

## Sistemas Lineales 1

### Segundo parcial, 11 de julio 2007

#### Recomendaciones generales:

Leer atentamente todos los ejercicios y asegurarse de no olvidar realizar alguna parte.

En caso de no poder avanzar en un problema, cambiar de problema y volver a él más tarde. No se demore mucho tiempo en un solo ejercicio.

Justificar claramente los pasos realizados para resolver los problemas.

En caso de utilizar alguna propiedad o resultado particular, enúncielo claramente, enfatizando por qué puede usarlo.

HACER PROBLEMAS DISTINTOS EN HOJAS SEPARADAS.

PONER EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.

Se recuerda que la prueba es individual.

#### Problema 1 (20 puntos)

- a) En el circuito de la figura hallar las transferencias  $H_1(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$  y  $H_2(j\omega) = \frac{I_o(j\omega)}{V_i(j\omega)}$ .

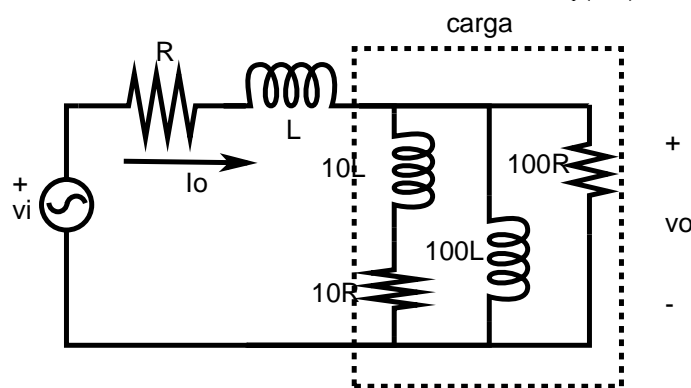


Figura 1

En las siguientes partes se debe JUSTIFICAR LA VALIDEZ DE LAS APROXIMACIONES REALIZADAS.

b)

- i) Realizar los Diagramas de Bode de  $H_1$  y  $H_2$  mostrando que se pueden escribir de la siguiente forma:

$$H_1(j\omega) = \frac{100j\omega\omega_0}{(j\omega)^2 + 112\omega_0j\omega + \omega_0^2}, \quad H_2(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 + 12\omega_0j\omega + \omega_0^2}{L((j\omega)^2 + 112\omega_0j\omega + \omega_0^2)(j\omega + \omega_0)}$$

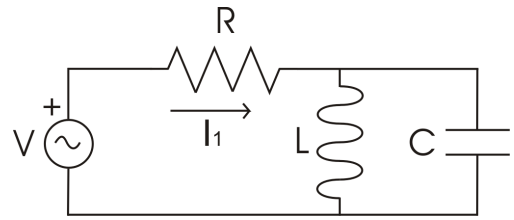
- ii) Mostrar que  $H_1(j\omega)$  es un filtro pasabanda y hallar **aproximadamente** el ancho de banda de dicho filtro.

c) De la observación de los Diagramas de Bode:

- i) Determinar, **aproximadamente**, la frecuencia angular  $\omega'$  a la cual el módulo de la potencia aparente consumida por la carga es máximo.
- ii) Hallar  $v_o(t)$  cuando la entrada es  $v_i(t) = 1V \cos(\omega't)$ .
- iii) Determinar, **aproximadamente**, a qué frecuencias la potencia activa consumida por la carga es igual a la reactiva.

**Problema 2 (16 puntos)**

- a) En esta parte se trabaja con el circuito de la figura 1, donde la fuente es sinusoidal de voltaje  $V$ , y  $\omega^2 < \frac{1}{LC}$

**Figura 1**

- i) Calcular  $I_1(j\omega)$ .

En el resto de la parte **a)** los componentes del circuito tienen los siguientes valores:  
 $R = 10 \Omega$ ,  $f = 50 \text{ Hz}$ ,  $C = 100 \mu\text{F}$ ,  $L = 20 \text{ mH}$ ,  $V_{\text{RMS}} = 220 \text{ V}$

- ii) La carga que alimenta la fuente,  $\zeta$  es inductiva o capacitiva? Justificar.
- iii) ¿Qué componente eléctrico colocaría en bornes de la fuente para compensar la potencia reactiva consumida por la carga?. Calcular el valor del mismo.
- iv) Calcular numéricamente  $I_1(j\omega)$  y la corriente  $I_C(j\omega)$  que atraviesa al componente eléctrico calculado en la parte anterior. Hacer un diagrama fasorial de  $I_1$ ,  $I_C$ , y  $V$ . ¿Cómo deduciría a partir del mismo que la carga que ve la fuente es puramente real?

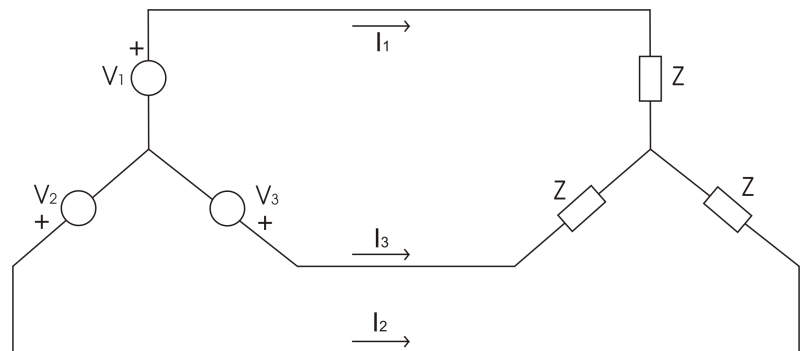
- b) Sea el circuito de la figura 2, donde las componentes tienen los siguientes valores:

$$v_1(t) = 220\sqrt{2} \cos(2\pi ft)$$

$$v_2(t) = 220\sqrt{2} \cos(2\pi ft + \frac{1}{3}\pi)$$

$$v_3(t) = 220\sqrt{2} \cos(2\pi ft + \frac{2}{3}\pi)$$

$Z$  es la impedancia de carga de la parte **a)**,  
 $f = 50 \text{ Hz}$ .

**Figura 2**

- i) Calcular las corrientes de línea  $I_1(j\omega)$ ,  $I_2(j\omega)$  e  $I_3(j\omega)$ . Realizar un diagrama fasorial de las mismas. Hallar la expresión temporal de  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  e  $i_3(t)$ .
- ii) ¿Como compensaría la potencia reactiva consumida por las cargas? Indicar el valor de las componentes que agregaría, y dibujar donde las colocaría en el circuito.

**Problema 3** (12 puntos)

- a) Consideremos una función  $x(t)$  y su Transformada de Fourier como función (TdF)  $X(f) = F[x(t)](f)$ . Hallar  $F[x(t - \tau)](f)$ .
- b) Se sabe que  $F[e^{+j2\pi f_0 t}](f) = \delta(f - f_0)$ . Hallar  $F[\cos(2\pi f_0 t)](f)$ .
- c) Hallar  $F[p_\tau(t)](f)$ , la TdF del pulso unitario de ancho  $\tau$  centrado en el origen.
- d) Hallar, **sin utilizar integración directa**, la TdF de la función

$$x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_0 t) & , 0 \leq t \leq T \\ 0 & , \text{en otro caso} \end{cases} , f_0 = \frac{5}{T}$$

Bosquejar el módulo de  $X(f)$ .

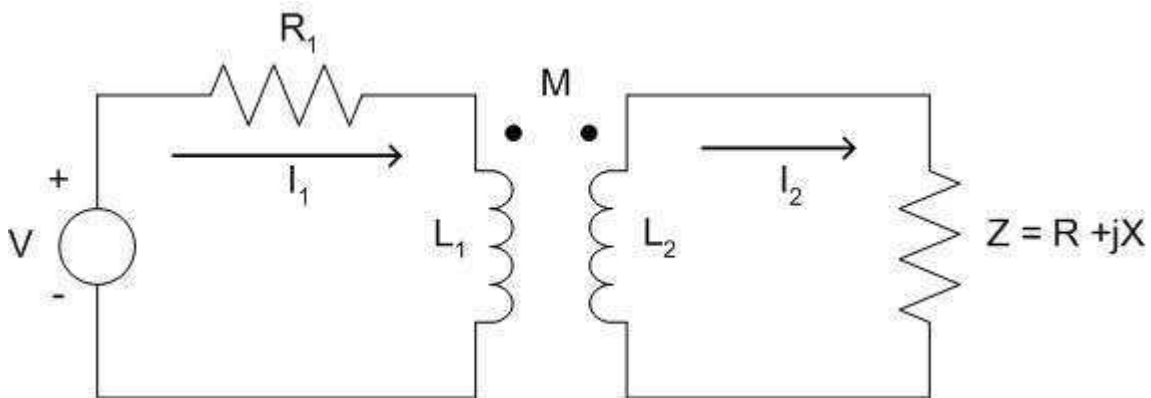
**Problema 4** (12 puntos)

Se considera el circuito de la figura, en régimen sinusoidal, en el que se adoptan las orientaciones indicadas para las corrientes  $I_1$  e  $I_2$ .

Se sugiere llamar:

$$\begin{aligned} L_1 \omega &= X_1 \\ L_2 \omega &= X_2 \\ M \omega &= X_3 \end{aligned}$$

- a) Suponiendo el fasor  $I_2$  real, dibujar el diagrama fasorial de la KVL (ecuación de Kirchoff de voltaje) de la malla secundaria, y deducir la ubicación del fasor  $I_1$  respecto de  $I_2$ .
- b) En un dibujo separado, representar el esquema del diagrama fasorial de la KVL de la malla primaria, mostrando los fasores  $V$ ,  $I_1$  e  $I_2$ .
- c) Resolver analíticamente el circuito, hallando las expresiones de los fasores  $I_1$ ,  $I_2$  en función de la tensión  $V$ .
- d) Hallar una condición entre  $R$ ,  $R_1$ ,  $X$ ,  $X_1$ ,  $X_2$  y  $X_3$  para que los fasores  $V$  e  $I_2$  sean colineales.



# Solución primer parcial de Sistemas Lineales 1 2007

## Ejercicio 1

12 de julio de 2007

### Parte a.

Para hallar la transferencia usamos el divisor de tensión, con  $Z_2$  la impedancia de carga y  $Z_1$  la serie de  $R$  y  $L$ .

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{1}{1 + (Lj\omega + R) \left( \frac{1}{10Lj\omega + 10R} + \frac{1}{100R} + \frac{1}{100Lj\omega} \right)} = \frac{100}{100 + (j\omega + \omega_0) \left( \frac{10}{j\omega + \omega_0} + \frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{j\omega} \right)} = \frac{100j\omega\omega_0}{110j\omega\omega_0 + (j\omega + \omega_0)^2}$$

Donde se substituyó  $R/L$  por  $\omega_0$

$$H_1(j\omega) = \frac{100j\omega\omega_0}{(j\omega)^2 + 112\omega j\omega_0 + \omega_0^2}$$

La impedancia vista es la impedancia equivalente:

$$Z_v(j\omega) = R + Lj\omega + \frac{1}{\frac{1}{10Lj\omega + 10R} + \frac{1}{100R} + \frac{1}{100Lj\omega}} = \frac{\frac{1}{10} + \frac{(R + Lj\omega)^2}{100RLj\omega} + 1}{\frac{1}{10Lj\omega + 10R} + \frac{1}{100R} + \frac{1}{100Lj\omega}} = \frac{\left( \frac{1}{10} + \frac{(R + Lj\omega)^2}{100RLj\omega} + 1 \right) (Lj\omega + R) 100RLj\omega}{10RLj\omega + (Lj\omega + R)^2}$$

$$Z_v(j\omega) = \frac{(110RLj\omega + (R + Lj\omega)^2) (Lj\omega + R)}{(Lj\omega)^2 + 12RLj\omega + R^2} = L \frac{((j\omega)^2 + 112\omega_0 j\omega + \omega_0^2) (j\omega + \omega_0)}{(j\omega)^2 + 12\omega_0 j\omega + \omega_0^2}$$

Por lo tanto:

$$H_2(j\omega) = Z_v^{-1} = \frac{(j\omega)^2 + 12\omega_0 j\omega + \omega_0^2}{L((j\omega)^2 + 112\omega_0 j\omega + \omega_0^2)(j\omega + \omega_0)}$$

### Parte b.

Obtengo las raíces del numerador y del denominador.

Numerador:

$$-\omega_0, \left( -56 \pm \sqrt{56^2 - 1} \right) \omega_0 = -8,9 \times 10^{-3} \omega_0, -112\omega_0$$

Denominador:

$$\left( -6 \pm \sqrt{6^2 - 1} \right) \omega_0 = -84 \times 10^{-3} \omega_0, -11,9\omega_0$$

Entonces:

$$\omega_1 = 8,9 \times 10^{-3} \omega_0, \omega_2 = 84 \times 10^{-3} \omega_0, \omega_3 = 11,9\omega_0 \text{ y } \omega_4 = 112$$

Por lo que  $H_1$  y  $H_2$  quedan:

$$H_1(j\omega) = \frac{100j\omega\omega_0}{(j\omega + \omega_1)(j\omega + \omega_4)}, H_2(j\omega) = \frac{(j\omega + \omega_2)(j\omega + \omega_3)}{L(j\omega + \omega_0)(j\omega + \omega_1)(j\omega + \omega_4)}$$

Ordenando los módulos de las raíces nos queda  $\omega_1 \ll \omega_2 \ll \omega_0 \ll \omega_3 \ll \omega_4$ .

Veamos el diagrama de Bode de  $H_1$ :

primer tramo  $\omega \ll \omega_1$ :

$$H_1(j\omega) \approx \frac{100\omega_0 j\omega}{\omega_1 \omega_4} = \frac{100j\omega}{\omega_0}$$

$$\arg(H_1(j\omega)) \approx \frac{\pi}{2}, |H_1(j\omega)|_{db} \nearrow 20db/dec$$

segundo tramo  $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_4$ :

$$H_1(j\omega) \approx \frac{100\omega_0}{\omega_4} = \frac{100}{112}$$

$$\arg(H_1(j\omega)) \approx 0, |H_1(j\omega)|_{db} \rightarrow cte$$

tercer tramo  $\omega \gg \omega_4$ :

$$H_1(j\omega) \approx \frac{100\omega_0}{j\omega}$$

$$\arg(H_1(j\omega)) \approx -\frac{\pi}{2}, |H_1(j\omega)|_{db} \searrow -20db/dec$$

En la figura 1 se muestra el diagrama de Bode

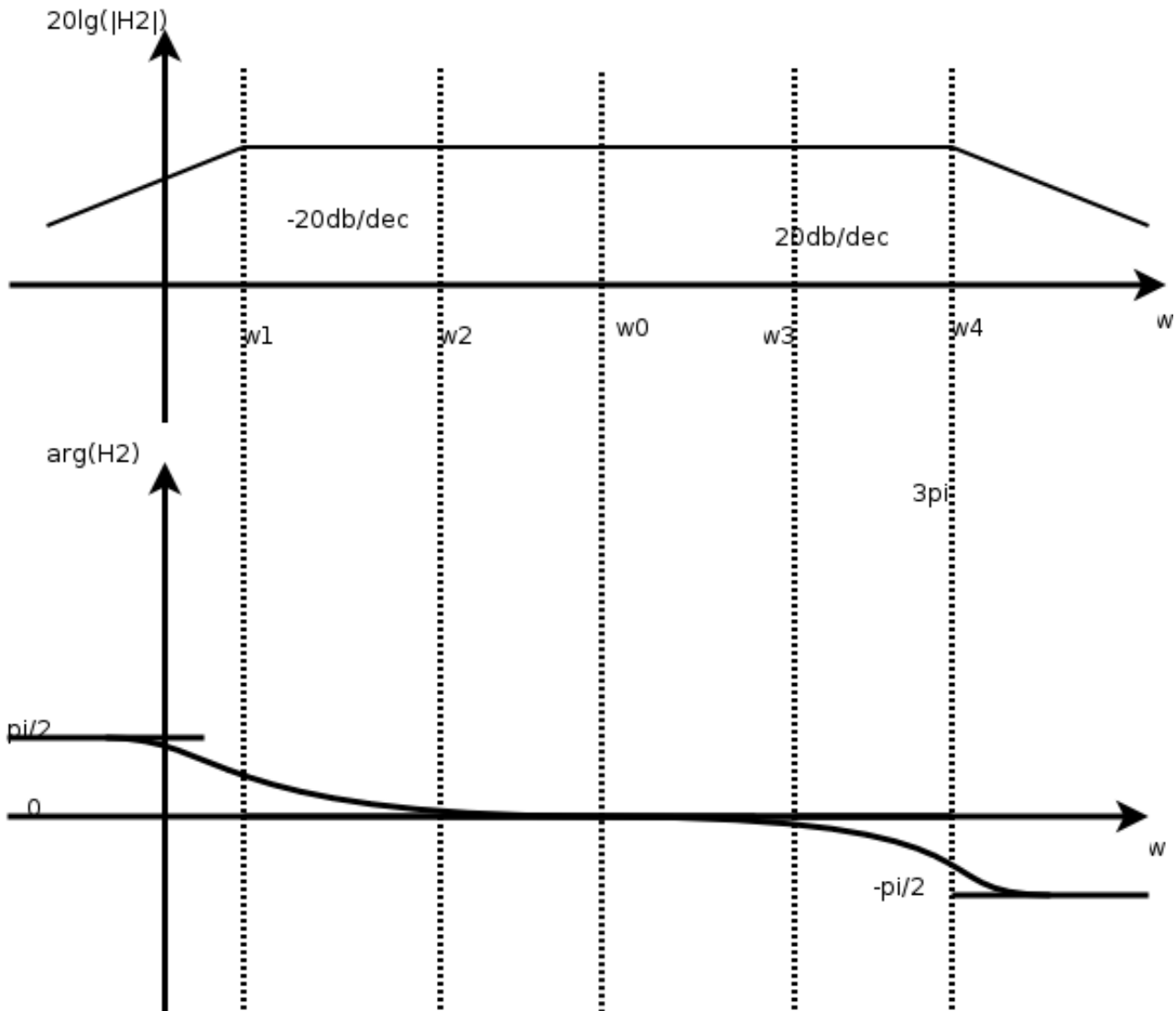


Figura 1: Diagrama de Bode de  $H_1$

Para  $H_2$ :  
 primer tramo  $\omega \ll \omega_1$ :

$$H_2(j\omega) \approx \frac{\omega_2\omega_3}{L\omega_0\omega_1\omega_4} = \frac{1}{112L\omega_0}$$

$$\arg(H_2(j\omega)) \approx 0, |H_2(j\omega)|_{db} \rightarrow cte$$

segundo tramo  $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$ :

$$H_2(j\omega) \approx \frac{\omega_2\omega_3}{L\omega_0j\omega\omega_4} = \frac{1}{Lj\omega}$$

$$\arg(H_2(j\omega)) \approx -\frac{\pi}{2}, |H_2(j\omega)|_{db} \searrow -20db/dec$$

tercer tramo  $\omega_2 \ll \omega \ll \omega_0$ :

$$H_2(j\omega) \approx \frac{\omega_3}{L\omega_0\omega_4} = \frac{11,9}{112L\omega_0}$$

$$\arg(H_2(j\omega)) \approx 0, |H_2(j\omega)|_{db} \rightarrow cte$$

cuarto tramo  $\omega_0 \ll \omega \ll \omega_3$ :

$$H_2(j\omega) \approx \frac{\omega_3}{Lj\omega\omega_4} = \frac{11,9}{112Lj\omega}$$

$$\arg(H_2(j\omega)) \approx -\frac{\pi}{2}, |H_2(j\omega)|_{db} \searrow -20db/dec$$

quinto tramo  $\omega_3 \ll \omega \ll \omega_4$ :

$$H_2(j\omega) \approx \frac{1}{L\omega_4} = \frac{1}{112L\omega_0}$$

$$\arg(H_2(j\omega)) \approx 0, |H_2(j\omega)|_{db} \rightarrow cte$$

sexto tramo  $\omega_4 \ll \omega$ :

$$H_2(j\omega) \approx \frac{1}{Lj\omega} = \frac{11,9}{112Lj\omega}$$

$$\arg(H_2(j\omega)) \approx -\frac{\pi}{2}, |H_2(j\omega)|_{db} \searrow -20db/dec$$

En la figura 2 se muestra el diagrama de Bode

## Parte c.

### I.

La potencia aparente  $S$  es  $S = V\bar{I} = H_1\bar{H}_2|V_i|^2$  por lo que su módulo es  $|S| = |V||I| = |H_1||H_2||V_i|^2$ . Si hiciéramos un diagrama de Bode de módulo de la potencia aparente sería la suma de ambos diagramas, de ambos diagramas se puede observar que para  $\omega \ll \omega_1$  el diagrama de  $H_1$  es creciente y el de  $H_2$  con asíntota horizontal, luego de eso los dos diagramas son decrecientes o de asíntota horizontal, por lo que el máximo del asíntótico de  $S$  estará en  $\omega_1$ . Todas las raíces de la transferencia, tanto en el numerador como en el denominador, están separadas aproximadamente al menos una década, por lo cual para estudiar lo que pasa en el entorno de una raíz se puede despreciar el aporte de las demás. Como el asíntótico de  $S$  tiene un máximo en  $\omega_1$  el real tendrá el máximo en ese lugar, de hecho sabemos que la diferencia en los diagramas reales de  $H_1$  y  $H_2$  con los respectivos asíntóticos es de 3 db por lo que la diferencia total es de 6 db.

$$\omega' = \omega_1 = 8,9 \times 10^{-3}\omega_0$$

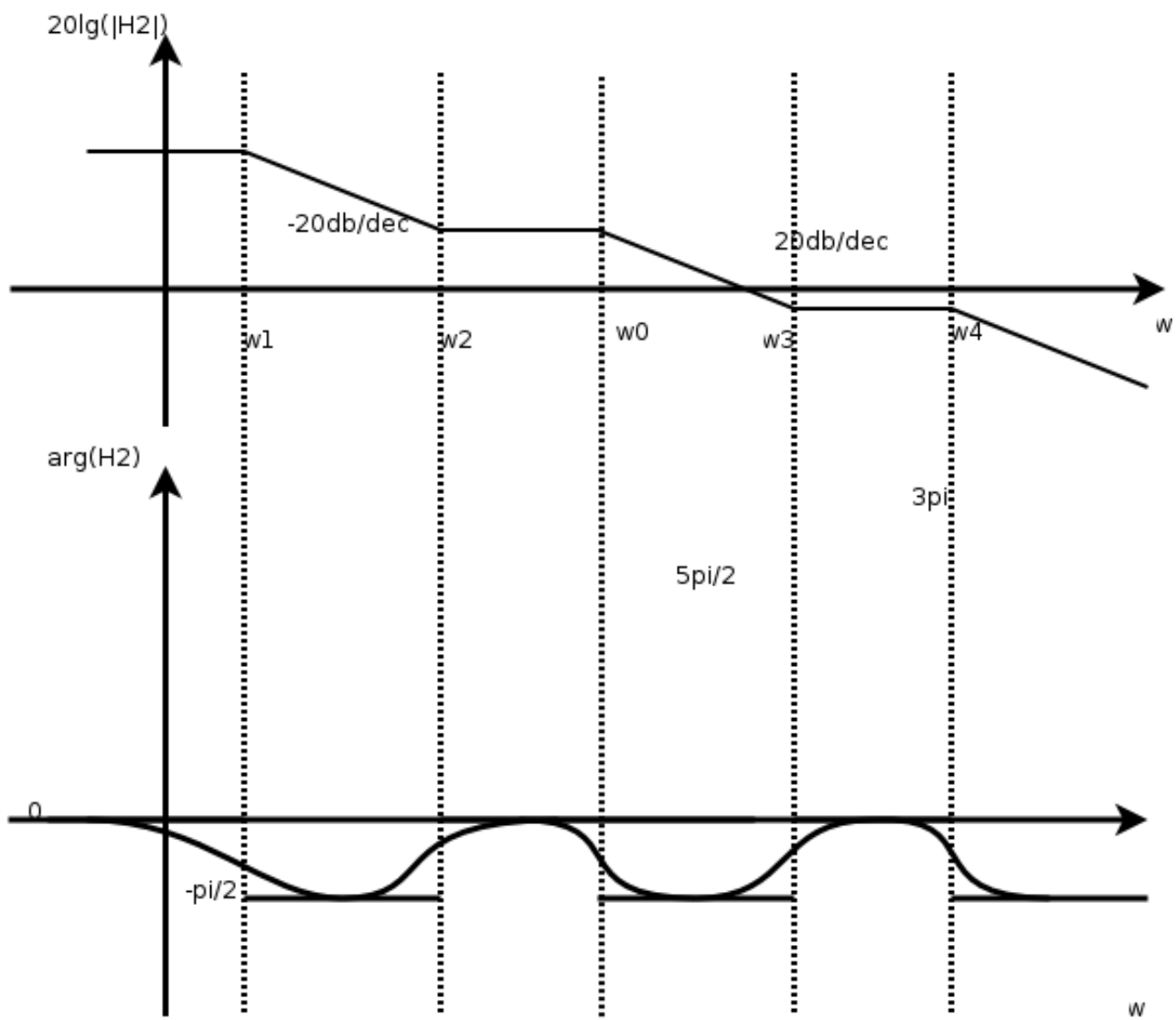


Figura 2: Diagrama de Bode de  $H_2$

**II.**

Como dijimos en la parte i la diferencia entre el diagrama de Bode real y el asintótico de  $|H_1|$  es de 3 db a la frecuencia  $\omega'$  por lo que  $v_o(t) = \frac{100}{112\sqrt{2}}V \cos(\omega't + \frac{\pi}{4}) = 0,63V \cos(\omega't + \frac{\pi}{4})$ <sup>1</sup>

**III.**

Para esta parte tenemos que encontrar las frecuencias a las cuales  $\arg(S) = \frac{\pi}{4}$  el argumento de  $S$  es  $\arg(S) = \arg(V_o) + \arg(\bar{I}) = \arg(V_o) - \arg(I) = \arg(H_1) - \arg(H_2)$ . Por lo tanto tenemos que restar los diagramas de Bode de  $H_1$  y  $H_2$ . Se puede ver que los aportes de fase debidos a los polos en  $\omega_1$  y  $\omega_4$  se cancelan pues aparecen en ambos denominadores, por lo que el diagrama de Bode de  $S$  queda como en la figura 3, donde se ve que las frecuencias a las cuales  $\arg(S) = \frac{\pi}{4}$  son  $\omega_2, \omega_0$  y  $\omega_3$

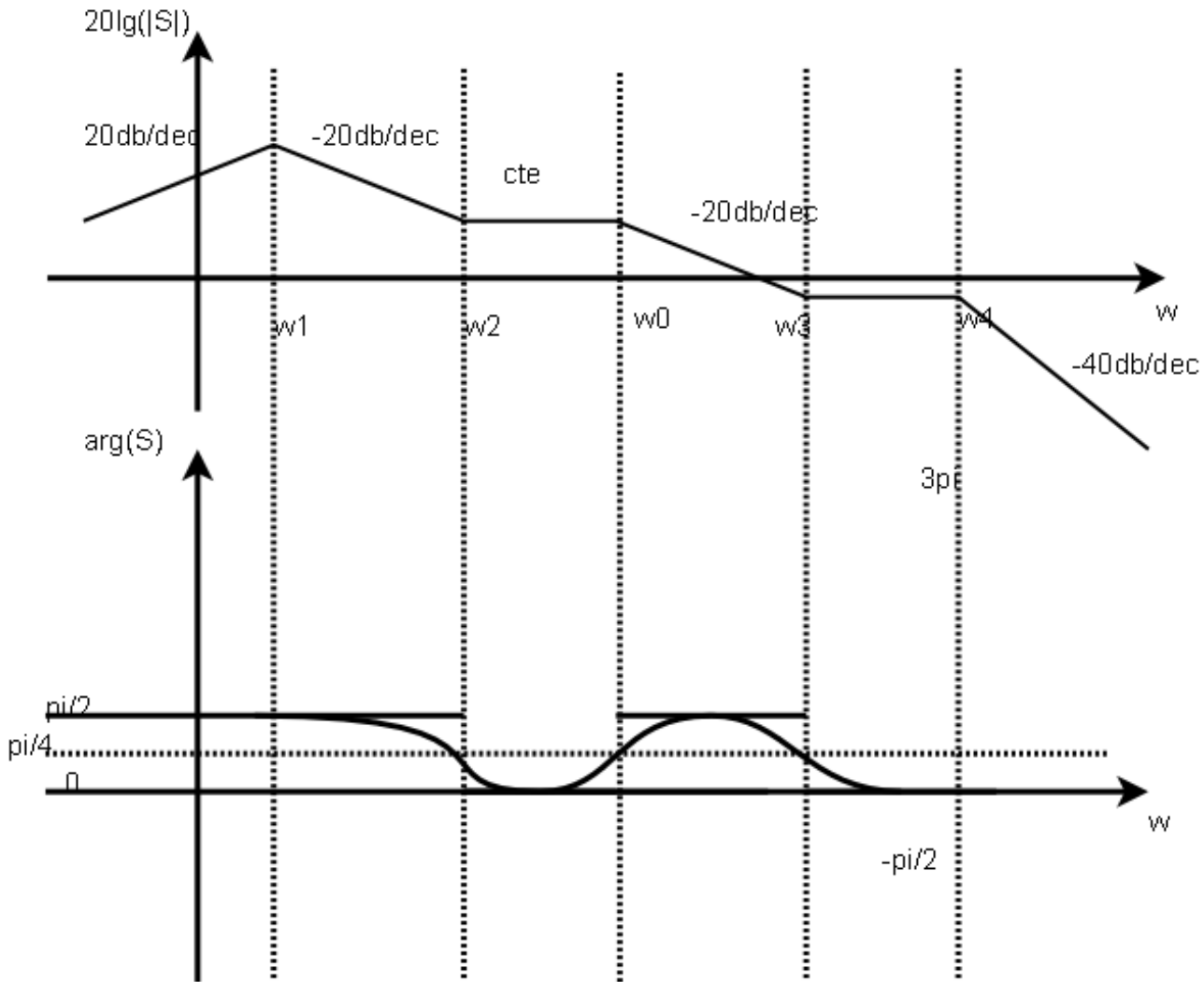


Figura 3: Diagrama de Bode de  $S$

<sup>1</sup>recordar que el valor asintótico era  $\frac{100}{112}$



## Solución ejercicio 2

Nota: En esta solución se trabaja en fasores, con voltajes y corrientes en valores eficaces.

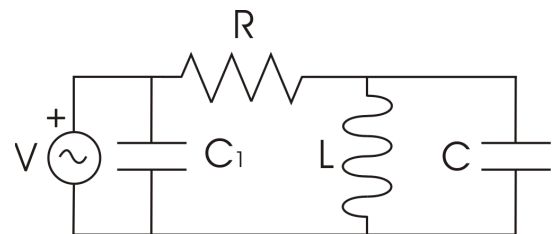
a) i) 
$$I_1(j\omega) = \frac{V}{Z_{eq}} = \frac{1 + (j\omega)^2 LC}{R(1 + (j\omega)^2 LC) + j\omega L} V$$
, donde  $Z_{eq}$  es la impedancia de carga de la fuente.

ii) Evaluando  $Z_{eq}(j\omega)$  con los valores dados en el problema para los componentes se tiene:

$$Z_{eq} = R + \frac{j\omega L}{1 + (j\omega)^2 LC} = (10 + j7.82)\Omega$$

La carga es inductiva ya que tiene parte imaginaria  $> 0$

iii) Para compensar una carga inductiva se coloca un capacitor, de valor tal que la impedancia que "ve" la fuente es puramente real, como se ve en la figura 1, donde debemos calcular  $C_1$ :



**Figura 1**

Calculando la admitancia de carga equivalente del circuito de la figura 1 se tiene:

$$Y_{eq} = \left( j\omega C_1 + \frac{1}{10 + j7.82} \right) 1/\Omega = (j\omega C_1 + 0.062 - j0.049) 1/\Omega$$

Para que sea puramente real se debe cumplir:

$$\omega C_1 = 0.049 \Rightarrow C_1 = 156 \mu F$$

iv) Poniendo valores a  $I_1(j\omega)$  calculado en la parte a)i), se tiene:

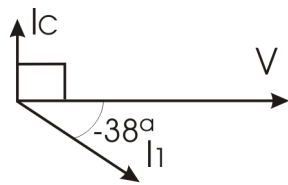
$$I_1(j\omega) = (13.66 - j10.67) A = 17.33 A < -38^\circ$$

$$I_C(j\omega) = V j\omega C_1 = j10.78 A = 10.78 A < 90^\circ$$

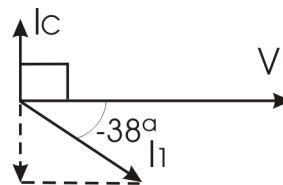
El diagrama fasorial se muestra en la figura 2.

La corriente que entrega la fuente es  $I_1 + I_C$ .

$I_C$  cancela la parte imaginaria de  $I_1$  como se puede ver en la figura 3, por lo que la impedancia vista desde la fuente es puramente real.

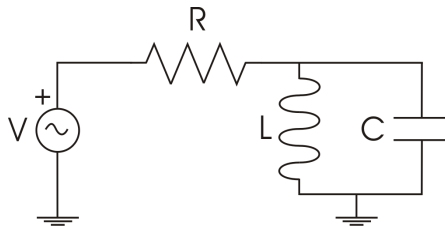


**Figura 2**



**Figura 3**

b) i) Al ser el sistema equilibrado y perfecto, se puede trabajar con el equivalente monofásico (figura 4), el cual tiene el mismo circuito de la parte a)i), por lo que se pueden reutilizar los resultados de la parte a).



**Figura 4**

Las corrientes de línea ( $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ ) son iguales en módulo a  $I_1(j\omega)$  de la parte a)i), y con un desfase de  $120^\circ$  entre sí, debido a las fuentes  $V_1$ ,  $V_2$  y  $V_3$ .

Por lo tanto:

$$I_1(j\omega) = 17.33 \text{ A} \angle -38^\circ$$

$$I_2(j\omega) = 17.33 \text{ A} \angle 82^\circ$$

$$I_3(j\omega) = 17.33 \text{ A} \angle 202^\circ$$

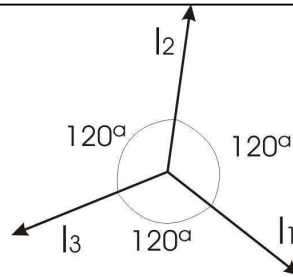
Pasando al tiempo  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ :

$$i_1(t) = 17.33\sqrt{2} \cos(\omega t - 0.66) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 17.33\sqrt{2} \cos(\omega t + 1.43) \text{ A}$$

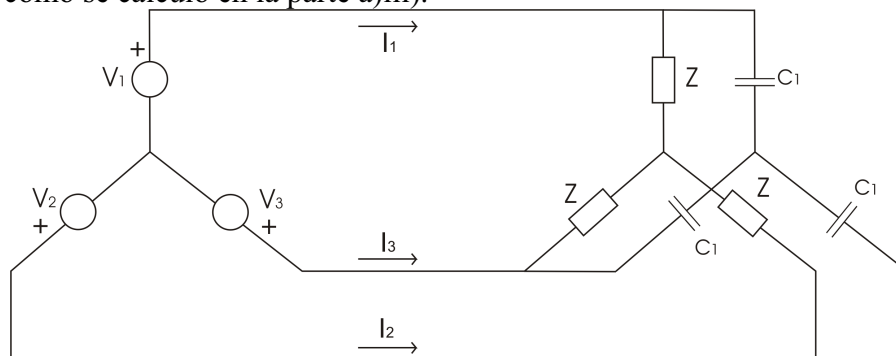
$$i_3(t) = 17.33\sqrt{2} \cos(\omega t + 3.53) \text{ A}$$

Con  $\omega = 2\pi 50 \text{ rad/seg}$



**Figura 5**

- ii) Como las cargas son inductivas, la potencia reactiva se compensa agregando capacitores en paralelo a las cargas, como se muestra en la figura 6, el valor de la capacidad de cada uno es el valor de  $C_1$   $156\mu\text{F}$  como se calculó en la parte a)iii).



**Figura 6**

### Solución del Ejercicio 3

a) Por definición:  $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$ . Entonces

$$F[x(t-\tau)](f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j2\pi f (u+\tau)} du = e^{-j2\pi f \tau} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j2\pi f u} du = e^{-j2\pi f \tau} X(f)$$

↑ Definición     
 ↑ Cambio de variable     
 ↑ Linealidad

El retraso temporal se traduce en un desfase en frecuencia.

b) Sabemos que  $F[e^{+j2\pi f_0 t}](f) = \delta(f - f_0)$ . Entonces, como

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{+j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}, \text{ por linealidad de la TdF tenemos que}$$

$$F[\cos(2\pi f_0 t)](f) = \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$$

c)  $F[p_\tau(t)](f) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{\text{sen}(\pi f \tau)}{\pi f} = \tau \cdot \text{sinc}(f\tau)$

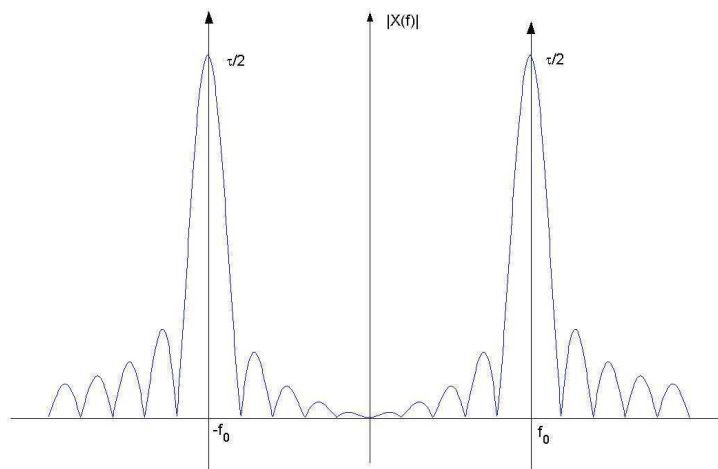
d) Observemos que la señal  $x(t)$  es un coseno de frecuencia  $f_0$  mirado en el intervalo  $0-\tau$ .

Podemos escribir  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) p_\tau\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$ . Entonces:

$$F[x(t)](f) = \left[ \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2} \right] * e^{-j\pi f \tau} \tau \cdot \text{sinc}(f\tau) =$$

$$\frac{\tau}{2} \left[ e^{-j\pi(f-f_0)\tau} \cdot \text{sinc}[(f-f_0)\tau] + e^{-j\pi(f+f_0)\tau} \cdot \text{sinc}[(f+f_0)\tau] \right]$$

donde hemos aplicado las partes anteriores y hemos usado que el producto ordinario se transforma en el producto convolución y que convolucionar una con la delta corrida es lo mismo que correr la señal.



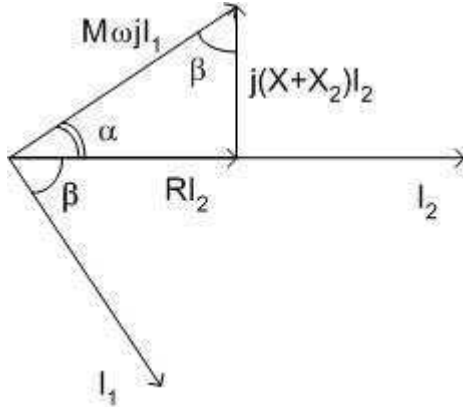
### Solución del Ejercicio 4

a) Sea  $I_2$  real. ( $M\omega = X_3$ )

$$ZI_2 + L_2\omega jI_2 - M\omega jI_1 = 0$$

$$(R + jX)I_2 + jX_2I_2 - M\omega jI_1 = 0$$

$$RI_2 + j(X + X_2)I_2 = M\omega jI_1$$

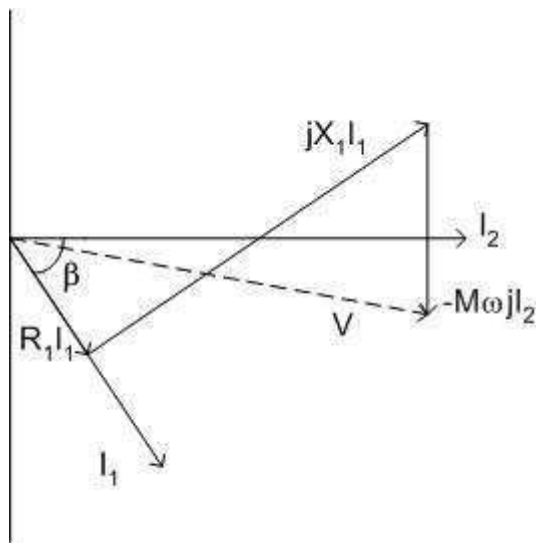


(este dibujo asume  $X+X_2$  positivo; resta por hacer el dibujo para el otro caso)

b)

$$V = R_1I_1 + L_1\omega jI_1 - M\omega jI_2$$

$$R_1I_1 + jX_1I_1 - M\omega jI_2 = V$$



$$c) \quad \begin{cases} V = R_1 I_1 + L_1 \omega j I_1 - M \omega j I_2 \\ Z I_2 + L_2 \omega j I_2 - M \omega j I_1 = 0 \end{cases} \quad \text{Llamando} \quad \begin{cases} L_1 \omega j = X_1 \\ L_2 \omega j = X_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (R_1 + jX_1)I_1 - M \omega j I_2 = V \\ -M \omega j I_1 + [R + j(X + X_2)]I_2 = 0 \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V & -M \omega j \\ 0 & R + j(X + X_2) \end{vmatrix}}{(R_1 + jX_1)[R + j(X + X_2)] + M^2 \omega^2} = \frac{[R + j(X + X_2)]V}{RR_1 - X_1(X + X_2) + M^2 \omega^2 + j[RX_1 + R_1(X + X_2)]}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + jX_1 & V \\ -M \omega j & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{M \omega j V}{RR_1 - X_1(X + X_2) + M^2 \omega^2 + j[RX_1 + R_1(X + X_2)]}$$

d) Para que  $I_2$  sea colineal con  $V$  anulamos la parte real del denominador de  $I_2$ :

$$RR_1 - X_1(X + X_2) + M^2 \omega^2 = 0$$

$$RR_1 + M^2 \omega^2 = X_1(X + X_2)$$

Observar que  $X+X_2$  debe ser positivo.