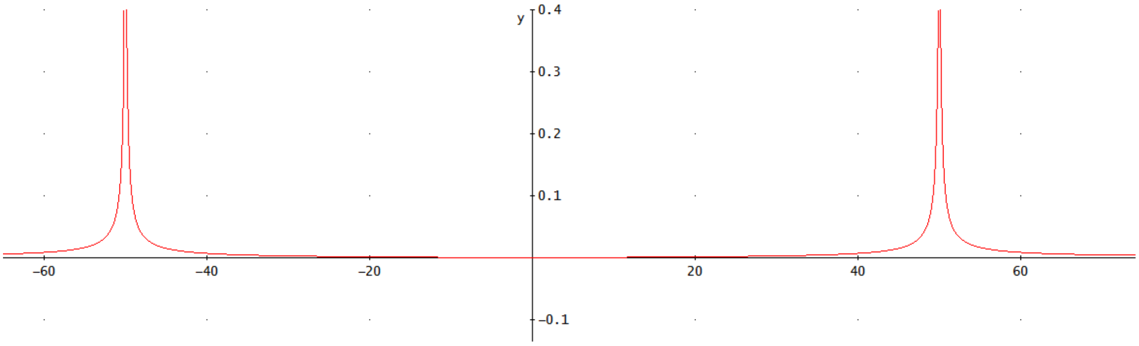
d) La TdF del seno es: $\frac{1}{2j}\delta(f - f_0) - \frac{1}{2j}\delta(f + f_0)$

La TdF del coseno es: $\frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$ siendo $\omega_0 = 2\pi f_0$

Ejercicio 9

a) $\frac{\alpha+j2\pi f}{[\alpha+j(2\pi f-\omega)][\alpha+j(2\pi f+\omega)]}$

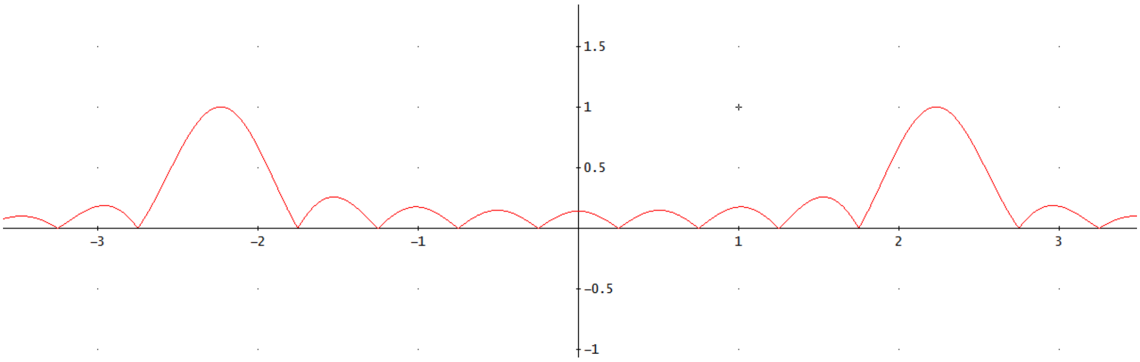
El espectro de la señal queda como sigue:



Cabe aclarar que se considero $\alpha = 1$ y $\omega = 2\pi 50Hz$.

b) $\frac{A}{\pi}[\frac{sen[\pi(9/\tau-2f)}{9/\tau-2f} + \frac{sen[\pi(9/\tau+2f)}{9/\tau+2f}]$

El espectro de la señal queda como sigue:

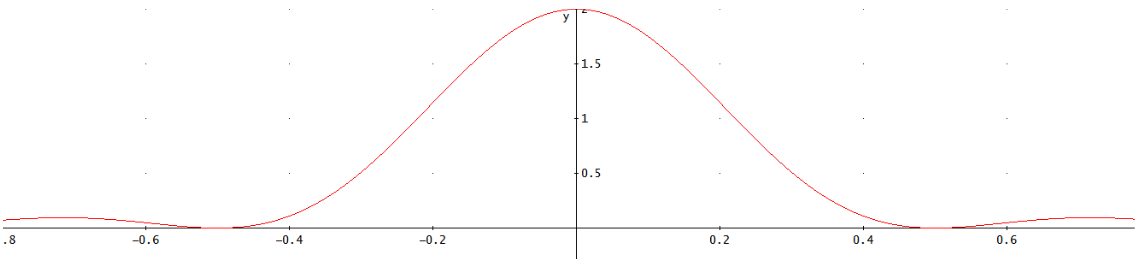


Cabe aclarar que se consideró $A = 1$ y $\tau = 2$.

Ejercicio 10

$\frac{1}{2T}(\frac{A}{\pi f})^2(1 - cos(2\pi fT))$

Se grafica el espectro de la señal para los siguientes valores de los parámetros: A=1 y T=2.



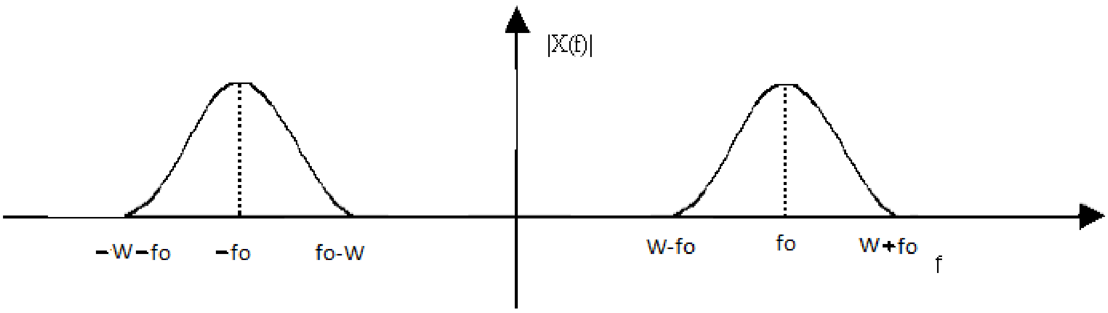
Ejercicio 11

Una posible demostración es la siguiente: la TdF de la función z es la convolución de las TdF de x e y. Si x es una señal de banda acotada W, resulta que su TdF es de soporte acotado en un entorno del origen de la forma [-W,W]. Un razonamiento similar vale para y en [-B,B]. Esta demostración concluye utilizando el teorema 3.7 de la página 68 de las notas del curso.

Ejercicio 12

a) $M(f) = \frac{1}{2}[X(f - f_0) + X(f + f_0)]$

A continuación presentamos un bosquejo de M(f):



b) $M(f) = \frac{1}{2}[X(f_0)\delta(f - f_0) + X(-f_0)\delta(f + f_0)]$

Su espectro es idénticamente nulo.

Ejercicio 13

Ver tema 7.72 de las notas del curso (páginas:170, 171 y 172): Muestreo de una señal analógica.

Ejercicio 14

a) El espectro de h(t) son dos pulsos centrados en λ_0 y -λ_0. Ambos de ancho $\frac{2}{T}$ y ampplitud $\frac{A}{2}$.

b) $\frac{A}{2}cos(2\pi\lambda_0 t)$

c) El sistema no es causal pues h(t) es no nula para $t < 0$.

Ejercicio 15

Previo:

Antes de realizar el cálculo de la TdF del escalón, es útil definir la distribución $Vp_{\{\frac{1}{j2\pi f}\}}$ como:

$$\langle Vp_{\{\frac{1}{j2\pi f}\}}, \varphi\rangle = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{1}{j2\pi f}\varphi(f)df + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{1}{j2\pi f}\varphi(f)df \right] \tag{1}$$

Observar que la distribución esta bien definida $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}$. No debe confundirse esta distribución, con la distribución asociada a la función $g(f) = \frac{1}{j2\pi f}$ (T_g). La distribución asociada a $g(f)$ NO está bien definida, el problema radica en que la función no es integrable en un entorno que contenga el origen. *"Ejercicio": encontrar una función $\varphi \in \mathcal{D}$ tal que $\langle T_g, \varphi\rangle$ no esta definido*

Primer intento [falla]:

Teniendo en mente la propiedad $\mathcal{F}[T'] = j2\pi f\mathcal{F}[T]$, tenemos, $\mathcal{F}[Y'(t)] = j2\pi f\mathcal{F}[Y(t)]$. Por otro lado, sabemos que $Y'(t) = \delta$ y $\mathcal{F}[\delta] = T_1$. Considerando lo anterior podríamos estar tentados a deducir (erróneamente) la igualdad

$$\mathcal{F}[Y(t)](f) = T_{\{\frac{1}{j2\pi f}\}} \tag{2}$$

La igualdad en (2) es incorrecta por varias razones, en primer lugar, la distribución a la derecha de la igualdad no esta bien definida, tal como vimos al comienzo de este documento. El error cociste en "pasar dividiendo" $(j2\pi f)$, o más formalmente multiplicamos a ambos lados de la igualdad por $\frac{1}{j2\pi f}$. La operación anterior, no esta definida, recordemos que para tener bien definido el producto $h(t).T$, $h \in \mathcal{C}^\infty$ $T \in \mathcal{D}'$. En el caso de $g = \frac{1}{f}$ presenta una discontinuidad en el origen, de modo que formalmente no podemos multiplicar $\frac{1}{j2\pi f}$.

Segundo intento:

En primer lugar, demostremos que la distribución definida al comienzo $Vp_{\{\frac{1}{j2\pi f}\}}$, multiplicada por la función $(j2\pi f)$, da como resultado la distribución asociada a la función constante 1.

$$\left\langle (j2\pi f)Vp_{\{\frac{1}{j2\pi f}\}} \right\rangle = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{1}{j2\pi f}(j2\pi f)\varphi(f)df + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{1}{j2\pi f}(j2\pi f)\varphi(f)df \right]$$

$$\Rightarrow \left\langle (j2\pi f)Vp_{\{\frac{1}{j2\pi f}\}} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(f)df = \langle T_1, \varphi \rangle \Rightarrow \boxed{(j2\pi f)Vp_{\{\frac{1}{j2\pi f}\}} = T_1}$$

Luego, recordando que $\mathcal{F}[\delta] = T_1$, obtenemos,

$$(j2\pi f)Vp_{\{\frac{1}{j2\pi f}\}} = T_1 = \mathcal{F}[\delta] \tag{3}$$

Por otro lado, aplicando la relacion entre la transformada de Fourier de una distribución y su derivada, obtenemos:

$$\mathcal{F}[Y(t)'] = \mathcal{F}[\delta] = (j2\pi f)\mathcal{F}[Y(t)] \tag{4}$$

Finlmente si observamos las ecuaciones obtenidas en (3) y (4), podemos escribir,

$$(j2\pi f)\mathcal{F}[Y(t)] = \mathcal{F}[\delta] = (j2\pi f)Vp_{\{\frac{1}{j2\pi f}\}}$$

Es facil probar que si tenemos dos distribuciones que verifican $f\,T_a = f\,T_b \;\Rightarrow\; T_a = T_b + k\delta$, donde k es una constante.

Podemos concluir,

$$\mathcal{F}[Y(t)] = Vp_{\{\frac{1}{j2\pi f}\}} + k\delta \quad \text{con } k \text{ una constante a determinar} \tag{5}$$

Para concluir el cálculo, solo falta determinar el valor de la constante. Podemos determinarlo por ejemplo, aplicando la distribución a $\varphi(f) = e^{-\pi f^2} \in \mathcal{S}$

$$\left\langle \mathcal{F}[Y], e^{-\pi f^2} \right\rangle = \left\langle Y, \mathcal{F}\left[e^{-\pi f^2}\right] \right\rangle = \left\langle Y, e^{-\pi t^2} \right\rangle = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left\langle \mathcal{F}[Y], e^{-\pi f^2} \right\rangle = \left\langle Vp_{\{\frac{1}{j2\pi f}\}} + k\delta, e^{-\pi f^2} \right\rangle = \left\langle Vp_{\{\frac{1}{j2\pi f}\}}, e^{-\pi f^2} \right\rangle + k$$

Es fácil probar que $\left\langle Vp_{\{\frac{1}{j2\pi f}\}}, e^{-\pi f^2} \right\rangle = 0$ usando que $e^{-\pi f^2}$ es par. Concluimos entonces que $k = \frac{1}{2}$

Juntando todo lo anterior, tenemos calculada la Transformada de Fourier de la distribución escalón, como :

$$\boxed{\mathcal{F}[Y(t)] = Vp_{\{\frac{1}{j2\pi f}\}} + \frac{\delta}{2}}$$

Ejercicio 16

a) Una demostración posible consiste en separar la integral desde -∞ hasta 0 y luego desde 0 hasta t. Esta última puede convertirse en $\frac{1}{\pi}\int_0^{\sigma t}\frac{sen(u)}{u}\mathrm{d}t$ realizando el cambio de variable $u = \sigma t$. La restante integral puede demostrarse que vale 0.5 de la siguiente manera: considere un pulso de amplitud unitaria y ancho $\frac{\sigma}{\pi}$. Aplicarle la TdF inversa. Luego antitransformar. Evalúe dicha antitransformada en el origen y prueba que la integral resultante equivale a dos veces la integral desde menos infinito a cero e igual a 1.

b) El resultado correcto es en realidad:

$$y(t) = \frac{1}{\pi}Si(\sigma^*(t+T)) - \frac{1}{\pi}Si(\sigma^*(t-T)) \text{ con } \sigma* = 2\pi\sigma$$

Una forma de llegar a éste resultado puede ser escribiendo:

$x(t) = Y(t+T) - Y(t-T)$ y $h(t) = \frac{sen(\sigma^* t)}{\pi t}$ y plantear la convolución temporal.