Sistemas Lineales 1 - Práctico 4

Convolución

1^{er} semestre 2018

Ejercicios básicos: 1, 2.a, 4, 6
Ejercicios recomendados: 2.b, 2.c, 3, 5, 7, 8, 10, 11
Ejercicios complementarios: 12, 13

Nota: En este repartido el símbolo '$*$' indica producto de convolución y el '.' indica producto usual.

1.- Evaluar las siguientes operaciones, aclarando si el resultado es un número, una distribución cualquiera o una distribución asociada a una función:

a) $\langle \delta(t-3), t^2 \rangle$ **b)** $t^2 * \delta(t-3)$ **c)** $t^2.\delta(t-3)$ **d)** $t^2.\delta(3t)$ **e)** $\sin(t) * \delta'$ **f)** $\langle \delta', \sin(t) \rangle$
g) $\sin(t).\delta'$

2.- Sean $f(t)$ y $h(t)$ dos funciones como la indicada en la figura 2.1, de amplitudes respectivas $A1$ y $A2$.

a) Calcular $f(t) * h(t)$. ¿Cómo cambiaría el resultado si los anchos de los pulsos fueran distintos?

b) Calcular $h(t) * h(t) * h(t)$.

c) Calcular $f(t) * Y(t).e^{-at}$.

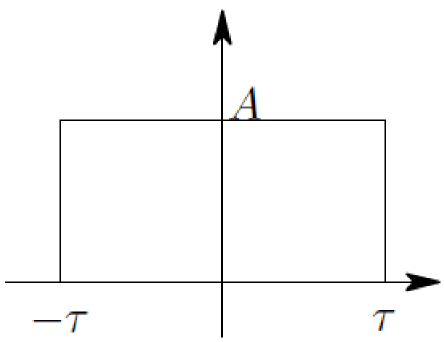


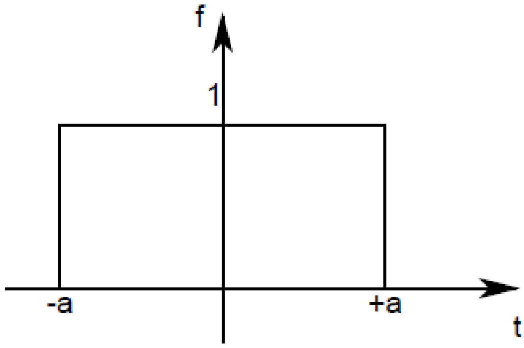
Figura 2.1:

3.-

a) Enunciar (sin demostrar) el teorema de la regularizada para el producto convolución de una distribución T y una función α. Establecer con claridad las hipótesis y la tesis.

b) Decir en cuáles de los siguientes casos es aplicable dicho teorema.

$T * 1$
$T * Y$ (Y es el escalón de Heaviside).
$\delta * 1$ (T es la dada en la figura).
$\delta * Y$



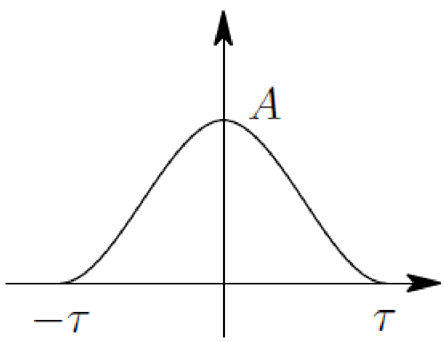
c) En los 4 casos, hallar el producto convolución, siendo T la distribución asociada a la función de la figura.

4.-

Calcular analíticamente la convolución del peine de Dirac

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

con $f(t)$, siendo $f(t)$ la de la figura con $2\tau < T$. Interpretar gráficamente el resultado obtenido.Observar que se obtiene una función periódica, de periodo T, que en un periodo coincide con $f(t)$. Reflexionar sobre la necesidad del requisito $2\tau < T$.



5.-

a) Calcular la inversa en $\mathbb{D}'_+$ de la distribución $\delta'' - 5\delta' + 6\delta$.

b) Idem para $Y(t) + \delta'$.

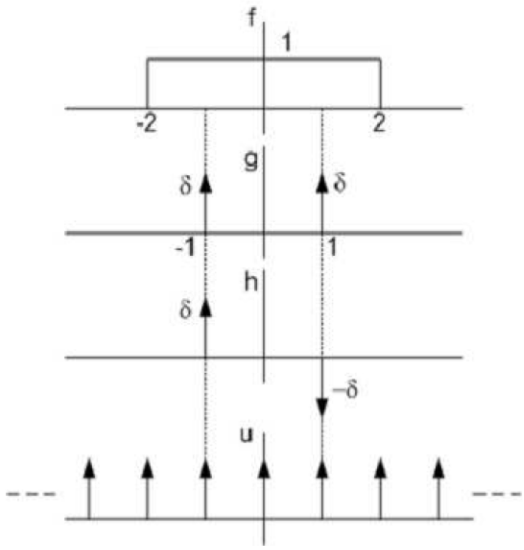
6.- Justificar con un ejemplo por qué no se puede definir el producto de convolución para dos distribuciones cualesquiera.

7.- Una distribución T es periódica de periodo τ si se cumple $\langle T, \varphi(x)\rangle = \langle T, \varphi(x+\tau)\rangle$ para toda $\varphi \in \mathbb{D}$. Demostrar que si $T \in \mathbb{D}'$ es periódica de periodo τ y $S \in \mathbb{D}'$ es una distribución de soporte acotado, entonces la distribución $S * T$ existe y es periódica, de periodo τ.

8.- Dadas las distribuciones f, g, h, u, indicadas en la figura, dibujar:

a) $f * h$ **b)** $f' * g$ **c)** $f * g'$ **d)** $g * u$
e) $h * u$

Justificar la relación entre los resultados de b) y c).



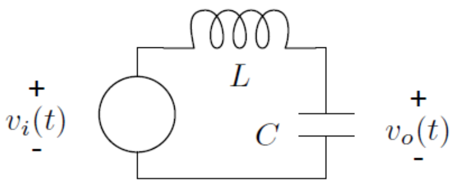
9.- Se sabe que la respuesta de un circuito a una entrada impulsiva fue la función $h(t) = Y(t).e^{-at}$.

a) Calcular la respuesta para la entrada e(t)=Y(t).

b) Idem para $e(t) = Y(t).e^{-bt}$.

Modelado de sistemas

10.-(Primer Parcial de 2003)



a) Hallar la ecuación diferencial que vincula $v_o(t)$ con $v_i(t)$ en el circuito de la figura, con $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

b) Hallar una distribución $T(t)$ tal que $v_i(t) = T(t) * v_o(t)$.

c) Hallar la inversa de $T(t)$ en $\mathbb{D}'_+$.

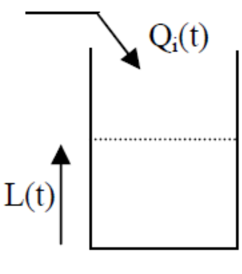
d)

i - Hallar $v_o(t)$ si $v_i(t) = 1V \cdot Y(t)$.

ii - Idem si $v_i(t) = 1V.Y(t)\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$.

Nota: Recordar que $\sin(a) \cdot \sin(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$.

11.- *Llenado de un tanque*

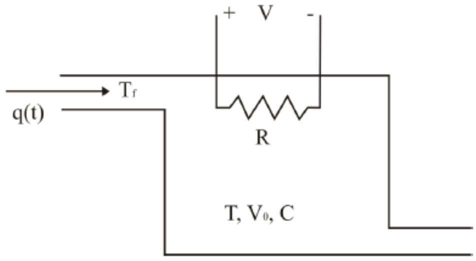


La figura muestra un tanque que se llena con un caudal $Q_i(t)$. $L(t)$ denota la altura del líquido en el tanque.

a) Deducir un modelo en convolución del sistema, tomando como entrada el caudal Q_i y como salida el nivel del tanque.

b) Calcular la respuesta del sistema a una entrada de la forma $Q_0 + Q_S \sin(\omega_0 t)$, con $0 < Q_S \ll Q_0$.

12.- *Modelo Térmico*



El sistema térmico de la figura recibe un caudal constante $q(t)$ que es igual al caudal de salida. $T(t)$ es la temperatura del líquido (que se supone uniforme en el tanque), V_o el volumen del tanque y c el calor específico volumétrico del líquido. El líquido entrante entra a una temperatura constante igual a T_f.

a) Modelar la variación de temperatura del líquido en el tanque, definiendo la variable $S = T - T_f$. Considerar como entrada la tensión al cuadrado ($e = V^2$) y como salida la variable $S(t)$.

b) Con el sistema en régimen, se inyecta un escalón en la entrada. Bosquejar la evolución de la temperatura dentro del tanque.

13.- En este problema buscamos mostrar el uso de la convolución en la teoría de probabilidad y variables aleatorias, y como algunos resultados fundamentales en esta área pueden ser de utilidad en el cálculo de convoluciones de señales temporales. Primero hacemos referencia a algunos resultados que serán de utilidad:

Propiedad: Sean $X_1, \ldots, X_n$ un conjunto de n variables aleatorias i.i.d. (independientes e idénticamente distribuidas) cuya función de densidad de probabilidad es $f_X(x)$. Definamos la siguiente variable aleatoria

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Luego, la función de densidad de probabilidad de Y está dada por

$$f_Y(x) = \underbrace{f_X(x) * \ldots * f_X(x)}_{n \ veces}$$

donde $*$ denota el producto convolución de funciones.

Teorema: (una versión del Teorema Central del Limite) : Sean $X_1, \ldots, X_n$ un conjunto de n variables aleatorias i.i.d. tales que $E[X_i] = 0$ y $E[X_i^2] = 1$. Definamos la siguiente variable aleatoria

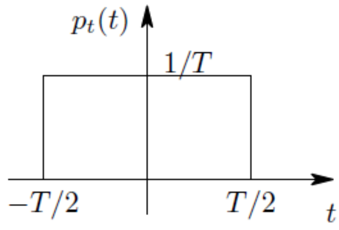
$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right)$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = Z \sim N(0,1)$$

es decir, Z_n converge (en distribución) a una variable aleatoria Gaussiana de media nula y varianza unitaria.

a) Consideremos el pulso $p_T(t)$ de la figura, donde $T = 2\sqrt{3}$. Calcular:



i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot p_T(t)dt$

ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot p_T(t)dt$

b) Consideremos nuevamente el pulso $p_T(t)$, donde ahora $T = 2\sqrt{(3/n)}$ con n entero positivo. Calcular:

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{p_T(t) * \ldots * p_T(t)}_{n\ veces}$$

y bosquejar el resultado.