Sistemas Lineales 1 - Práctico 6

Series de Fourier

1^{er} semestre 2018

Las principales ideas a tener en cuenta en este práctico son:

- la respuesta en régimen a una entrada sinusoidal pura $e(t) = A_e.\cos(\omega_0 t + \phi_e)$ es

$$r(t) = A_e.|H(j\omega_0)|.\cos\left(\omega_0 t + \phi_e + arg\left(H(j\omega_0)\right)\right)$$

- La respuesta en régimen a una entrada periódica $e(t) = \sum_{n\in\mathcal{Z}} c_n(e).e^{jn\omega_0 t}$ es

$$r(t) = \sum_{n\in\mathcal{Z}} c_n(e).H(jn\omega_0).e^{jn\omega_0 t}$$

Ejercicios básicos: 1-7; ejercicios recomendados: 8-13; ejercicios complementarios: 14, 15

1.-Coeficientes de Fourier
El desarrollo de Fourier de una función $f(t)$ de periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ lo podemos expresar de las dos formas siguientes:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n.e^{jn\omega t} \quad , \quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.\cos(n\omega t) + b_n.\sin n\omega t$$

a) Hallar la relación entre los coeficientes a_n y b_n con c_n y viceversa.

b) Si $f(t)$ es par, demostrar que:

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t).\cos(n\omega t).dt \quad , \quad a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt \quad , \quad b_n = 0$$

Hallar una relación similar en el caso $f(t)$ impar.

2.-Identidad de Parseval

a) Potencia Media y Valor Eficaz
Se define la potencia como:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2$$

donde $f(t)$ es periódica de periodo T y tal que su serie de Fourier converja uniformemente. Obsérvese que $P = V_{eff}^2(f)$, siendo $V_{eff}(f)$ el valor eficaz de la función periódica f. Probar la fórmula de Parseval, donde f es una función *compleja* periódica de período T y c_n sus coeficientes de Fourier:

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(t)|^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

b) Escribir la expresión anterior en función de a_n y b_n.

c) Hallar el valor eficaz de una señal sinusoidal pura de amplitud A y pulsación ω_0. Hallar la potencia media de dicha señal en función de sus coeficientes de Fourier (c_n).

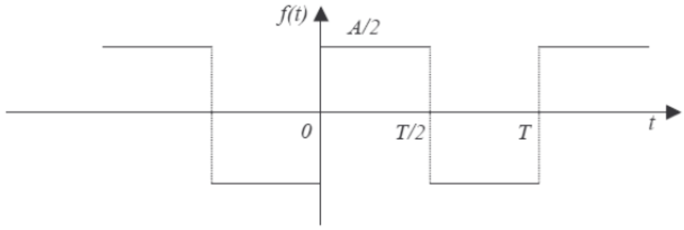


Figura 3.1:

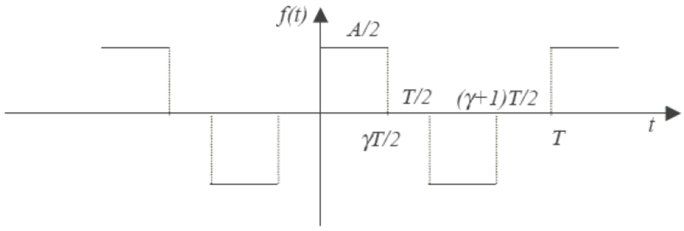


Figura 3.2:

3.-Onda cuadrada

a) Hallar el desarrollo de Fourier y dibujar el espectro en frecuencia de la onda cuadrada simétrica de la figura 3.1. La señal oscila entre los valores $\pm\frac{A}{2}$ y está la misma porción de periodo en cada valor.

b)
En la figura 3.2 se muestra una onda cuadrada asimétrica. Hallar los valores del parámetro γ que aseguren que se anula el tercer armónico de dicha señal. Este resultado es muy útil para la realización de conversores DC/AC conmutados en Electrónica de Potencia.

4.- Utilizando los resultados del Ejercicio 2, calcular el porcentaje de potencia de las primeras 10 componentes de frecuencia respecto de la potencia total para el tren de pulsos del ejercicio 3.a).

5.-Propiedades
Sea f una función periódica dada por sus coeficientes de Fourier. Hallar los coeficientes de Fourier de las siguientes funciones en función de los coeficientes c_n de $f(t)$:

(a) $g(t) = f(t + a)$; **(b)** $g(t) = f'(t)$; **(c)** $g(t) = f(at)$ (determinar el periodo de $g(t)$).

6.- Mostrar que en el espectro de una señal periódica f que verifique $f(t) = -f(t + To/2)$, no hay armónicos pares (To período de $f(t)$ real).

7.-Propiedades
Demostrar para distribuciones las mismas propiedades del ejercicio 5.

8.- Hallar el desarrollo en series de Fourier y el espectro del peine de Dirac.

9.- Desarrollando la función periódica $f(t)$ de periodo 2π, que en el intervalo $(-\pi, +\pi)$ coincide con la función $g(t) = t$, calcular la suma: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

10.-Rectificadores

Existen, en principio, tres opciones para rectificar tensiones sinusoidales: rectificador monofásico de media onda, rectificador monofásico de onda completa y rectificador trifásico (figuras 10.1, 10.2 y 10.3 respectivamente). En cada caso, se indica la forma de la onda resultante. Se pide hallar el desarrollo en series de Fourier y el espectro de frecuencias y calcular el porcentaje de potencia de la componente de continua respecto a la potencia total

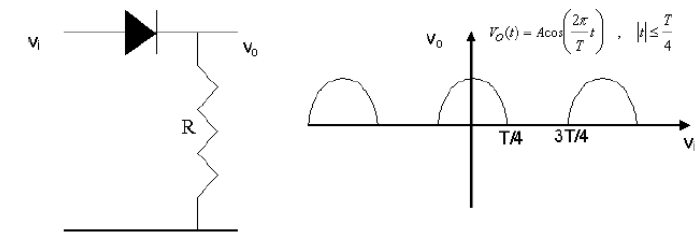


Figura 10.1:

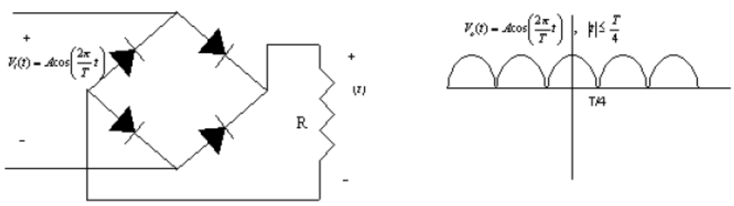


Figura 10.2:

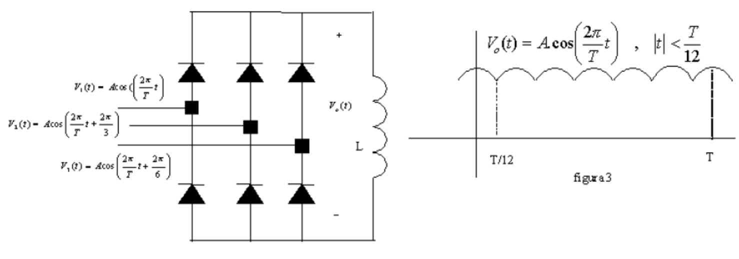
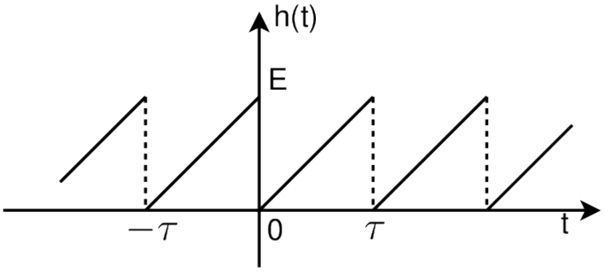


Figura 10.3:

Sugerencia: Determinar en cada caso el periodo correspondiente.

11.-Primer parcial 2015



Se considera la señal periódica $h(t)$ de la figura.

a) Hallar el valor medio y la potencia media de $h(t)$.

b) Hallar y bosquejar su derivada segunda como distribución ($\tilde{T}''_h$).

c) Verificar que, en un periodo, la derivada segunda vale $-E.\delta'(s)$.

d) Hallar los coeficientes de Fourier de $\tilde{T}''_h$.

e) Hallar los coeficientes de Fourier de $h(t)$, $c_n(h)$, para $n \neq 0$, **a partir de los de** $\tilde{T}''_h$.

f) Enunciar el Teorema de Parseval para señales periódicas y aplicarlo al caso particular de $h(t)$.

g) Calcular la atenuación que, en régimen, sufre el tercer armónico de la señal al pasar por un filtro pasabajos R-L, de transferencia en régimen

$$H(j\omega) = \frac{\omega_C}{j\omega + \omega_C}$$

siendo $\omega_C = \frac{6\pi}{\tau}$.

12.-Aplicación
Se tiene un sistema de emergencia formado por un transmisor, un receptor y un canal de comunicación. En caso de emergencia, el transmisor envía una señal consistente en una onda cuadrada de periodo T y amplitud $A/2$, de valor medio nulo. El receptor mide la potencia media de la señal que recibe y si ésta supera el valor correspondiente al 90 % de la potencia media de la onda cuadrada esperada, declara la emergencia. El canal de comunicación presenta el siguiente inconveniente: sólo permite la propagación de señales sinusoidales de pulsaciones (frecuencias angulares) no nulas y menores en módulo a un determinado valor ω_c, denominado ancho de banda del canal.

Hallar, en función de ω_c, la máxima frecuencia posible de la onda cuadrada que asegure que el mensaje sea bien interpretado por el receptor.

13.- La ***distorsión armónica*** de una señal periódica $v(t)$ de periodo τ indica el peso relativo de los armónicos mayores o iguales a 2 frente al primer armónico. Se define así: $DA(v) = \frac{1}{V_1}.\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty}|c_n|^2}$, siendo V_1 el valor eficaz del primer armónico (*la fundamental*) de $v_i(t)$. Consideremos la señal periódica $v_i(t)$ que se muestra en la figura 13.1. Se la desea procesar con el filtro pasabajos que se muestra también en dicha figura. Comparando la distorsión armónica de la entrada con la de la salida, obtenemos una medida del nivel de filtrado realizado. Se pide:

a) Calcule el valor eficaz de $v_i(t)$.

b) Calcule el valor eficaz de la fundamental de $v_i(t)$ y la distorsión armónica de $v_i(t)$.

c) Diseñe la constante de tiempos del circuito pasabajos de tal forma que la fundamental de la entrada se atenúe menos de 89 % en amplitud y atenúe lo más posible los armónicos superiores.

d) Calcule la distorsión armónica resultante a la salida, asumiendo que los armónicos superiores a la frecuencia de corte del filtro son eliminados por éste.

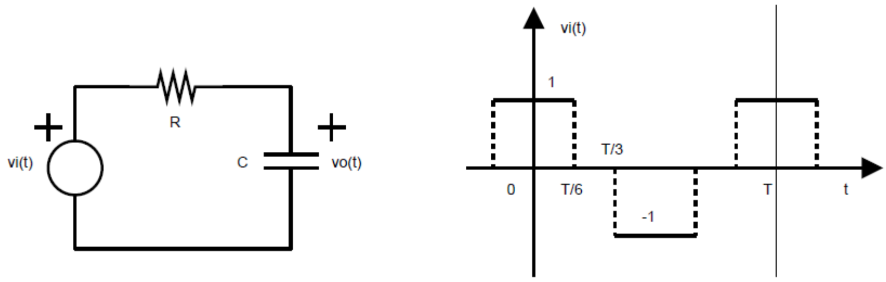


Figura 13.1: Circuito del Ejercicio 16

Álgebra de convolución en $\mathbb{D}'(\Gamma)$

(En los siguientes ejercicios Γ es la circunferencia de longitud 1, es decir de radio $\frac{1}{2\pi}$)

14.- Sean f y g dos distribuciones en $\mathbb{D}'(\Gamma)$ y h su convolución; hallar los coeficientes de Fourier de h en función de los de f y g.

15.- Hallar las distribuciones f de $\mathbb{D}'(\Gamma)$ tales que $h = f * g$, con g valiendo 1 en la mitad del periodo y 0 en el resto y $h = \sin(2\pi t)$.