Ecuación diferencial de segundo orden

Juan A. Bazerque

Como repaso de los cursos de cálculo, se desarrolla a continuación mediante un ejemplo la solución homogénea de una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes. Buscamos la solución $f(t) \in \mathcal{C}^{\infty}$ de la siguiente ecuación diferencial

$$2f(t) + Tf'(t) + T^2 f"(t) = 0 \tag{1}$$
$$f(0) = 0 \tag{2}$$
$$f'(0) = 1/T^2 \tag{3}$$

Según vimos en clase, esta ecuación surge al querer encontrar la respuesta al impulso $h(t) = (D\delta(t))^{-1}$ para el circuito RLC de la figura 1, con $RC + L/R = T$ y $LC = T^2$. Más específicamente, $h(t) = Y(t)f(t)$, con $f(t)$ solución de (1)-(3).

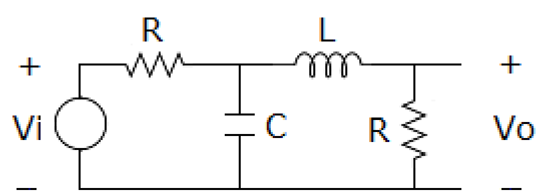

Figura 1: Circuito RLC

Paso 1: plantear la ecuación característica

Para hallar $f(t)$ comenzamos por buscar las funciones complejas $f_\lambda(t) = e^{\lambda t}$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, que satisfagan (1), esto es

$$2e^{\lambda t} + T\lambda e^{\lambda t} + T^2\lambda^2 e^{\lambda t} = (2 + T\lambda + T^2\lambda^2)e^{\lambda t} = 0 \tag{4}$$

Dado que $e^{\lambda t}$ no se anula entonces se debe cumplir la ecuación característica

$$2 + T\lambda + T^2\lambda^2 = 0 \tag{5}$$

En general, el procedimiento para obtener la ecuación característica de una ecuación diferencial supone substituir cada derivada de $f(t)$ por la potencia de λ del mismo orden, sin necesidad de repetir (4).

Paso 2: hallar las raíces

Las soluciones de (5) son

$$\lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{7}j}{2T}, \qquad \lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{7}j}{2T} \tag{6}$$

donde $j \in \mathbb{C}$ denota la unidad imaginaria. Se obtienen entonces dos funciones $e^{\lambda_1 t}$ y $e^{\lambda_2 t}$ que satisfacen (1). Por linealidad la solución más general es

$$f(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \tag{7}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Si la ecuación característica tuviese una raíz doble entonces se agregaría la segunda solución $f_\lambda(t) = te^{\lambda t}$, de modo que $f(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$.

Paso 3: resolver los coeficientes a partir de las condiciones iniciales

Resta encontrar c_1 y c_2 que satisfagan las condiciones iniciales (2) y (3), esto es,

$$f(0) = c_1 + c_2 = 0 \tag{8}$$

$$f'(0) = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = 1/T^2 \tag{9}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (o cuatro y cuatro si se piensa en numeros reales) cuya solución es

$$c_1 = \frac{1}{T^2}\left(\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\right) = \frac{-j}{\sqrt{7}T} \tag{10}$$

$$c_2 = \frac{1}{T^2}\left(\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\right) = \frac{j}{\sqrt{7}T} \tag{11}$$

Paso 4: escribir la solución y reducirla

Substituyendo (10) y (11) en (7) se obtiene

$$f(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = \frac{-j}{\sqrt{7}T} e^{\frac{t}{2T}\left(-1+\sqrt{7}j\right)} + \frac{j}{\sqrt{7}T} e^{\frac{t}{2T}\left(-1-\sqrt{7}j\right)} \tag{12}$$

$$= \frac{-j}{\sqrt{7}T} e^{-\frac{t}{2T}} \left(e^{j\frac{\sqrt{7}}{2T}t} - e^{-j\frac{\sqrt{7}}{2T}t}\right) = \frac{-j}{\sqrt{7}T} e^{-\frac{t}{2T}} 2j \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2T}t\right) \tag{13}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}T} e^{-\frac{t}{2T}} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2T}t\right) \tag{14}$$

Se observa un factor oscilatorio debido a las componentes L y C, y un factor de decaimiento exponencial debido a las resistencias R.

Se sugiere al lector verificar que (14) satisface la ecuación diferencial y sus condiciones iniciales, que es dimensionalmente correcta incluyendo el factor $\frac{2}{\sqrt{7}T}$, y hallar a partir de (14) la respuesta a un impulso $v_i(t) = V_0\delta(t)$ o a una señal de contínua $v_i(t) = V_0 Y(t)$, observando en especial que las respuestas en régimen sean válidas.