Sistemas Lineales 1 - Práctico 3

Distribuciones

1^{er} semestre 2018

Ejercicios básicos: 1, 2, 3, 6, 7
Ejercicios recomendados: 4, 5, 8, 9
Ejercicios avanzados: 10, 11, 12

Ejercicio 1.

Dadas la función $\alpha \in C^\infty$ y la distribución $T \in \mathcal{D}'$, probar la identidad $(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T'$.

Ejercicio 2.

Dada la función $\alpha \in C^\infty$, probar que las distribuciones $\alpha(t).\delta'(t)$ y $\alpha(0).\delta'(t) - \alpha'(0).\delta(t)$ son iguales.

Ejercicio 3.

Calcular como distribuciones:

a.

Las derivadas sucesivas de $|t|$.

b.

$\left(\frac{d}{dt} - \alpha\right) Y(t) e^{\alpha t}$

c.

$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right) Y(t) \frac{\sin(\omega t)}{\omega}$

d.

La derivada de orden $n+1$ de $Y(t)\frac{t^n}{n!}$. Recordar que para derivar como distribución una función seccionalmente derivable, se deriva la función donde es derivable y se obtienen deltas de Dirac en los puntos de discontinuidad.

Ejercicio 4.

a.

Calcular como distribuciones las derivadas sucesivas de U(t):

$$U(t) = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad (2k-1)\frac{\pi}{2} < t < (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{si} \quad (2k+1)\frac{\pi}{2} < t < (2k+3)\frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad k = 2i,\, i \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

b.

Teniendo en cuenta que $|\cos(t)| = U(t)\cos(t)$, calcular las derivadas sucesivas de $|\cos(t)|$.

Ejercicio 5.

Calcular como distribuciones las derivadas de orden 1, 2, 3 y 4 de $|t|\cos(t)$.

Ejercicio 6. Soporte de distribuciones

a.

i) Mostrar que la δ de Dirac se anula en cualquier abierto de la recta real que no contenga al origen.

ii) Probar que el $sop(\delta) = \{0\}$.

b.

Mostrar que si g es una función continua y localmente integrable, entonces $sop(T_g) = sop(g)$.

c.

Determinar el soporte de las siguientes distribuciones:

i) $\delta'(t-a)$, ii) $Y(t)$, iii) $Y(t) - Y(t-a)$.

d.

I.

Determinar el soporte de $T(t) + S(t)$, sabiendo que $sop(T) \bigcap sop(S) = \emptyset$

II.

¿Qué se puede asegurar del soporte de $T(t) + S(t)$ si $sop(T) \bigcap sop(S) = \mathbb{S} \neq \emptyset$?

Ejercicio 7.

Sea $\varphi(x)$ una función de C^∞ (infinitamente derivable, sin restricciones de soporte). Indicar en qué casos está bien definida $< T, \varphi >$:

i) $T(t) = Y(t)$, ii) $T(t) = Y(-t)$, iii) $T(t) = Y(t).Y(2-t)$, iv) $T(t) = \delta(t+a)$, v) $T(t) = \frac{Y(t)}{\sqrt{t}}$, vi) $T(t) = \frac{Y(t)Y(2-t)}{\sqrt{t}}$.
Sugerencia: Dibujar un esquema de los distintos T.

Ejercicio 8.

Hallar la función $f(t)$, con derivadas 1 y 2 continuas, tal que la distribución $F(t) = Y(t).f(t)$ verifica: $F" + 2.F' + F = \delta + \delta'$.

Ejercicio 9.

Se tiene un sistema lineal con entrada $x(t)$ y salida $y(t)$, ambas distribuciones de D'_+. Se conoce la ecuación diferencial que vincula $x(t)$ con $y(t)$:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \omega_0^2.y(t) = \frac{d}{dt}x(t) \tag{2}$$

a.

Usando lo visto en el ejercicio anterior, calcular la salida $y(t)$ cuando la entrada es el escalón unitario $x(t) = Y(t)$.

b.

A partir de la parte anterior, ¿cuál es la salida cuando la entrada es $x(t) = \delta(t)$?

c.

¿Cuál es la salida cuando la entrada es $x(t) = \delta'(t)$? (Reflexiones sobre las dos partes anteriores).

d.

¿Cuál es la salida cuando la entrada es la suma de las anteriores? $x(t) = Y(t) + \delta(t) + \delta'(t)$.
Sugerencia: Observar que la solución homogénea es la misma en todos los casos. ¿Qué pasa con las soluciones particulares?

Ejercicio 10.

a.

Definir la noción de convergencia en distribuciones.

b.

Mostrar que si $T_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T$, entonces $T'_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T'$.

c.

Hallar $\lim_{n\to\infty} T_n$, siendo T_n la distribución asociada a la función h_n de la figura 10.1. (**Sugerencia:** desarrollar por Taylor)

d.

Aplicando la parte anterior, deducir el límite de la sucesión de distribuciones de término genérico asociado a la función de la figura 10.2.

e.

Repetir la parte anterior calculando el límite directamente, usando el desarrollo de Taylor.

Ejercicio 11.

Justifique por qué no se define el producto de dos distribuciones cualesquiera, encontrando dos funciones que tienen respectivas distribuciones asociadas pero cuyo producto no se puede asociar a una distribución.

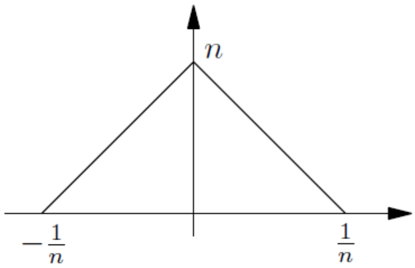

Figura 10.1:

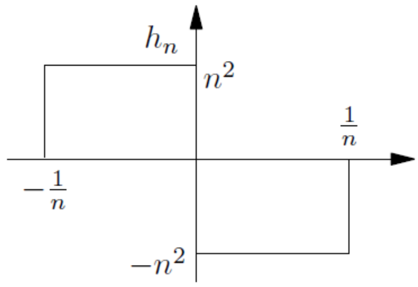

Figura 10.2:

Ejercicio 12.

En Física, se pueden interpretar las distribuciones matemáticas como distribuciones de cargas eléctricas, masas materiales, etc.

a.

Algunas distribuciones pueden actuar sobre espacios más amplios que D. Verifique que δ puede actuar sobre toda función definida en 0, y que una distribución de soporte acotado puede actuar sobre toda función perteneciente a C^∞.

b.

Sea un sistema físico en el que existen masas puntuales y distribuidas, dentro de un volumen acotado. Si asociamos a las masas puntuales distribuciones de tipo δ y a las masas distribuidas distribuciones de soporte acotado correspondientes a alguna función φ, verifique que $\langle T, r^2 \rangle$ es el momento de inercia del sistema respecto al origen, siendo T la distribución suma de las distribuciones anteriormente mencionadas.