Sistemas Lineales 1 - Práctico 9

Transformada de Fourier

1^{er} semestre 2018

Ejercicios básicos: 1, 2, 4, 5, 9, 10, 11.
Ejercicios recomendados: 3, 6, 7, 8, 12, 13, 14.
Ejercicios complementarios: 15, 16.

En esta hoja de ejercicios, las expresiones TdF y $\mathcal{F}$ denotarán la Transformada de Fourier, en tanto $\bar{\mathcal{F}}$ denotará la Transformada Conjugada de Fourier.

1.- Hallar la TdF del pulso rectangular $p_T(t)$ mostrado en la figura 1.

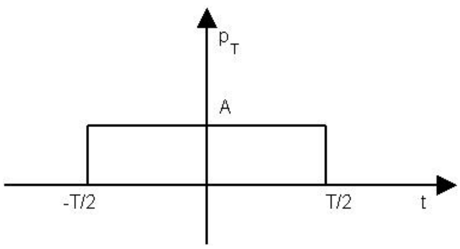

Figura 1: Pulso rectangular del Ejercicio 1.

2.-Para funciones de L_1, demostrar las siguientes propiedades de la TdF:

a) Linealidad

b) Si $G(f) = \mathcal{F}[g(t)](f)$, entonces $\frac{1}{|a|}.G\left(\frac{f}{a}\right) = \mathcal{F}[g(at)]$, para todo $a \neq 0$.

c) Si $G(f) = \mathcal{F}[g(t)](f)$, entonces $g(-f) = \mathcal{F}[G(t)](f)$.

d) Si $G(f) = \mathcal{F}[g(t)](f)$, entonces $\frac{G(f)}{j2\pi f} = \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} g(u)du\right](f)$.

e) Si $g(t)$ es real, entonces y $G(f) = \mathcal{F}[g(t)](f)$, entonces $G(-f) = \overline{G(f)}$.

f) Si $G(f) = \mathcal{F}[g(t)](f)$, entonces $e^{-j2\pi f t_0}.G(f) = \mathcal{F}[g(t-t_0)](f)$, para t_0 real cualquiera.

3.-Recordando la siguiente propiedad de la TdF para funciones de L_1: $\lim_{|f|\to\infty} \mathcal{F}[g(t)](f) = 0 \;\;, \;\; \forall g \in L_1$, mostrar que

a) si g es una función C^∞ y tal que $\lim_{|t|\to\infty} t^k.g^{(m)}(t) = 0 \;\;, \;\; \forall k,\, m \geq 0$, entonces $G(f) = \mathcal{F}[g(t)](f)$ verifica que es C^∞ y que $\lim_{|f|\to\infty} f^k.G^{(m)}(f) = 0 \;\;, \;\; \forall k,\, m \geq 0$

b) la TdF del pulso del Ejercicio 1 es una función C^∞.

4.-Demostrar en distribuciones las propiedades a), b), c) y f) del Ejercicio 2, más las siguientes:

g) Si $V(f) = \mathcal{F}[U(t)](f)$, con $U \in \mathcal{S}'$, entonces $V^{(m)}(f) = \mathcal{F}[(-j2\pi t)^m.U(t)](f)$

h) Dada una distribución $U \in \mathcal{D}'$, se define el conjugado de U como la distribución $\bar{U}$ que actúa como sigue:

$$\forall\varphi \in \mathcal{D} \quad , \quad \langle \bar{U}, \varphi \rangle = \overline{\langle U, \bar{\varphi} \rangle}$$

Mostrar que si $U \in \mathcal{S}'$ y $U = \bar{U}$, entonces $\bar{\mathcal{F}}[U] = \overline{\mathcal{F}[U]}$.

5.-Consideremos la función $g(t) = \frac{sen\left(\pi \frac{t}{\tau}\right)}{\left(\pi \frac{t}{\tau}\right)} = A.sinc\left(\frac{t}{\tau}\right)$. Hallar su TdF y graficar su espectro.

6.-Demostrar que $\mathcal{F}\left[e^{-\pi t^2}\right](f) = e^{-\pi f^2}$. **Sugerencia:** integrar la función entera $e^{-\pi z^2}$ en un dominio adecuado (ver el libro Métodos Matemáticos para las Ciencias Físicas de Laurent Schwartz).

7.-Consideremos la función $g(t)$ perteneciente a L_1 y sea T_g su distribución asociada, perteneciente a $\mathcal{S}'$. Sea $G(f)$ la Transformada de Fourier de $g(t)$ y $V(f) = T_G$ la distribución asociada a G. Mostrar entonces que $\mathcal{F}[T_g(t)](f) = V(f)$.

8.-

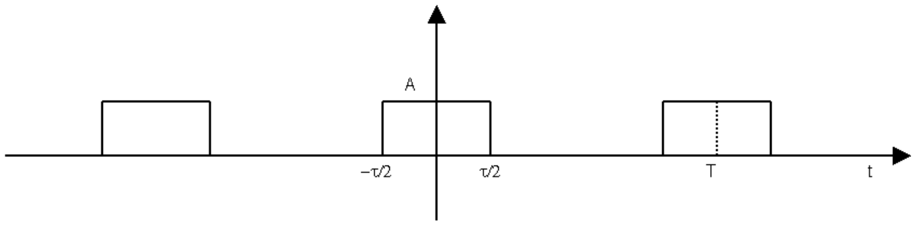

Figura 2: Onda cuadrada del Ejercicio 8.

a) Calcular la TdF de una distribución periódica temperada a partir de su Serie de Fourier.

b) Mostrar que el Peine de Dirac es una distribución periódica temperada y calcular su TdF.

c) Calcular la TdF de la señal de la figura 2, sabiendo que $T = 10\tau$.

d) Hallar la TdF de las funciones $\sin(\omega_0 t)$ y $\cos(\omega_0 t)$. Observar que no es posible transformarlas como funciones.

9.-Hallar la TdF de las siguientes señales y bosquejar los espectros.

a) $f(t) = Y(t).e^{-\alpha t}.\cos(\omega t)$, con α y ω reales positivos.

b) Para $\tau > 0$, $f(t) = A.\cos\left(9\pi\frac{t}{\tau}\right)$, si $|t| \leq \frac{\tau}{2}$ y 0 en otro caso.

10.-Calcular la TdF de la señal triangular de la figura 3 y bosquejar su espectro.

11.-Probar que si $x(t)$ es una señal de banda acotada en W e $y(t)$ lo es en B, entonces el producto $z(t) = x(t).y(t)$ es de banda acotada en $W + B$ (ver figura 4).

12.-Consideremos la señal $x(t)$ de banda acotada W y una pulsación $\omega_0 \gg W$. Hallar la TdF y bosquejar los respectivos espectros de
a) $m(t) = x(t).\cos(\omega_0 t)$; b) $m(t) = x(t) * \cos(\omega_0 t)$.

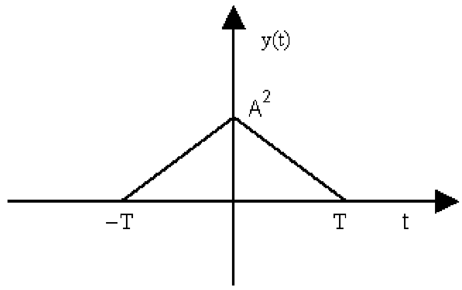

Figura 3: Señal triangular del Ejercicio 10.

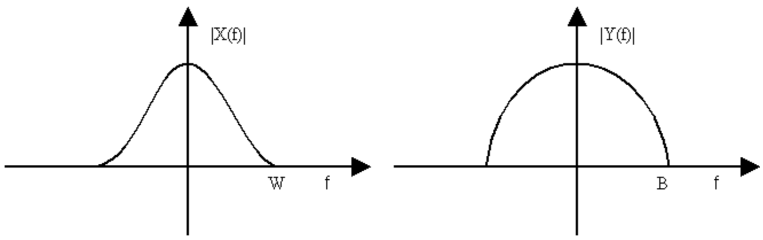

Figura 4: Espectros del Ejercicio 11.

13.-

a) Consideremos una señal $x(t)$ de banda acotada W y un *tiempo de muestreo* $T_S > 0$, que cumple $2W < \frac{1}{T_S}$. Las muestras de $x(t)$ a tiempo T_S serán los números $\{x\,(k.T_S)\}$. Definamos la señal

$$s(t) = x(t). \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\,(t - kT_s)$$

Hallar $S(f)$.

b) Recordando que una señal periódica queda unívocamente determinada pos sus coeficientes de Fourier, demostrar que una señal de banda acotada en las condiciones del parte a) queda unívocamente determinada por sus muestras.

c) ¿En las condiciones de la parte a), es posible reconstruir la señal $x(t)$ a partir de sus muestras $\{x\,(k.T_S)\}$? De serlo, sugiera un posible método.

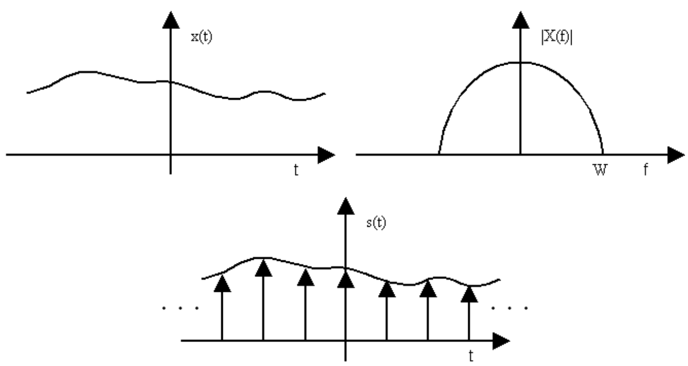

Figura 5: Señales del del Ejercicio 13.

14.-Consideremos un circuito lineal, del cual se sabe que para una entrada impulsiva, la respectiva respuesta es

$$h(t) = \frac{2A}{T}.sinc\left(\frac{2t}{T}\right).\cos\left(2\pi\lambda_0 t\right)$$

con A y T positivos y $\lambda_0 \gg \frac{1}{T}$.

a) Bosquejar el espectro de $h(t)$.

b) ¿Si a la entrada se coloca la señal $x(t) = \cos(2\pi\lambda_0 t) + \cos(4\pi\lambda_0 t)$, cuál será la respectiva respuesta $y(t)$?

c) Observando su respuesta al impulso, indicar si el sistema es causal.

15.-

a) ¿Qué problema existe en considerar la función $\frac{1}{t}$ como distribución?

b) Dada $f(x)$ de soporte acotado con una discontinuidad en $x = 0$, se define, cuando existe, el *valor principal* de Cauchy de $f(x)$ como

$$vp\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{-\epsilon} f(x)dx + \int_{+\epsilon}^{+\infty} f(x)dx\right\}$$

Consideremos el funcional T definido como

$$< T, \varphi >= vp\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t}dt$$

Probar que T es una distribución ($T \in \mathcal{D}'$), que denotaremos por $vp\left(\frac{1}{t}\right)$.

c) Probar que $t.vp\left(\frac{1}{t}\right) = \mathbf{1}$ (la distribución asociada a la función idénticamente igual a 1).

d) Si $Y(t)$ es el escalón de Heaviside, probar que $(j2\pi f).\mathcal{F}\left[y(t)\right](f) = \mathbf{1}$. Deducir la identidad

$$\mathcal{F}\left[Y(t)\right](f) = vp\left(\frac{1}{j2\pi f}\right) + c.\delta(f)$$

e) Calcular el valor de la constante c.

16.-La función $Si(t) = \int_0^t \frac{\sin(u)}{u}du$ es conocida como *seno integral.*

a) Mostrar que $Y(t) * \frac{\sin(\sigma t)}{\pi t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}.Si(\sigma t)$.

b) Se considera un filtro pasabajos ideal, con frecuencia de corte σ, cuya respuesta en frecuencia se muestra en la figura 6. A la entrada del filtro se inyecta la señal también mostrada en la misma figura, que consiste en un pulso rectangular, de amplitud 1 y duración desde $-T$ hasta T. Mostrar que la respectiva respuesta del filtro es

$$y(t) = \frac{1}{\pi}.Si\left[\sigma(t+T)\right] - \frac{1}{\pi}.Si\left[\sigma(t-T)\right]$$

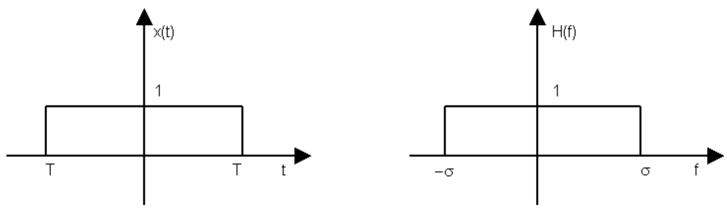

Figura 6: Pasabajos ideal del Ejercicio 16.